Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

Prof. Dr. Frank Loose
Jonathan Walz

WS 2020/21
05.03.2021
Klausur

# Klausur zu „Integrations- und Maßtheorie“

**Name, Vorname:**

**Geburtsdatum:**

**Matrikelnummer:**

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| maximale Punkte | 4+4 | 4+4 | 4+4 | 8 | 4+4 | 8 | 48 |
| erzielte Punkte | | | | | | | |

**Hinweise:**

- Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.
- Schreiben Sie auf jedes Blatt die Aufgabennummer und Ihre Matrikelnummer.
- Verwenden Sie **keinen** Bleistift.

**Aufgabe 1:**

(a) Geben Sie die Definition einer $\sigma$-Algebra auf einer Menge $X$.

(b) Sei $X$ eine Menge. Zeigen Sie, dass

$$\mathfrak{A} := \{A \in \mathcal{P}(X) : A \text{ ist abzählbar oder } A^c \text{ ist abzählbar}\}$$

eine $\sigma$-Algebra auf $X$ ist. Hierbei soll eine Menge $A \subseteq X$ abzählbar heißen, wenn $A$ endlich oder abzählbar unendlich ist.

**Aufgabe 2:** Sei $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum.

(a) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nicht-negativer, messbarer Funktionen, $f_n : X \to [0, \infty]$. Zeigen Sie:

$$\int\limits_X (\sum_{n=1}^{\infty} f_n)\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_X f_n\, d\mu$$

(b) Sei $f : X \to \mathbb{R}$ integrierbar und $A \in \mathcal{A}$ und ferner $A_n \in \mathcal{A}$ $(n \in \mathbb{N})$ eine Familie disjunkter Teilmengen von $A$ mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A$. Zeigen Sie:

$$\int\limits_A f\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_n} f\, d\mu.$$

**Aufgabe 3:**

(a) Formulieren Sie das Prinzip von Cavalieri, wahlweise für Kompakta im $\mathbb{R}^3$ oder in einer allgemeineren Version.

(b) Es seien die Zylinder $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq 1,\ -1 \leq x \leq 1\}$$

und

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1\}.$$

Betrachten Sie $M := A \cap B$ und bestimmen Sie das Volumen $\lambda^3(M)$ von $M$.

**Aufgabe 4:** Sei

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2,\ z \geq 0\}.$$

Berechnen Sie das Volumen $\lambda^3(P)$ des Kugelsektors $P = \mathbb{B}^3 \cap K \subseteq \mathbb{R}^3$.

**Aufgabe 5:**

(a) Betrachten Sie die folgende injektive Abbildung $\Phi : (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}^3$ welche gegeben sei durch $(\varphi, \vartheta) \mapsto (\cos\varphi\cos\vartheta, \sin\varphi\cos\vartheta, \sin\vartheta)$. Bestimmen Sie das Bild von $\Phi$ und begründen Sie, dass das Komplement des Bildes in $\mathbb{S}^2$ eine Nullmenge bezüglich des zweidimensionalen Hausdorffmaßes $\mathcal{H}^2$ ist.

(b) Betrachten Sie zu $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ die Menge

$$M_\alpha := \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : \ |z| \leq \sin\alpha\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Bestimmen Sie jenen Winkel $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, für welchen

$$\mathcal{H}^2(M_\alpha) = \frac{1}{2}\mathcal{H}^2(\mathbb{S}^2)$$

gilt.

**Aufgabe 6:** Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x^3 - xy^2, y^3 - x^2y + 3x)$. Berechnen Sie

$$\int_{\mathbb{S}^1} \langle f, \nu \rangle \, d\mathcal{H}^1,$$

wobei $\nu$ das äußere Normalenfeld an $\mathbb{S}^1$ sei.