Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose

WiSe 2020/21
31.01.2021
Blatt 13

Übungen zur Integrations- und Maßtheorie

Aufgabe 45. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $s \in [0, \infty)$. Für jedes $\delta > 0$ und jede Teilmenge $A \subseteq X$ setzen wir

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^s_\delta(A) \;&:=\; \inf\{\sum_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{diam}(C_k)^s \in [0,\infty] :\ (C_k)_k \text{ ist eine Überdeckung von } A \\ &\qquad \text{mit } \operatorname{diam}(C_k) < \delta,\ \forall k \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

($\operatorname{diam}(C) = \sup\{d(x,y) \in [0,\infty) : x, y \in C\} \in [0,\infty]$ bezeichnet hier *den Durchmesser von* $\emptyset \neq C \subseteq X$, $\operatorname{diam}(\emptyset)^s := 0$, $\forall s \geq 0$.) Schließlich sei

$$\mathcal{H}^s(A) = \sup_{\delta>0} \mathcal{H}^s_\delta(A) \in [0,\infty].$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{H}^s$ ein äußeres Maß auf X ist. (Man nennt $\mathcal{H}^s$ (bis auf einen Faktor) *das s-dimensionale äußere Hausdorff-Maß auf X*.)

Aufgabe 46. Sei X ein metrischer Raum. Für jede Teilmenge $A \subseteq X$ defniert man *die Hausdorff-Dimension von* A durch

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) := \inf\{s \in [0,\infty) :\ \mathcal{H}^s(A) = 0\} \in [0,\infty].$$

Zeigen Sie für $0 \leq s < t$:

(i) $\mathcal{H}^s(A) < \infty \Rightarrow \mathcal{H}^t(A) = 0$

(ii) $\mathcal{H}^t(A) > 0 \Rightarrow \mathcal{H}^s(A) = \infty$

Folgern Sie daraus, dass für A (mit unendlich-vielen Elementen) auch gilt:

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) = \sup\{s \in [0,\infty) :\ \mathcal{H}^s(A) = \infty\}.$$

Aufgabe 47. Sei $C \subseteq \mathbb{R}$ die Cantormenge (siehe Aufgabe 11) und $s := \ln 2/\ln 3$. Zeigen Sie mit folgender Anleitung, dass $\dim_{\mathcal{H}}(C) = s$ ist.

(i) $\mathcal{H}^s(C) \leq 1$

(ii) Sei $\delta < \frac{1}{3}$ und $(J_i)_{i=1,\ldots,m}$ eine endliche Überdeckung von C aus offenen Intervallen mit $\operatorname{diam}(J_i) < \delta$, für alle $i = 1, \ldots, m$. Dann gilt

$$\frac{1}{2} \leq \sum_{i=1}^{m} \operatorname{diam}(J_i)^s$$

(iii) $\frac{1}{2} \leq \mathcal{H}^s(C)$

Für die folgende Aufgabe betrachten wir komplex-wertige, messbare Funktionen $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, d.h.: Urbilder von offenen Mengen sind (Borel-) messbar. f heißt dann *integrierbar*, wenn

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx < \infty$$

ist. In diesem Fall sind $\mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrierbar und man setzt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx := \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{Re}(f)(x)\, dx + i \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{Im}(f)(x)\, dx.$$

Wir schreiben $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) := \{f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} : f \text{ integrabel}\}$.

Aufgabe 48 (Fourier-Transformation). **(a)** Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Begründen Sie, dass für jedes $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $x \mapsto f(x)\exp(-i\langle \xi, x\rangle)$ (mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dem kanonischen Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$) integrierbar ist. Man setzt daher $\hat{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$,

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle \xi, x\rangle}\, dx$$

und nennt dies *die Fourier-Transformierte von f*. Begründen Sie, dass $\hat{f}$ stetig und beschränkt ist mit

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \|f\|_1.$$

(b) Seien $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie:

$$(f * g)\hat{} = (2\pi)^{n/2} \hat{f} \cdot \hat{g}.$$

(c) Seien $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass $\hat{f}g$ und $f\hat{g}$ integrierbar sind und es gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \hat{g}(x)\, dx.$$

Abgabe: Sonntag, 7. Februar 2021, 18 Uhr via „urm“ an Ihren Tutor