Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose

WiSe 2020/21
13.12.2020
Blatt 07

Übungen zur Integrations- und Maßtheorie

Aufgabe 25. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Zeigen Sie:

(a) Ist $f''(x) \leq 0$, für alle $x \in I$, so ist f konkav.

(b) Ist f konkav, so ist $f''(x) \leq 0$, für alle $x \in I$.

(Hinweis: Zu (a): Ist $x_1 < x_2$ und $x = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$ mit $\lambda \in (0,1)$, so wende man den Mittelwertsatz auf $f|[x_1, x]$ und $f|[x, x_2]$ an. Zu (b): Sei $f''(x_0) > 0$ (für ein $x_0 \in I$). Betrachten Sie dann die Hilfsfunktion $I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) - f'(x_0)(x - x_0)$.)

Aufgabe 26. Wir betrachten die Funktion $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, die durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{für } x > 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

gegeben ist.

(a) Sei $g\colon [1,\infty) \to [0,\infty)$ uneigentlich Riemann-integrierbar und $h\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $|h| \leq g$ und so, dass $h|[1,a]$ für alle $a \in (1,\infty)$ Riemann-integrierbar ist. Zeigen Sie, dass h dann auch uneigentlich Riemann-integrierbar ist. (Hinweis: Aufgabe 24 und der Satz von Lebesgue)

(b) Zeigen Sie nun mit Hilfe von Teil (a), dass f uneigentlich Riemann-integrierbar ist. (Hinweis: Machen Sie, bevor Sie (a) anwenden, noch eine partielle Integration.)

(c) Zeigen Sie schließlich, dass f nicht Lebesgue-integrierbar ist. (Hinweis: Integrieren Sie $|f|$ jeweils von $k\pi$ bis $(k+1)\pi$ (für $k \in \mathbb{N}$) und schätzen Sie dann $\int |f|\, d\lambda$ nach unten durch die harmonische Reihe ab.)

Aufgabe 27. Sei $X = \mathbb{N}$, $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge nicht-negativer Zahlen und $\mu_\alpha\colon \mathfrak{P}(\mathbb{N}) \to [0,\infty]$ das Maß auf der vollen Potenzalgebra von X, welches $\mu_\alpha(\{n\}) = \alpha_n$ (für alle $n \in \mathbb{N}$) erfüllt (siehe Aufgabe 02).

(a) Zeigen Sie, dass jede Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (also eine reelle Zahlenfolge (x_n), wenn $x_n = f(n)$ notiert wird) messbar ist und für nicht negatives $f = (x_n)$ (also $x_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$) gilt:

$$\int f\, d\mu_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n.$$

(b) Sei nun $\alpha_n = \frac{1}{n^3}$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $f = (x_n)$ mit $x_n = n$ zwar μ_α-integrierbar ist, aber $f^2 = (x_n^2)$ nicht μ_α-integrierbar ist.

Aufgabe 28. Sei (X, μ) ein Maßraum. Eine messbare Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ heißt *wesentlich beschränkt*, wenn es ein $c > 0$ gibt, so dass $\{x \in X : |f(x)| > c\} =: \{|f| > c\}$ eine Nullmenge ist. Man setzt dann

$$\|f\|_\infty := \inf\{c \geq 0 : \ \mu(\{|f| > c\}) = 0\} \in [0, \infty).$$

(a) Sei $\mathfrak{L}^\infty(\mu)$ die Menge aller wesentlich beschränkten Funktionen auf X. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{L}^\infty(\mu)$ eine Untervektorraum aller (messbaren) Funktionen auf X ist.

(b) Sei $\mathfrak{N}(\mu)$ der Unterraum aller messbaren Funktionen, die fast-überall gleich Null sind. Dann ist $\mathfrak{N}(\mu) \subseteq \mathfrak{L}^\infty(\mu)$ und man setzt $L^\infty(\mu) := \mathfrak{L}^\infty(\mu)/\mathfrak{N}(\mu)$. Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|\colon L^\infty(\mu) \to [0, \infty)$, $[f] \mapsto \|f\|_\infty$ wohldefiniert und eine Norm auf $L^\infty(\mu)$ ist. (Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\{|f| > \|f\|_\infty\}$ eine Nullmenge ist.)

Abgabe: Sonntag, 20. Dezember 2020, 18 Uhr via „urm“ an Ihren Tutor