Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose

WiSe 2020/21
07.02.2021
Blatt 14

Übungen zur Integrations- und Maßtheorie

Aufgabe 49. **(a)** Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}_+$, $y = f(x)$, stetig differenzierbar und $M \subseteq \mathbb{R}^3$ der Rotatioskörper, der entsteht, wenn man den Graphen von f um die x-Achse rotieren lässt,

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; y^2 + z^2 = f(x)^2\}.$$

Begründen Sie, dass $M \subseteq \mathbb{R}^3$ Borelsch und ihr Flächeninhalt gegeben ist durch

$$\mathcal{H}^2(M) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

(b) Sei $K \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Kreiskegel mit einem Grundflächenradius $r > 0$ und einer Mantellinienlänge $s > 0$. Zeigen Sie dass der Oberflächeninhalt von K (ohne Grundfläche) gegeben ist durch

$$\mathcal{H}^2(K) = \pi r s.$$

Aufgabe 50. **(a)** Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Gebiet ($n \in \mathbb{N}$) und $f\colon G \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Sei weiter $B \subseteq G$ Borelsch und $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ der Graph von $f|B$,

$$\Gamma = \{(x,y) \in B \times \mathbb{R} : \; y = f(x)\}.$$

Begründen Sie, warum auch $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ Borelsch ist und für seinen n-dimensionalen Flächeninhalt gilt:

$$\mathcal{H}^n(\Gamma) = \int_B \sqrt{1 + \|\mathrm{grad}(f)(x)\|^2}\, dx.$$

(Hinweis: Für Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}(n,s)$ (mit $1 \leq s \leq n$) gilt:

$$\det(A^T \cdot B) = \sum_{i_1 < \cdots < i_s} \det(A_{i_1 \ldots i_s}) \det(B_{i_1 \ldots i_s}),$$

wo $A_{i_1 \ldots i_s}$ die $s \times s$-Matrix ist, die aus den Zeilen $i_1, \ldots, i_s$ von A besteht.)

(b) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ *das hyperbolische Paraboloid*,

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; z = x^2 - y^2\},$$

und $R > 0$. Berechnen Sie den Flächeninhalt von $M \cap (B_R^2(0) \times \mathbb{R})$, wo $B_R^2(0) \subseteq \mathbb{R}^2$ die Kreisscheibe vom Radius R mit Mittelpunkt 0 in $\mathbb{R}^2$ bezeichnet.

Aufgabe 51. (a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\psi : \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^{n-1}$ ($N = (0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{S}^{n-1}$ *der Nordpol*) die so genannte *stereographische Projektion*, d.h.: Die Gerade, die durch N und $x \in \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{N\}$ geht, schneidet die Hyperebne $E = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = -1\}$ im Punkt $(\psi(x), -1)$. Begründen Sie, dass ψ bijektiv und $\varphi := \psi^{-1} : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{N\} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine reguläre Parametrisierung ist.

(b) (Zwiebelsatz) Sei $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ messbar und $S^{n-1}(r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = r\}$ für $r > 0$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}_+} \Big(\int_{S^{n-1}(r)} f(x)\, d\mathcal{H}^{n-1}(x) \Big)\, dr.$$

(Hinweis: Zeigen Sie, dass mit (dem Inversen) der stereographischen Projektion $\varphi : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{N\}$ die Abbildung $\Phi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$, $(r, x) \mapsto r\varphi(x)$, ein Diffeomorphismus auf sein Bild ist, und verwenden Sie, dann Transformations- und Flächenformel sowie Tonelli.)

Aufgabe 52. (a) Wir wissen schon, dass das Volumen der Kugel $B^3(r) \subseteq \mathbb{R}^3$ gerade $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ und der Oberflächeninhalt von $S^2(r) \subseteq \mathbb{R}^3$ gerade $A(r) = 4\pi r^2$ ist ($r \in \mathbb{R}_+$). Können Sie mit Hilfe von Aufgabe 51 erklären, dass nicht zufällig gilt:

$$A(r) = V'(r)$$

(b) Sei $\omega_n = \lambda(\mathbb{B}^n)$ und $\tau_{n-1} = \mathcal{H}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$ (für $n \in \mathbb{N}$). Zeigen Sie:

$$\tau_{n-1} = n\omega_n.$$

Abgabe: Sonntag, 14. Februar 2021, 18 Uhr via „urm“ an Ihren Tutor