Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose

WiSe 2020/21
24.01.2021
Blatt 12

Übungen zur Integrations- und Maßtheorie

Aufgabe 41. Sei λ das Borel-Lebesguesche Maß auf $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$.

(a) Seien $f, g \in \mathcal{L}^1(\lambda)$. Zeigen Sie, dass $\varphi\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto f(t)g(x-t)$, messbar und bzgl. $\lambda \otimes \lambda$ integrierbar ist und damit nach Fubinis Satz $f * g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$(f * g)(x) = \int f(t)g(x-t)\, d\lambda(t),$$

λ-fast überall definiert ist. Wir setzen $(f*g)(x) = 0$ für die $x \in \mathbb{R}^n$, wo diese Vorschrift nicht definiert ist, und nennen $f * g$ *die Faltung von f und g*. Begründen Sie, warum $f * g$ messbar ist und

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$$

gilt (und damit also $f * g \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ ist).

(b) Zeigen Sie, dass

$$*\colon L^1(\lambda) \times L^1(\lambda) \to L^1(\lambda),\ ([f],[g]) \mapsto [f * g]$$

wohldefiniert, $\mathbb{R}$-bilinear, assoziativ und kommutativ ist.

(Hinweis: Benutzen Sie Translationsinvarianz von λ und Tonellis Satz.)

Für die folgenden drei Aufgaben benutzen wir folgenden Satz aus der Funktionalanalysis:

Satz (von Stone-Weierstraß). Sei (K,d) ein kompakter metrischer Raum und $(\mathcal{C}(K,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ die Banach-Algebra der stetigen Funktionen auf K (siehe auch Aufgabe 35.b, Analysis-II). Sei weiter $A \subseteq \mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ eine Unteralgebra, so dass

- für jedes $x \in K$ ein $f \in A$ mit $f(x) \neq 0$ existiert und
- für jedes Paar $(x,y) \in K \times K$ mit $x \neq y$ ein $g \in A$ existiert mit $g(x) \neq g(y)$.

Dann liegt A dicht in $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$.

Aufgabe 42. Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und $f\colon K \to \mathbb{R}^m$ stetig $(m,n \in \mathbb{N})$. Zeigen Sie, dass es eine Folge (P_k) stetig differenzierbarer Funktionen $P_k\colon K \to \mathbb{R}^m$ $(k \in \mathbb{N})$ gibt, die gleichmäßig gegen f konvergiert. (Hinweis: Versuchen Sie es mit polynomialen Abbildungen.)

Aufgabe 43. Sei $F\colon \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld $(n \in \mathbb{N})$.

(a) Zeigen Sie, dass es eine Folge (Q_k) stetig differenzierbarer Vektorfelder auf $\mathbb{S}^{n-1}$ gibt, die gleichmäßig gegen F konvergiert.

(b) (Igelsatz) Sei nun n ungerade. Zeigen Sie, dass F eine Nullstelle hat.

Aufgabe 44. (a) (Brouwers Fixpunktsatz) Sei $f\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ stetig ($n \in \mathbb{N}$). Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt hat. (Hinweis: Approximieren Sie f mit stetig differenzierbaren Abbildungen $g_k\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}^n$ und skalieren Sie geschickt um, so dass $g_k(\mathbb{B}^n) \subseteq \mathbb{B}^n$ ist.)

(b) (Retraktionssatz) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass es keine Retraktion $r\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ (also r stetig mit $r \circ i = \mathrm{id}$, wo $i\colon \mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{B}^n$ die Inklusion ist) gibt. (Hinweis: Bauen Sie aus einer angenommenen Retraktion r ein fixpunktfreies $f\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$.)

Abgabe: Sonntag, 31. Januar 2021, 18 Uhr via „urm“ an Ihren Tutor