Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose

WiSe 2020/21
06.01.2021
Blatt 09

Übungen zur Integrations- und Maßtheorie

Aufgabe 31. Sei $\mathfrak{L}^1$ die Lebesgue-Algebra auf $\mathbb{R}$ und $\mathfrak{L}^2$ die Lebesgue-Algebra auf $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie:

(a) $\mathfrak{L}^1 \otimes \mathfrak{L}^1 \subseteq \mathfrak{L}^2$;

(b) $\mathfrak{L}^1 \otimes \mathfrak{L}^1 \neq \mathfrak{L}^2$. (Hinweis: Verwenden Sie ein $C \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}) \setminus \mathfrak{L}^1$.)

Aufgabe 32. Sei $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ die Borelsche σ-Algebra auf $\mathbb{R}$ und λ das Borel-Lebesguesche Maß auf $\mathfrak{B}$. Sei weiter $\mu\colon \mathfrak{P}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$ das Zählmaß auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

(i) die Diagonale $\triangle = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x = y\}$ in $\mathfrak{B} \otimes \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ liegt;

(ii) für jedes $x \in \mathbb{R}$ der Schnitt $\triangle_x \in \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ und für jedes $y \in \mathbb{R}$ der Schnitt $\triangle_y \in \mathfrak{B}$ liegt;

(iii) die Funktionen $s\colon \mathbb{R} \to [0,\infty]$, $s(x) = \mu(\triangle_x)$, und $t\colon \mathbb{R} \to [0,\infty]$, $t(y) = \lambda(\triangle_y)$, messbar sind;

(iv) aber gilt:

$$\int s\, d\lambda \neq \int t\, d\mu.$$

Wieso widerspricht das nicht dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Produktmaße?

Abgabe: Sonntag, 10. Januar 2021, 18 Uhr via „urm“ an Ihren Tutor