Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose

WiSe 2020/21
20.12.2020
Blatt 08

Übungen zur Integrations- und Maßtheorie

Aufgabe 29. Sei X ein Maßraum.

(a) Sei $f \in \mathcal{L}^1(X)$ und $g \in \mathcal{L}^\infty(X)$ (vgl. Aufgabe 28). Zeigen Sie, dass dann $f \cdot g \in \mathcal{L}^1(X)$ ist und die Hölderungleichung auch für die Fälle $p = 1$ und $q = \infty$ gilt:

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty.$$

(b) Zeigen Sie, dass auch $(L^\infty(X), \|\cdot\|_\infty)$ (vgl. Aufgabe 28) vollständig ist. (Hinweis: Vergleichen Sie auch die „Pfingstaufgabe“ (Aufgabe 32) aus Analysis-II.)

Aufgabe 30. Sei (X, μ) ein Maßraum und $1 \leq p < q \leq \infty$.

(a) Sei $p < r < q$ und $\lambda \in (0, 1)$ durch die Bedingung $\frac{1}{r} = (1 - \lambda)\frac{1}{q} + \lambda\frac{1}{p}$ gegeben. Zeigen Sie: Ist $f \in \mathcal{L}^p(X) \cap \mathcal{L}^q(X)$, so ist $f \in \mathcal{L}^r(X)$ und es gilt:

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^\lambda \cdot \|f\|_q^{1-\lambda}.$$

(Hinweis: Wenden Sie Hölders Ungleichung auf geeignete Potenzen von $|f|$ an.)

(b) Sei nun $\mu(X) < \infty$ und $f \in \mathcal{L}^q(X)$. Zeigen Sie, dass dann $f \in \mathcal{L}^p(X)$ ist, für alle $1 \leq p \leq q$, und es gilt:

$$\|f\|_p \leq \mu(X)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \cdot \|f\|_q.$$

(Hinweis: Die konstante Funktion 1 ist jetzt in $\mathcal{L}^r$, für alle $r \in [1, \infty]$.)

Abgabe: Mittwoch, 06. Januar 2021, 18 Uhr via „urm“ an Ihren Tutor

Frohe Weihnachten und ein Gutes Neues Jahr