Universität Tübingen WiSe 2020/21
Fachbereich Mathematik 14.02.2021
Prof. Dr. Frank Loose Blatt 15

Übungen zur Integrations- und Maßtheorie

Aufgabe 53. **(a)** Sei
$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 - y^2 - z^2 = 1\}$$
das 2-schalige Hyperboloid. Zeigen Sie, dass M eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass der Kegel
$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$$
keine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist. (Hinweis: Überlegen Sie, warum eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ lokal wegzusammenhängend ist.)

Aufgabe 54. **(a)** Wir betrachten für jedes $n \in \mathbb{N}$ *die orthogonale Gruppe*
$$\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathrm{Mat}_n\mathbb{R} : \ A^TA = \mathbf{1}_n\} \subseteq \mathrm{Mat}_n\mathbb{R} = \mathbb{R}^{n^2}.$$

(a) Sei $F\colon \mathrm{Mat}_n\mathbb{R} \to \mathrm{Sym}_n\mathbb{R}$, $A \mapsto A^TA - \mathbf{1}$, wo $\mathrm{Sym}_n\mathbb{R}$ den Unterraum aller symmetrischen Matrizen in $\mathrm{Mat}_n\mathbb{R}$ bezeichnet. Begründen Sie, warum F stetig differenzierbar ist und zeigen Sie dann, dass das Differential $DF_A\colon \mathrm{Mat}_n\mathbb{R} \to \mathrm{Sym}_n\mathbb{R}$ von F in $A \in \mathrm{Mat}_n\mathbb{R}$ gegeben ist durch
$$DF_A(B) = A^TB + B^TA.$$

(b) Zeigen Sie nun, dass DF_A für jedes $A \in \mathrm{O}(n)$ surjektiv ist und schließen Sie daraus, dass $\mathrm{O}(n)$ eine $\frac{1}{2}n(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathrm{Mat}_n\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 55. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}_+$. Zeigen Sie, dass *das Ellipsoid*
$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$$
ein Kompaktum mit glattem Rand in $\mathbb{R}^3$ ist und berechnen Sie das äußere Einheitsnormalenfeld $\nu\colon \partial E \to \mathbb{R}^3$ von E.

Aufgabe 56. Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand in $\mathbb{R}^n$ und $\nu\colon \partial K \to \mathbb{R}^n$ ihr äußeres Einheitsnormalenfeld. Für eine stetig differenzierbare Funktion $f\colon K \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^1(K)$, defniert man *die Normalenableitung von f in $x \in \partial K$* durch
$$D_\nu f(x) := \langle \mathrm{grad}(f)(x), \nu(x)\rangle.$$

Zeigen Sie:

(a) (1. Greensche Formel) Ist $f \in \mathcal{C}^1(K)$ und $g \in \mathcal{C}^2(K)$, so gilt:

$$\int_K \langle \mathrm{grad}(f), \mathrm{grad}(g) \rangle + f \triangle g)\, d\lambda = \int_{\partial K} f D_\nu g \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

(b) (2. Greensche Formel) Sind $f, g \in \mathcal{C}^2(K)$, so gilt:

$$\int_K (f \triangle g - g \triangle f)\, d\lambda = \int_{\partial K} (f D_\nu g - g D_\nu f)\, d\mathcal{H}^{n-1}$$

Abgabe: Sonntag, 21. Februar 2021, 18 Uhr via „urm“ an Ihren Tutor