Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose

WiSe 2020/21
21.02.2021
Blatt 16

Übungen zur Integrations- und Maßtheorie

Aufgabe 57. (a) Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) ein Kompaktum mit glattem Rand und $\nu\colon \partial K \to \mathbb{R}^n$ ihr äußeres Einheitsnormalenfeld. Zeigen Sie:

$$\lambda^n(K) = \frac{1}{n} \int_{\partial K} \langle x, \nu(x) \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}(x).$$

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von (a) erneut (vgl. Aufgabe 52.b) für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\tau_{n-1} = n\omega_n.$$

Aufgabe 58. (a) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet ($n \in \mathbb{N}$) und $X\colon G \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Für jedes $x \in G$ und $\delta > 0$ betrachten wir den Ball $B_\delta(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \leq \delta\}$, so fern er in G liegt, und sein äußeres Einheitsnomalenfeld $\nu\colon \partial B_\delta(x) \to \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass für alle $x \in G$ gilt:

$$\operatorname{div}(X)(x) = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\omega_n \delta^n} \int_{\partial B_\delta(x)} \langle X, \nu \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

(b) In der *Elektrostatik* wird die in einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^3$ vorhandene *Ladung* Q durch eine *Ladungsdichte* $\rho\colon G \to \mathbb{R}$ beschrieben, d.h.: In jedem Kompaktum $K \subseteq G$ befindet sich die Ladung $Q(K) := \int_K \rho \, d\lambda$. *Das* 1. *Maxwellsche Gesetz* (in seiner integrierten Form) besagt nun, dass sich aufgrund der Ladung Q *ein elektrisches Feld* $E\colon G \to \mathbb{R}^3$ einstellt, so dass für jedes Kompaktum mit glattem Rand $K \subseteq G$ gilt: *Der Fluss von* E *aus* K *heraus*, d.i. *das Flussintegral* $\int_{\partial K} \langle E, \nu \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}$, ist gleich der Ladung in K,

$$Q(K) = \int_{\partial K} \langle E, \nu \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

(*Ladung als Quelle des elektrischen Feldes*). Zeigen Sie, dass dann (bei stetigem ρ und stetig differenzierbarem E) gilt:

$$\operatorname{div}(E) = \rho$$

(so genannte differentielle Form des 1. Maxwell-Gesetzes) und umgekehrt, dass aus der differentiellen Form auch das 1. Maxwell-Gesetz in seiner integrierten Form folgt.

Abgabe: Sonntag, 28. Februar 2021, 18 Uhr via „urm“ an Ihren Tutor, aber nur, wenn Sie die Punkte noch brauchen