Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose

WiSe 2020/21
17.01.2021
Blatt 11

Übungen zur Integrations- und Maßtheorie

Aufgabe 37. Wir betrachten die Kugelkoordinaten $\Phi\colon G \to \mathbb{R}^3$ mit $G = (0,1) \times (0,\pi) \times (0,2\pi)$ und

$$\Phi(r,\theta,\varphi) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta).$$

Wir benutzen von Aufgabe 44.b aus Analysis II, dass Φ injektiv ist.

(a) Berechnen Sie die Jacobische $J_\Phi\colon G \to [0,\infty)$, argumentieren Sie möglichst sauber mit dem Umkehrsatz, dass $D = \Phi(G)$ ein Gebiet ist, bestimmen Sie D und begründen Sie, warum $\Phi\colon G \to D$ ein Diffeomorphismus ist.

(b) Begründen Sie, warum $\mathbb{B}^3 \setminus D$ eine Borelsche Nullmenge ist. (Hint: Z.B. mit der Transformationsformel oder auch mit Cavalieri wie in der Musterlösung-10 von Aufgabe 35.)

(c) Zeigen Sie nun (erneut) mit Hilfe dieser Kugelkoordinaten, dass für das Volumen V der Einheitskugel $\mathbb{B}^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| \leq 1\}$ gilt:

$$V = \frac{4}{3}\pi.$$

Aufgabe 38. Wir betrachten nun die Polarkoordinaten $\phi\colon G \to \mathbb{R}^2$ mit $G = (0,\infty) \times (0,2\pi)$ und

$$\Phi(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

(a) Berechnen Sie die Jacobische J_Φ von Φ, das Bild $D \subseteq \mathbb{R}^2$ von Φ und begründen Sie, warum $\Phi\colon G \to D$ ein Diffeomorphismus ist.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe von Polarkoordinaten die Integrale

$$\int_{\mathbb{B}^2} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy, \quad \int_{\mathbb{B}^2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy,$$

und zeigen Sie mit Hilfe des 2. Integrals (erneut):

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Aufgabe 39. (a) Sei λ das Borel-Lebesguesche Maß auf $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$), $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein (achsenparalleler) Quader und sei $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie, dass es ein $r \in \mathbb{N}$ und (achsenparallele) Würfel $W_1, \ldots, W_r \subseteq \mathbb{R}^n$ gibt mit $Q \subseteq W_1 \cup \cdots \cup W_r$ und

$$\sum_{j=1}^{r} \lambda(W_j) < \lambda(Q) + \varepsilon.$$

(Hinweis: Prüfen Sie das zunächst für Quader mit rationalen Eckpunkten und approximieren Sie dann Q mit solchen von außen.)

(b) Zeigen Sie nun, dass man das äußere Lebesgue-Maß λ^* auf $\mathbb{R}^n$ auch mit Würfelüberdeckungen an Stelle von Quaderüberdeckungen definieren könnte, d.h.: für alle $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist

$$\lambda^*(A) = \inf\{\sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda(W_j) \in [0,\infty] : \ (W_j)_{j\in\mathbb{N}} \text{ ist eine Würfelüberdeckung von } A\}.$$

Aufgabe 40. (a) Sei $N \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge (bzgl. des äußeren Lebesgue-Maßes auf $\mathbb{R}^n$) und $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie, dass es eine Kugelüberdeckung $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von N gibt mit $\sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda(B_k) < \varepsilon$.

(b) Zeigen Sie, dass man das äußere Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$ auch mit Kugelüberdeckungen bekommt: Für alle $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist

$$\lambda^*(A) = \inf\{\sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda(B_j) \in [0,\infty] : \ (B_j)_{j\in\mathbb{N}} \text{ ist eine Kugelüberdeckung von } A\}.$$

(Hinweis: Benutzen Sie das (noch unbewiesene) Lemma aus der Vorlesung, dass man einen Quader Q zu einem gegebenen $\varepsilon > 0$ so mit einer Kugelüberdeckung $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Q versehen kann, dass $\sum_k \lambda(B_k) < \lambda(Q) + \varepsilon$ ist.)

Abgabe: Sonntag, 24. Januar 2021, 18 Uhr via „urm“ an Ihren Tutor