Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose

WiSe 2020/21
02.11.2020
Blatt 01

Übungen zur Integrations- und Maßtheorie

Aufgabe 01. Sei K ein Körper. Ein 4-Tupel $(A, +, *, \cdot)$ heißt *eine (assoziative) K-Algebra*, wenn $+, *$ innere Verknüpfungen auf A sind, also $+, *\colon A \times A \to A$, und $\cdot$ eine äußere Verknüpfung auf A ist, also $\cdot\colon K \times A \to A$, so dass gilt: (i) $(A, +, *)$ ist ein Ring; (ii) $(A, +, \cdot)$ ist ein K-Vektorraum; (iii) $\lambda \cdot (x * y) = (\lambda \cdot x) * y = x * (\lambda \cdot y)$, für alle $\lambda \in K$, $x, y \in A$.

(a) Sei $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ der Körper mit zwei Elementen und X eine beliebige Menge. Definieren Sie auf allen Abbildungen von X nach $\mathbb{F}_2$, $A := \mathrm{Abb}(X, \mathbb{F}_2)$, in naheliegender Weise Verknüpfungen $(+, *, \cdot)$, mit denen $(A, +, *, \cdot)$ zu einer $\mathbb{F}_2$-Algebra (mit Einselement) wird.

(b) Wir definieren nun für jede Teilmenge $Y \subseteq X$ ihre *charakteristische Funktion* $\chi_Y\colon X \to \mathbb{F}_2$ durch $\chi_Y(x) = 1$, falls $x \in Y$ ist, und $\chi_Y(x) = 0$, falls $x \notin Y$ ist. Zeigen Sie, dass die Zuordnung $\Phi\colon \mathfrak{P}(X) \to \mathrm{Abb}(X, \mathbb{F}_2)$, $Y \mapsto \chi_Y$, bijektiv ist.

(c) Welchen mengentheoretischen Verknüpfungen auf $\mathfrak{P}(X)$ entsprechen nun via Φ die inneren Verknüpfungen $+$ und $*$ von $\mathrm{Abb}(X, \mathbb{F}_2)$ auf $\mathfrak{P}(X)$? Zeigen Sie: Eine Teilmenge $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ ist bezüglich der induzierten Strukturen $(+, *, \cdot)$ via Φ genau dann eine $\mathbb{F}_2$-*Unteralgebra mit Eins*, wenn gilt: (i) $X \in \mathfrak{A}$; (ii) $\forall Y \in \mathfrak{A} : Y^c \in \mathfrak{A}$; (iii) $\forall Y_1, Y_2 \in \mathfrak{A}$: $Y_1 \cup Y_2 \in \mathfrak{A}$.

Aufgabe 02. (a) Recherchieren Sie zunächst den sogenannten *Großen Umordnungssatz* für absolut kovergente Reihen, formulieren und erläutern sie ihn.

(b) Sei nun X eine abzählbare Menge (endlich oder unendlich) und $\varphi\colon X \to [0, \infty]$ eine beliebige Funktion (die wir als *Gewichtsfunktion* interpretieren). Zeigen Sie, dass durch $\mu_\varphi\colon \mathfrak{P}(X) \to [0, \infty]$,

$$\mu_\varphi(A) = \sum_{x \in A} \varphi(x),$$

ein Maß auf $(X, \mathfrak{P}(X))$ definiert wird.

(c) Sei X wieder abzählbar. Zeigen Sie, dass jedes Maß μ auf $(X, \mathfrak{P}(X))$ wie unter (b) zu Stande kommt und dass $\varphi\colon X \to [0, \infty]$ mit $\mu = \mu_\varphi$ eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 03 (Schrumpfungsformel). **(a)** Sei $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra auf einer Menge X und μ ein Maß auf $(X, \mathfrak{A})$. Zeigen Sie: Sind $A_k \in \mathfrak{A}$ $(k \in \mathbb{N})$ mit $A_k \supseteq A_{k+1}$, für alle $k \in \mathbb{N}$, und ist $\mu(A_1) < \infty$, so gilt für $A := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k$:

$$\mu(A) = \lim_{k \to \infty} \mu(A_k).$$

(b) Sei μ das Zählmaß auf $\mathbb{N}$ sowie $A_k := \{n \in \mathbb{N} : n \geq k\}$ $(k \in \mathbb{N})$. Zeigen Sie, dass die Schrumpfungsformel (a) für (A_k) nicht gilt.

Aufgabe 04. **(a)** Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}$ und $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ gleichmächtig sind. (Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\mathbb{R}$ und $[0,1)$ gleichmächtig sind und drücken Sie dann jedes $x \in [0,1)$ durch seinen *Dualbruch* $0, a_1 a_2 \ldots$ (mit $a_k \in \mathbb{F}_2$, $k \in \mathbb{N}$) aus.)

(b)* Sei $\mathfrak{B}_n \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ die Borel-Algebra ($n \in \mathbb{N}$). Zeigen Sie, dass $\mathfrak{B}_n$ gleichmächtig zu $\mathbb{R}$ ist und damit, dass $\mathfrak{B}_n \neq \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ sein muss.

Hinweis: Benutzen Sie die Sätze von *Schröder-Bernstein* und *Cantor* aus der Analysis-I.

Abgabe: Sonntag, 08. November 2020, 18 Uhr via „urm“ an Ihren Tutor