Übungen zur Integrations- und Maßtheorie

Aufgabe 33. Sei $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und $f\colon X \to [0, \infty]$ eine messbare Funktion. Sei weiter λ das Borel-Lebesguesche Maß auf der Borel-Algebra $\mathfrak{B}$ von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass der *Subgraph von* f, d.i. die Teilmenge

$$G_f := \{(x, t) \in X \times \mathbb{R} : \ 0 \leq t \leq f(x)\} \subseteq X \times \mathbb{R},$$

in $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{P}(X \times \mathbb{R})$ ist und bezüglich des Produktmaßes $\mu \otimes \lambda$ auf $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ gilt:

$$\int f \, d\mu = \mu \otimes \lambda(G_f).$$

Aufgabe 34. (a) Sei K ein Kreiskegel mit einer Grundscheibe vom Radius $r > 0$ und Höhe $h > 0$. Berechnen Sie mit Cavalieries Prinzip das Volumen von K.

(b) Sei $f\colon [a, b] \to [0, \infty)$ stetig $(-\infty < a < b < \infty)$ und $K \subseteq [a, b] \times \mathbb{R}^2$ der Rotationskörper, der entsteht, wenn man den Graphen von f um die x-Achse rotiert,

$$K = \{(x, y, z) \in [a, b] \times \mathbb{R}^2 : \ y^2 + z^2 \leq f(x)^2\}.$$

Begründen Sie, warum $K \subseteq \mathbb{R}^3$ Borelsch ist und bzgl. des Borel-Lebesgueschen Maßes λ auf $\mathbb{R}^3$ gilt:

$$\lambda(K) = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx.$$

Aufgabe 35. Zeigen Sie, dass für das Volumen V eines Torus' T mit Radien $0 < r < R$ gilt:

$$V = 2\pi^2 r^2 R.$$

Aufgabe 36. (a) Sei $K \subseteq \mathbb{R}^3$ kompakt mit $\mathring{K} \neq \emptyset$. ($\mathring{K}$ bezeichnet hier das Innere von K.) Begründen Sie, dass K Borelsch ist und für das Lebesguesche Maß $\lambda^3(K) = V$ gilt: $0 < V < \infty$.

(b) *Der Schwerpunkt* $S_K = (s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^3$ *eines Körpers* $K \subseteq \mathbb{R}^3$ (d.h.: K ist kompakt mit $\mathring{K} \neq \emptyset$) wird definiert durch ($\mathrm{vol}(K) := \lambda^3(K)$)

$$s_i := \frac{1}{\mathrm{vol}(K)} \int_K x_i \, dx \quad (i = 1, 2, 3).$$

Sei nun $S = S_{\mathbb{B}^3_+} = (s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^3$ der Schwerpunkt der oberen Halbkugel $\mathbb{B}^3_+ = \{x \in \mathbb{B}^3 : x_3 \geq 0\}$.

(i) Begründen Sie mit Hilfe der Transformationsformel für lineare Diffeomorphismen, dass $s_1 = s_2 = 0$ ist.

(ii) Berechnen Sie mit Hilfe von Tonellis Satz s_3.

Abgabe: Sonntag, 17. Januar 2021, 18 Uhr via „urm“ an Ihren Tutor