Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 20/21

Mathematik 1 für Naturwissenschaftler∗innen

Nachklausur am 15.04.2021

- ▶ Drucken Sie die Klausur aus (einseitig).
- ▶ Tragen Sie im Abschnitt *Erklärung* Vorname, Name und Matrikelnummer ein.
- ▶ Wenn Sie keinen Drucker benutzen können oder möchten, dann schreiben Sie den Abschnitt *Erklärung* ab, und schreiben Sie die Aufgabenstellungen (oder zumindest die Formeln daraus) ab – jede Aufgabe auf eine eigene Seite!
- ▶ Tragen Sie bei *Beginn* die aktuelle Uhrzeit ein.
- ▶ Bearbeiten Sie die Klausur. Bearbeitungszeit: 120 Minuten.
- ▶ Beenden Sie nach spätestens 120 Minuten die Bearbeitung.
  Tragen Sie bei *Ende* die aktuelle Uhrzeit ein.
- ▶ Unterschreiben Sie den Abschnitt *Erklärung*.
- ▶ Scannen Sie die Erklärung. Scannen Sie Ihre Lösungen – je ein Dokument pro Aufgabe, auch unbearbeitete Aufgaben!
- ▶ Laden Sie die Erklärung wie angegeben hoch. Laden Sie Ihre Lösungen wie angegeben hoch – auch unbearbeitete Aufgaben!

Zeigen Sie stets Ihren Rechenweg und vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich. Ergebnisse ohne Rechenweg/Zwischenschritte/Begründung liefern keine Punkte.

Es sind maximal 110 Punkte erreichbar, 88 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 44 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Einziges erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).

Viel Erfolg!

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 40**

Erklärung

Vorname: ______________________ Name: ______________________________

Matrikelnummer: ____________________

Beginn: __________________ Ende: __________________

Ich bestätige, dass ich diese Klausur ohne fremde Hilfe und ohne unerlaubte Hilfsmittel bearbeitet habe.

Datum, Unterschrift: ______________________________________

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 41**

Aufgabe 1 (2+5 = 7 Punkte)

Sei $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, und für $n \geq 1$ sei $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$

a) Berechnen Sie a_2 und a_3.

b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion: $a_n = 2^n - 1 \;\forall\, n \geq 0$.

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 42**

Aufgabe 2 (3+3+3+3+3 = 15 Punkte)

Bestimmen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte, oder begründen Sie ggf., warum diese nicht existieren.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2+7x^3-2x^5}{x^2-6x^4+3x^5}$

b) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x^2+7x^3-2x^5}{x^2-6x^4+3x^5}$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{32-x^5}$

d) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2-x\cos^2 x}-\sqrt{x^2+x\sin^2 x}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3(x-\sin x)}{(\mathrm{e}^x-1-x)^3}$

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 43**

Aufgabe 3 (4+4+4+4 = 16 Punkte)

Berechnen Sie (d.h. das Ergebnis soll kein Summenzeichen mehr enthalten):

a) $\displaystyle\sum_{n=3}^{99} 2^{n+2}$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n}}{n!}$

c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{22} \binom{20}{n-2} 2^{n-1}$

d) $\displaystyle\sum_{\mu=0}^{10} \sum_{\nu=0}^{\mu} \frac{5^{\nu}}{11-\nu}$

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 44**

Aufgabe 4 (3+3+3+3 = 12 Punkte)

Sei $f(x) = \log(x^x)$ und $g(x) = \int_{\sin x}^{0} \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$. Berechnen Sie:

a) $f'(x)$

b) $g'(x)$

c) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{x^2+1}{x}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_{-3}^{-2} \frac{x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 45**

Aufgabe 5 (3+4 = 7 Punkte)

a) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil von $\dfrac{2+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$.

b) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ für die gilt $z^5 = \mathrm{i}$.
Zeichnen Sie diese z in einem Diagramm der komplexen Ebene ein.

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 46**

Aufgabe 6 (4+4+4 = 12 Punkte)

Bestimmen Sie die Taylorreihen der folgenden Funktionen um x_0, und geben Sie an, wo die Reihen konvergieren.

a) $\mathrm{e}^{x-5} \quad \text{um} \quad x_0 = 0$

b) $\dfrac{\mathrm{e}^{-x^2}}{1-x^2} \quad \text{um} \quad x_0 = 0$

c) $\sin x \quad \text{um} \quad x_0 = -\frac{\pi}{2}$

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 47**

Aufgabe 7 (1+3+1+2+3+3+4 = 17 Punkte)

Wir untersuchen die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + x(|x| + 2) + 2}{(-2|x|)} .$$

a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist $f(x)$ definiert?
b) Bestimmen Sie alle Asymptoten von f.
c) Bestimmen Sie alle Nullstellen.
d) Berechnen Sie $f'(x)$.
e) Bestimmen Sie alle Hoch- und Tiefpunkte.
f) Zeichnen Sie den Graph der Funktion.
g) Geben Sie möglichst große Intervalle $A, B \subseteq \mathbb{R}$ mit $\frac{1}{2} \in B$ an, so dass $f : A \to B$ bijektiv ist. Sei $f^{-1} : B \to A$ die Umkehrfunktion von f. Bestimmen Sie ${f^{-1}}'(0)$.

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 48**

Aufgabe 8 (3+5 = 8 Punkte)

Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie AA^T.
b) Bestimmen Sie A^{-1}.

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 49**

Aufgabe 9 (4+4 = 8 Punkte)

Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie $\det A$.

b) Bestimmen Sie alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^5$, die $A\vec{x} = \vec{b}$ erfüllen.

Hochzuladen auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` als **Blatt 50**

Aufgabe 10 (8 Punkte)

Wir betrachten $C^1(\mathbb{R})$, den Vektorraum der stetig diffbaren Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.
Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $f_n(x) = x^n$ und $V = \operatorname{span}(f_0, f_1, f_2, f_3)$.
Die lineare Abbildung $L : V \to V$ sei definiert durch $L(f) = f'$.
Bestimmen Sie die Dimensionen der Unterräume

$$U_1 = \{f \in V \mid L(f) = 0\} \qquad \text{und} \qquad U_2 = \{f \in V \mid \exists g \in V \text{ mit } L(g) = f\},$$

und geben Sie jeweils eine Basis an.