Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose

WiSe 2020/21
15.11.2020
Blatt 03

Übungen zur Integrations- und Maßtheorie

Aufgabe 09. Sei λ^* das äußere Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$ und $M \subseteq \mathbb{R}$ eine λ^*-messbare Teilmenge (d.i.: *eine Lebesgue-Menge*). Sei weiter $\varepsilon > 0$ beliebig.

(a) Zeigen Sie, dass es eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}$ gibt mit $U \supseteq M$ und $\lambda^*(U \setminus M) < \varepsilon$. (Hinweis: Betrachte zunächst den Fall $\lambda^*(M) < \infty$ und im Fall $\lambda^*(M) = \infty$ dann die Durchschnitte $M_n = M \cap [-n, n]$ ($n \in \mathbb{N}$). Denken Sie auch immer an den „$2^{-n}\varepsilon$-Trick".)

(b) Zeigen Sie, dass es eine abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ mit $A \subseteq M$ und $\lambda^*(M \setminus A) < \varepsilon$ gibt. (Hinweis: Betrachte M^c und Teil (a).)

Aufgabe 10. Sei λ^* das äußere Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$ und λ seine Einschränkung auf die Borelsche σ-Algebra $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R})$.

(a) Zeigen Sie: Für jede Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ gibt es eine Borelsche Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}$ mit $B \supseteq A$ und $\lambda(B) = \lambda^*(A)$. (Hinweis: Wählen Sie eine Minimalfolge $((Q_{nk})_{k\in\mathbb{N}})_{n\in\mathbb{N}}$ von Quaderüberdeckungen für das äußere Maß $\lambda^*(A)$.)

(b) Sei nun $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ *die Lebesguesche σ-Algebra* der λ^*-messbaren Teilmengen von $\mathbb{R}$ und $\hat{\mathfrak{B}}$ die λ^*-Vervollständigung von $\mathfrak{B}$ (siehe Aufgabe 07). Zeigen Sie: $\mathfrak{L} = \hat{\mathfrak{B}}$. (Hinweis: Suche für $M \in \mathfrak{L}$ mit Aufgabe 09 eine Borelmenge $B \subseteq M$ mit $\lambda^*(M \setminus B) = 0$.)

Aufgabe 11. *Die Cantormenge* $C \subseteq [0, 1]$ wird so konstruiert: Im ersten Schritt nimmt man aus $C_0 := [0, 1]$ das (offene) mittlere Drittel heraus, $C_1 := C_0 \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Im zweiten Schritt nimmt aus den verbleibenden Intervallen $[0, \frac{1}{3}]$ und $[\frac{2}{3}, 1]$ wiederum das jeweils mittlere Drittel heraus, $C_2 := [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$. Bei jedem weiteren Schritt nimmt man aus den verbleibenden Intervallen jeweils das mittlere Drittel heraus und erhält so im n-ten Schritt $C_n \subseteq [0, 1]$. Schließlich setzt man $C := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$.

(a) Zeigen Sie, dass C kompakt (und damit eine Borelmenge) mit $\lambda(C) = 0$ (und λ, wie immer, dem Borel-Lebesgueschen Maß) ist.

(b) Zeigen Sie, dass C gleichmächtig zu $[0, 1]$ ist. (Hinweis: Betrachte die Darstellung der Zahlen in C im *ternären System*).

(c) Zeigen Sie, das die Lebesguesche σ-Algebra $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ gleichmächtig zu $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$ ist.

Aufgabe 12. Sei λ^* das äußere Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$).

(a) Zeigen Sie, dass λ^* translationsinvariant ist.

(b) Sei $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ die Lebesguesche σ-Algebra der λ^*-messbaren Teilmengen in $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass das Beispiel einer Teilmenge $A \subseteq [0, 1]^n$ aus der Vorlesung, das nicht Borelsch ist, auch nicht in $\mathfrak{L}$ liegt.

(c) Zeigen Sie, dass λ^* nicht σ-additiv sein kann.

Abgabe: Sonntag, 22. November 2020, 18 Uhr via „urm“ an Ihren Tutor