Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose

WiSe 2020/21
29.11.2020
Blatt 05

Übungen zur Integrations- und Maßtheorie

Aufgabe 17. Sei $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $Y \in \mathfrak{A}$.

(a) Wir definieren *die Spuralgebra von* $\mathfrak{A}$ *auf* Y durch

$$\mathfrak{B} := \{A \cap Y \in \mathfrak{P}(Y) : \ A \in \mathfrak{A}\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathfrak{B}$ eine σ-Algebra auf Y ist und $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$.

(b) Nun defnieren wir $\nu : \mathfrak{B} \to [0, \infty]$ durch $\nu := \mu|\mathfrak{B}$. Zeigen Sie, dass ν ein Maß auf $(Y, \mathfrak{B})$ ist.

(c) Sei $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ $\mathfrak{A}$-messbar. Zeigen Sie, dass dann auch $f|Y : Y \to \bar{\mathbb{R}}$ $\mathfrak{B}$-messbar ist. Sei nun zusätzlich $f \geq 0$ und $\chi_Y : X \to \mathbb{R}$ die charakteristische Funktion von Y. Zeigen Sie dann:

$$\int f|Y \, d\nu = \int f \cdot \chi_Y \, d\mu.$$

(Diese Zahl in $[0, \infty]$ wird mit $\int_Y f \, d\mu$ bezeichnet.)

Aufgabe 18. Sei $(X, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$ ein Maßraum, $\mathfrak{A}_2 \subseteq \mathfrak{A}_1$ eine σ-Unteralgebra und es sei $\mu_2 := \mu_1|\mathfrak{A}_2$.

(a) Zeigen Sie, dass auch $(X, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$ ein Maßraum ist.

(b) Sei $f : X \to [0, \infty]$ $\mathfrak{A}_2$-messbar. Zeigen Sie, dass f dann auch $\mathfrak{A}_1$-messbar ist und es gilt:

$$\int f \, d\mu_1 = \int f \, d\mu_2.$$

Aufgabe 19. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend. Zeigen Sie, dass f (Borel-) messbar ist.

Aufgabe 20. Sei $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $g : X \to [0, \infty]$ messbar.

(a) Zeigen Sie, dass durch $\nu : \mathfrak{A} \to [0, \infty]$,

$$\nu(A) = \int_A g \, d\mu$$

(vgl. Aufgabe 17) ein Maß auf $(X, \mathfrak{A})$ gegeben wird. (Dieses wird *das mit* g *gewichtete Maß* μ genannt und manchmal (wegen Teil (b)) auch mit $d\nu = g \cdot d\mu$ bezeichnet.)

(b) Sei $f : X \to [0, \infty]$ messbar. Zeigen Sie:

$$\int f \, d\nu = \int f \cdot g \, d\mu.$$

Abgabe: Sonntag, 6. Dezember 2020, 18 Uhr via „urm“ an Ihren Tutor