Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose

WiSe 2020/21
09.11.2020
Blatt 02

Übungen zur Integrations- und Maßtheorie

Aufgabe 05. Sei X eine Menge sowie $A, B \in \mathfrak{P}(X)$ und $\mathfrak{M} := \{A, B\} \subseteq \mathfrak{P}(X)$.

(a) Sei mindestens eine von den vier Mengen $A \cap B$, $A \cap B^c$, $A^c \cap B$, $A^c \cap B^c$ leer. Zeigen Sie, dass dann das von $\mathfrak{M}$ erzeugte Dynkin-System $\mathfrak{D}$ mit der von $\mathfrak{M}$ erzeugten σ-Algebra $\mathfrak{A}$ übereinstimmt, $\mathfrak{D} = \mathfrak{A}$. (Hinweis: Suchen Sie einen durchschnittsstabilen Erzeuger für $\mathfrak{D}$.)

(b) Seien nun die Mengen $A \cap B$, $A \cap B^c$, $A^c \cap B$ und $A^c \cap B^c$ allesamt nicht-leer. Zeigen Sie, dass dann das von $\mathfrak{M}$ erzeugte Dynkin-System $\mathfrak{D}$ nicht mit der von $\mathfrak{M}$ erzeugten σ-Algebra $\mathfrak{A}$ übereinstimmt, $\mathfrak{D} \neq \mathfrak{A}$. (Hinweis: $\mathfrak{D}$ ist sehr klein.)

(c) Geben Sie ein Dynkin-System an, welches keine σ-Algebra ist.

Aufgabe 06. Sei X eine Menge und $\mathfrak{P}(X)$ versehen mit ihrer Ringstruktur aus Aufgabe 01. Zeigen Sie: Eine Teilmenge $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ ist genau dann einen Mengenring, wenn sie ein (algebraischer) Unterring von $\mathfrak{P}(X)$ ist.

Ein Maßraum $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ heißt*vollständig*, falls für jedes $M \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(M) = 0$ auch alle Teilmengen $N \subseteq M$ in $\mathfrak{A}$ liegen.

Aufgabe 07. Sei $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum. Wir setzen $\mathfrak{N} := \{N \in \mathfrak{P}(X) : \text{es gibt ein } M \in \mathfrak{A} \text{ mit } N \subseteq M \text{ und } \mu(M) = 0\}$ sowie $\hat{\mathfrak{A}} := \{A \cup N : A \in \mathfrak{A} \text{ und } N \in \mathfrak{N}\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\hat{\mathfrak{A}}$ eine σ-Algebra mit $\mathfrak{A} \subseteq \hat{\mathfrak{A}}$ ist.

(b) Definiere $\hat{\mu}: \hat{\mathfrak{A}} \to [0, \infty]$ durch $\hat{\mu}(A \cup N) := \mu(A)$. Zeigen Sie, dass $\hat{\mu}$ ein wohldefiniertes Maß auf $(X, \hat{\mathfrak{A}})$ mit $\hat{\mu}|\mathfrak{A} = \mu$ ist, und dass $(X, \hat{\mathfrak{A}}, \hat{\mu})$ vollständig ist. ($(X, \hat{\mathfrak{A}}, \hat{\mu})$ heißt *die Vervollständigung von* $(X, \mathfrak{A}, \mu)$.)

Aufgabe 08. Sei X eine Menge und $\nu: \mathfrak{P}(X) \to [0, \infty]$ ein äußeres Maß auf X. Sei weiter $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ die σ-Algebra der ν-messbaren Mengen und $\mu := \nu|\mathfrak{A}$.

(a) Zeigen Sie, dass $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ vollständig ist.

(b) Sei $\mu^*: \mathfrak{P}(X) \to [0, \infty]$ das von μ induzierte äußere Maß nach Caratheodory. Zeigen Sie, dass i.A. $\mu^* = \nu$ nicht gilt. (Hinweis: Versuchen Sie es mal mit einem geschickten äußeren Maß ν auf der Menge $X = \{0, 1\}$.)

Abgabe: Sonntag, 15. November 2020, 18 Uhr via „urm“ an Ihren Tutor