Script
zur
Vorlesung

Mathematik für Physiker IV
– Integralrechnung –

Prof. Dr. Frank Loose SS 2005
Eberhard-Karls-Universität Tübingen

Florian Jessen
Jessen@pit.physik.uni-tuebingen.de

14. März 2009

Made with $\LaTeX2\varepsilon$

Vorwort

Da offenbar unter den Hörern der Vorlesung der Wunsch nach einem ordentlichen Script besteht, möchte ich hiermit an das vergangene Semester anknüpfen und dieses Script während der Vorlesung „Mathematik für Physiker IV“ des laufenden Semesters (SS2005) erstellen. Es wird dabei nicht garantiert, dass sich keine Fehler, sowohl in Formeln, als auch in den Formulierungen von Definitionen, Sätzen oder auch Beweisen einschleichen. Der Leser sollte daher entsprechend kritisch damit umgehen und gefundene Fehler weitergeben, damit diese korrigiert werden können.

In der Mathematik unterscheiden sich die verwendeten Symbole zum Teil grundlegend von der Physik, so zum Beispiel die komplexe Konjugation, Adjungtion oder auch die Schreibweise des Skalarproduktes (Dirac-Notation in der Quanten-Mechanik! $\langle f,g\rangle = \int \overline{f}g \; d\mu \equiv \int \Psi^\dagger \Phi \; dx = \langle \Psi|\Phi\rangle$). In diesem Script wurde die Notation aus der Physik übernommen. Als gleichwertig für die Transposition sind zu werten ${}^TA$, A^T, A^t. Die Wahl der Notation wird so gewählt, dass Fehlinterpretationen vermieden werden.

Wer die schönen Bilder aus der Vorlesung vermissen sollte, ist hiermit aufgerufen diese in digitaler Form (png, eps, o.ä.) zu erstellen, damit diese integriert werden können. Gleiches gilt für anderweitige Mitarbeit am Gesamtwerk. Kenntnisse im Umgang mit $\LaTeX 2\varepsilon$ sind dabei hilfreich. Vorschläge zum Script des 3. Semester werden weiterhin eingearbeitet. Verweise auf Sätze und Definitionen aus anderen Scripten der Serie, die hier ebenfalls für die Beweise verwendet werden, sind mit MfPh... markiert.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Maße

12.04.2005

Motivation

Ordne möglichst vielen Teilmengen $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine *Maßzahl* $\mu(A) \in [0, \infty]$ zu, ihren *Flächeninhalt* (ihr *Volumen*). Eigenschaften der *messbaren Mengen* $A \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ und des Maßes $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ sollten (mindestens) sein:

1. Sind A und $B \in \mathcal{A}$ mit $A \cap B = \emptyset$, so ist $A \cup B \in \mathcal{A}$ und es ist

   $$\mu(A \dot{\cup} B) = \mu(A) + \mu(B) \ .$$

   Wir schreiben $A \dot{\cup} B$ für $A \cup B$, wenn zusätzlich $A \cap B = \emptyset$ ist: *disjunkte Mengen*.

2. Besser noch wäre:
   Sind $A_k \in \mathcal{A}$ für $k \in \mathbb{N}$ mit $A_k \cap A_l = \emptyset$ für $k \neq l$, so ist

   $$\dot{\bigcup}_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{A}$$

   und es ist

   $$\mu\left(\dot{\bigcup}_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k) \ .$$

   Wir vereinbaren dazu $c + \infty = \infty \ \forall c \in [0, \infty]$. Vorsicht bei $\infty - \infty$: Ist nicht definiert! Auch soll für Summen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nicht-negativer reeller Zahlen $a_k \geq 0$ der uneigentliche Grenzwert ∞ zulässig sein (welcher sich sofort einstellt, wenn $a_k = \infty$ für ein $k \in \mathbb{N}$ ist).

1.1 σ-Algebren

Definition 1.1.
Sei X eine Menge. Eine Teilmenge $\mathcal{A}$ der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$, heißt eine *$\sigma$-Algebra auf X*, wenn gilt

(a) $X \in \mathcal{A}$;

(b) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c := X \backslash A = \{x \in X | x \notin A\} \in \mathcal{A}$;

(c) $A_k \in \mathcal{A}, k \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{A}$.

1.1.1 Beispiel

Sei X eine Menge.

(1) Dann ist $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$ (die kleinste) σ-Algebra auf X.

(2) $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ ist (die größte) σ-Algebra auf X.

(3) $\mathcal{A} = \{M \in \mathcal{P}(X) | M \text{ abzählbar oder } M^c \text{ abzählbar}\}$ ist eine σ-Algebra auf X.

1.1.2 Bemerkung

Für jede σ-Algebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ gilt:

(1) $\emptyset \in \mathcal{A}$;

(2) $A_k \in \mathcal{A}, k \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{A}$.

(3) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow B \backslash A := \{x \in B | x \notin A\} \in \mathcal{A}$;

¡? Beweis ¿!

(1) $\emptyset = X^c$

(2) $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k = \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k^c\right)^c$

(3) $B \backslash A = B \cap A^c$

QED$\blacksquare$

Unmittelbar aus der Definition ist folgendes klar: Ist $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ Familie von σ-Algebren auf X, $\mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{P}(X)$ $(i \in I)$, so ist auch

$$\mathcal{A} := \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{P}(X)$$

eine σ-Algebra.

Definition 1.2.
Sei X eine Menge und $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine beliebige Teilmenge. Man nennt

$$\mathcal{A} := \bigcap \left\{ \mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X) \middle| \mathcal{B} \ \sigma\text{-Algebra und } \mathcal{B} \supseteq \mathcal{M} \right\}$$

die von $\mathcal{M}$ erzeugte σ-Algeba. Es heißt dann $\mathcal{M}$ ein *Erzeugendensystem* für $\mathcal{A}$.

1.1.3 Kommentar

(1) Es ist dann also $\mathcal{A}$ die kleinste σ-Algebra von X, die $\mathcal{M}$ enthält.

(2) Erzeugendensysteme können erheblich kleiner sein als ihr Erzeugnis, z.B. ist $\mathcal{M} = \{\{x\} \in \mathcal{P}(X) | x \in X\}$ ein Erzeuger für $\mathcal{A} = \{M \in \mathcal{P}(X) | M \text{ abzählbar oder } M^c \text{ abzählbar}\}$.

Definition 1.3.
Sei $n \geq 1$ und $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ die Familie aller offenen Mengen im $\mathbb{R}^n$. Die von $\mathcal{U}$ erzeugte σ-Algebra $\mathcal{B}$ heißt die *σ-Algebra der Borel-Mengen* (oder *Borel-Algebra*) auf $\mathbb{R}^n$.

Definition 1.4.
$Q \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt ein *Quader*, wenn es $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n \in \mathbb{R}$ gibt mit $a_j \leq b_j$ $(j = 1, \ldots, n)$, so dass

$$Q := \{x \in \mathbb{R}^n | a_j \underset{(-)}{<} x_j \underset{(-)}{<} b_j,\ j = 1, \ldots, n\}$$

wobei sowohl abgeschlossene, offene und halboffene Quader zulässig sind.

1.1.4 Bemerkung

Bezeichne $\mathcal{Q} = \{Q \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) | Q \text{ ein Quader}\}$. Dann ist die Borel-Algebra $\mathcal{B}$ auf $\mathbb{R}^n$ bereits von $\mathcal{Q}$ erzeugt.

¡? Beweis ¿!

Jede offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist abzählbare Vereinigung von Quadern, z.B. solche mit rationalen Eckpunkten $a_j, b_j \in \mathbb{Q}$ $(j = 1, \ldots, n)$. Das Erzeugnis $\mathcal{A}$ von $\mathcal{Q}$ erfüllt also: $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{A} \supseteq \mathcal{B}$ nach Definition der Borel-Algebra $\mathcal{B}$. Weil $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{B}$ ist, ist trivialerweise $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. Also ist $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.
QED■ 14.04.2005

Definition 1.5.
Sei X eine Menge und $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X. Eine Funktion $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ heißt ein *Maß* auf $(X, \mathcal{A})$, wenn gilt:

(a) $\mu(\emptyset) = 0$;

(b) sind $A_k \in \mathcal{A}$, $k \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt, $A_k \cap A_l = \emptyset\ \forall k \neq l$, so ist

$$\mu\left(\dot{\bigcup}_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k) \quad (\sigma\text{-Additivität})$$

Es heißen dann die Elemente $A \in \mathcal{A}$ die *messbaren Mengen*, das Tripel $(X, \mathcal{A}, \mu)$ heißt ein *Maßraum*, und $\mu(A)$ das *Maß* von A, für $A \in \mathcal{A}$.

1.1.5 Kommentar

Ein Maß μ auf $\mathcal{A}$ ist insbesondere *additiv*, d.h. ist $n \in \mathbb{N}$ und $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt, so ist $\mu(A_1 \dot{\cup} A_2 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} A_n) = \mu(A_1) + \cdots + \mu(A_n)$. Wähle nämlich $A_k := \emptyset$ für $k > n$ und wende die σ-Additivität an.

1.1.6 Beispiel

Sei X eine abzählbare Menge und $\varphi : X \to [0, \infty]$ eine (Gewichts-) Funktion. Definiert man auf $\mathcal{A} := \mathcal{P}(X)$

$$\mu(A) := \sum_{x \in A} \varphi(x) \ ,$$

so ist μ ein Maß auf $\mathcal{A}$. (Vereinbarung: Die „leere Summe“ sei definiert durch $\sum_\emptyset := 0$ das „leere Produkt“ durch $\Pi_\emptyset := 1$.)
Spezialfälle sind

- $\varphi(x) = 1\ \forall x \in X$: μ heißt dann das Anzahlmaß auf $(X, \mathcal{P})$;
- Sei $x_0 \in X$ fest. Definiert man dann

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x = x_0 \text{ ist,} \\ 0 & \text{wenn } x \neq x_0 \text{ ist,} \end{cases}$$

  so spricht man vom *Dirac-Maß* im Punkt $x_0 \in X$.

1.1.7 Bemerkungen/Rechenregeln

Für einen Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ gilt:

(I) Ist $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \subseteq B$, so ist

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \backslash A) \ ,$$

insbesondere ist

$$\mu(A) \leq \mu(B) \quad \text{(Monotonie)}$$

(II) Für alle $A, B \in \mathcal{A}$ ist

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B) \ .$$

(III) Sind $A_k \in \mathcal{A} \ \ k \in \mathbb{N}$ und ist $A_k \subseteq A_l$ für $k \leq l$, so gilt für $A := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ die *Ausschöpfungsformel*:

$$\mu(A) = \lim_{k \longrightarrow \infty} \mu(A_k) \ .$$

Dabei heißt (A_k) eine *Ausschöpfung* von A.

(IV) Sind $A_k \in \mathcal{A} \ \ k \in \mathbb{N}$ und $A \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$, so ist

$$\mu(A) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k) \ .$$

¡? Beweis ¿!

(I) $B = A \,\dot{\cup}\, (B \backslash A) \overset{\text{Additivität}}{\Rightarrow} \mu(B) = \mu(A) + \mu(B \backslash A)$ und weil $\mu(B \backslash A) \geq 0$ ist, folgt: $\mu(B) \geq \mu(A)$.

(II) Aus $A \cup B = A \,\dot{\cup}\, (B \backslash A)$ und $B = (B \backslash A) \,\dot{\cup}\, (A \cap B)$ folgt

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) \overset{\text{Add. von } \mu}{=} \mu(A) + \underbrace{\mu(B \backslash A) + \mu(A \cap B)}_{= \mu(B)} = \mu(A) + \mu(B) \ .$$

(III) Setze $B_1 := A_1, B_{k+1} := A_{k+1} \backslash A_k \ \ (k \geq 1) \Rightarrow A_k = B_1 \,\dot{\cup}\, B_2 \,\dot{\cup}\, \ldots \,\dot{\cup}\, B_k \Rightarrow A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k = \dot{\bigcup}_{k \in \mathbb{N}} B_k$. Dann ist

$$\mu(A) \overset{\sigma\text{-Add.}}{=} \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(B_k) = \lim_{k \longrightarrow \infty} \underbrace{\sum_{l=1}^{k} \mu(B_l)}_{\overset{Add. von \mu}{=} \mu(A_k)} = \lim_{k \longrightarrow \infty} \mu(A_k) \ .$$

(IV) Wegen der Monotonie (Teil 1.1.7(I)) darf man annehmen, dass $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$. (Sonst $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (A_k \cap A) \Rightarrow \mu(A) \leq \sum \mu(A_k \cap A) \leq \sum \mu(A_k)$). Setze wieder: $B_1 := A_1$, $B_{k+1} := A_{k+1} \backslash A_k \ \ (k \geq 1) \Rightarrow A = \dot{\bigcup}_{k \in \mathbb{N}} B_k$, $B_k \subseteq A_k$, also (wegen 1.1.7(I))

$$\mu(A) \overset{\substack{\sigma-\text{Add.} \\ \text{von}\mu}}{=} \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(B_k) \overset{1.1.7(I)}{\leq} \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k) \ .$$

QED$\blacksquare$

1.2 Dynkin-Systeme

Definition 1.6.
Sei X eine Menge. Es heißt $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein *Dynkin-System*, wenn gilt

(a) $X \in \mathcal{D}$;

(b) $A \in \mathcal{D} \;\Rightarrow\; A^c \in \mathcal{D}$;

(c) $A_k \in \mathcal{D}\ ,\ k \in \mathbb{N}\ ,\ A_k \cap A_l = \emptyset \ \ \forall k \neq l$,

$$\dot{\bigcup}_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{D}\ .$$

1.2.1 Kommentar

(1) Jede σ-Algebra $\mathcal{A}$ ist offenbar ein Dynkin-System.

(2) Ist $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System, und ist $A, B \in \mathcal{D}$ mit $A \subseteq B$, so ist $B \backslash A = B \cap A^c = (B^c \cup A)^c = (B^c \,\dot\cup\, A)^c \in \mathcal{D}$.

(3) Ist $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System und zudem *durchschnittsstabil*, d.h. mit $A, B \in \mathcal{D}$ ist auch $A \cap B \in \mathcal{D}$, so ist $\mathcal{D}$ auch eine σ-Algebra. Sei nämlich $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\ ,\ A_k \in \mathcal{D}$. Setze $B_1 = A_1$, $B_{k+1} = A_{k+1} \cap A_1^c \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k^c$ $(k \geq 1)$. Dann folgt $A = \dot{\bigcup}_{k\in\mathbb{N}} B_k$ und $B_k \in \mathcal{D}$, also $A \in \mathcal{D}$.

(4) Beliebige Durchschnitte von Dynkin-Systemen sind offenbar wieder Dynkin-Systeme. Deshalb *erzeugt* jede Teilmenge $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein Dynkin-System, nämlich das kleinste welches $\mathcal{M}$ enthält.

$$\mathcal{D} = \bigcap \{\tilde{\mathcal{D}} \subseteq \mathcal{P}(X) | \tilde{\mathcal{D}} \text{ ist Dynkin und } \tilde{\mathcal{D}} \supseteq \mathcal{M}\}\ .$$

Lemma 1.7.
Sei X eine Menge und $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ durchschnittsstabil. Dann stimmen die von $\mathcal{M}$ erzeugte σ-Algebra $\mathcal{A}$ und das von $\mathcal{M}$ erzeugte Dynkin-System $\mathcal{D}$ überein, $\mathcal{A} = \mathcal{D}$.

¡? Beweis ¿!

Weil $\mathcal{A}$ insbesondere Dynkin-System ist folgt, dass $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{D}$. Zeige: $\mathcal{D}$ ist durchschnittsstabil (denn dann folgt, dass $\mathcal{D}$ auch σ-Algebra ist, also $\mathcal{D} \supseteq \mathcal{A}$). Setze für jedes $\mathcal{B} \in \mathcal{D}$

$$\mathcal{D}_B := \{A \in \mathcal{D} | A \cap B \in \mathcal{D}\} \subseteq \mathcal{D}\ .$$

Zeige nun $\mathcal{D}_B = \mathcal{D} \ \ \forall\, B \in \mathcal{D}$. (Dann ist $\mathcal{D}$ durchschnittsstabil.)

Behauptung:

$\mathcal{D}_B$ ist selbst ein Dynkn-System, denn

1. aus $A \in \mathcal{D}_B$ folgt $A^c \cap B = B \backslash (A \cap B) \in \mathcal{D}$, also $A^c \in \mathcal{D}_B$;
2. es ist $\left(\dot{\bigcup} A_k\right) \cap B = \dot{\bigcup}\, \underbrace{(A_k \cap B)}_{\in\mathcal{D}} \in \mathcal{D}_B$, wenn $A_k \in \mathcal{D}_B$ ist. Also gilt $\dot{\bigcup} A_k \in \mathcal{D}_B$.

Ist $B = M \in \mathcal{M} \ \Rightarrow \mathcal{M} \subseteq \mathcal{D}_M$ (weil $\mathcal{M}$ durchschnittsstabil ist). Daher ist $\mathcal{D}_M = \mathcal{D}$ (weil $\mathcal{D}_M$ Dynkin ist mit $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{D}_M$ und $\mathcal{D}$ das kleinste Dynkin-System, welches $\mathcal{M}$ enthält). Ist nun $B \in \mathcal{D}$ beliebig, so ist also für $M \in \mathcal{M}$ stets:

$$M \cap B = B \cap M \in \mathcal{D} = \mathcal{D}_M \ \Rightarrow\ \mathcal{M} \subseteq \mathcal{D}_B\ .$$

Also $\mathcal{D}_B = \mathcal{D} \ \ \forall B \in \mathcal{D}$.

QED■

19.04.2005

1.3 Eindeutigkeit des Maßes

Satz 1.8. Eindeutigkeitssatz
Sei X eine Menge, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X und $\mathcal{M}$ ein durchschittsstabiles Erzeugendensystem für $\mathcal{A}$. Weiterhin gebe es $M_k \in \mathcal{M}$, $k \in \mathbb{N}$ – mit $M_k \subseteq M_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$ – und $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} M_k = X$. Sind nun $\mu_1, \mu_2 : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ zwei Maße auf $\mathcal{A}$ mit:

(a) $\mu_1|_\mathcal{M} = \mu_2|_\mathcal{M}$,

(b) $\mu_1(M_k) = \mu_2(M_k) < \infty$ für $k \in \mathbb{N}$,

so gilt bereits

$$\mu_1 = \mu_2 \ .$$

¡? Beweis ¿!

Sei $A \in \mathcal{A}$. Es ist $A \cap M_k \subseteq A \cap M_{k+1}$ und

$$\bigcup_k (A \cap M_k) = A \cap \underbrace{\left(\bigcup_k M_k \right)}_{=X} = A \ .$$

Mit der Ausschöpfungsformel (vgl. 1.1.7) folgt

$$\mu_j(A) = \lim_{k\longrightarrow\infty} \mu_j(A \cap M_k) \quad , \ j = 1, 2 \ .$$

Es genügt also zu zeigen:

$$\mu_1(A \cap M_k) = \mu_2(A \cap M_k), \quad \forall k \in \mathbb{N} \ .$$

Setze für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{D}_k := \{A \in \mathcal{A} | \mu_1(A \cap M_k) = \mu_2(A \cap M_k)\} \subseteq \mathcal{A} \ .$$

Zeige $\mathcal{D}_k = \mathcal{A}$.

Behauptung

$\mathcal{D}_k$ ist ein Dynkin-System.

1. $X \in \mathcal{D}_k$, denn $\mu_1(M_k) = \mu_2(M_k)$ nach Voraussetzung.

2. $A \in \mathcal{D}_k \ \Rightarrow \ A^c \in \mathcal{D}_k$, denn:

$$\begin{aligned} \mu_1(A^c \cap M_k) + \mu_1(A \cap M_k) &= \mu_1\big(\underbrace{(A^c \cap M_k) \,\dot\cup\, (A \cap M_k)}_{=M_k}\big) \\ &= \mu_1(M_k) \\ &= \mu_2(M_k) \\ &= \mu_2(A^c \cap M_k) + \mu_2(A \cap M_k). \end{aligned}$$

Weil $\mu_1(A \cap M_k) = \mu_2(A \cap M_k)$ ist, da $A \in \mathcal{D}_k$ und $\mu_2(A \cap M_k) \le \mu_2(M_k) < \infty$ ist (nach Voraussetzung), folgt

$$\mu_1(A^c \cap M_k) = \mu_2(A^c \cap M_k) \ ,$$

also $A^c \in \mathcal{D}_k$.

3. Seien $A_k \in \mathcal{D}_k$ und $A_k \cap A_m = \emptyset$ für $l \neq m$. Dann ist

$$\begin{aligned} \mu_1\left(\left(\dot{\bigcup}_l A_l\right) \cap M_k\right) &= \mu_1\left(\dot{\bigcup}_l (A_l \cap M_k)\right) \\ &= \sum_l \mu_1(A_l \cap M_k) \\ &= \sum_l \mu_2(A_l \cap M_k) \\ &= \mu_2\left(\left(\dot{\bigcup}_l A_l\right) \cap M_k\right) \end{aligned}$$

Damit folgt $\dot{\bigcup} A_l \in \mathcal{D}_k$.
Nach Voraussetzung ist $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{D}_k$, weil $\mathcal{M}$ durchschnittsstabil ist. Dann folgt mit Lemma 1.7. $\mathcal{D}_k = \mathcal{A}$. Dies zeigt $\mu_1 = \mu_2$.

QED■

Definition 1.9.
Sei X eine Menge. Eine Teilmenge $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt ein *Ring* auf X, wenn gilt:

(a) $\emptyset \in \mathcal{R}$;

(b) $R, S \in \mathcal{R} \;\Rightarrow\; R \backslash S \in \mathcal{R}$;

(c) $R, S \in \mathcal{R} \;\Rightarrow\; R \cup S \in \mathcal{R}$.

1.3.1 Kommentar

(1) Wegen $R \cap S = R \backslash (R \backslash S)$ folgt, dass $\mathcal{R}$ auch durchschnittsstabil ist.

(2) Ist zusätzlich $X \in \mathcal{R}$, so heißt $\mathcal{R}$ eine Algebra. Jede σ-Algebra ist insbesondere eine Algebra.

1.3.2 Beispiele

Eine Teilmenge $E \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *Elementarfigur*, wenn es endlich viele Quader $Q_1, \ldots, Q_r \subseteq \mathbb{R}^n$ gibt ($r \in \mathbb{N}_0$) mit $E = Q_1 \cup Q_2 \cup \cdots \cup Q_r$ Es ist dann $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n) = \{E \subseteq \mathbb{R}^n | E \text{ Elementarfigur}\}$ ein Ring auf $\mathbb{R}^n$ (klar?). ($\emptyset \in E \quad (r = 0)$.)

1.4 Prämaße

Definition 1.10.
Sei X eine Menge und $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein Ring. Eine Funktion $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ heißt ein *Prämaß auf* $\mathbb{R}$, wenn gilt:

(a) $\mu(\emptyset) = 0$;

(b) Sind $R_k \in \mathcal{R}$ $k \in \mathbb{N}$ paarweise disjunkt und ist $\dot{\bigcup}_{k \in \mathbb{N}} R_k \in \mathcal{R}$, so gilt:

$$\mu\left(\dot{\bigcup}_{k \in \mathbb{N}} R_k\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(R_k) \; .$$

1.4.1 Kommentar

Wie in 1.1.7 sieht man, dass ein Prämaß notwendig monoton ist ($R, S \in \mathcal{R},\ R \subseteq S \ \Rightarrow\ \mu(R) \leq \mu(S)$), die Formel

$$\mu(R \cap S) + \mu(R \cup S) = \mu(R) + \mu(S)$$

für $R, S \in \mathcal{R}$ erfüllt und auch *subadditiv* ist, d.h. sind $R_k \in \mathcal{R}$ $k \in \mathbb{N}$ und $\bigcup R_k \in \mathcal{R}$, so ist:

$$\mu\left(\bigcup_k R_k\right) \leq \sum_k \mu(R_k) \ .$$

1.4.2 Beispiel

Sei $\mathcal{R} = \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ der Ring der Elementarfiguren im $\mathbb{R}^n$. Jedes $E \in \mathcal{E}$ kann sogar als disjunkte Vereinigung von Quadern dargestellt werden,

$$E = Q_1 \dot\cup \ldots \dot\cup Q_r \ .$$

Für

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n | a_j \underset{(-)}{\leq} x_j \underset{(-)}{\leq} b_j,\ j = 1, \ldots, n\}$$

setzt man nun

$$\lambda(Q) := \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j)$$

und dann für $E \in \mathcal{E}(R^n)$, wenn $E = Q_1 \dot\cup \ldots \dot\cup Q_r$ ist,

$$\lambda(E) := \sum_{\rho=1}^{r} \lambda(Q_\rho) \ , \ \lambda(\emptyset) = 0$$

(unabhängig von der disjunkten Zerlegung in Quader ✎ *Übung* ✐), $\lambda : \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty)$.

Proposition 1.11.
Es ist $\lambda : \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty)$ ein Prämaß auf dem Ring der Elementarfiguren.

¡? Beweis ¿!

Nach Definition ist $\lambda(\emptyset) = 0$. Seien nun $E_k \in \mathcal{E}$ $\ k \in \mathbb{N}$ und

$$E := \dot\bigcup_k E_k \in \mathcal{E} \ .$$

Teil 1
Behauptung

$$\lambda(E) \leq \sum_k \lambda(E_k) \ .$$

Sei $\varepsilon > 0$. Es existieren dann offene Elementarfiguren $G_k \in \mathcal{E}$ und ein abgeschlossenes (und beschränktes) $F \in \mathcal{E}$ mit: $G_k \supseteq E_k$, $F \subseteq E$ und

$$\lambda(G_k) \leq \lambda(E_k) + 2^{-k} \cdot \varepsilon \quad , \qquad \lambda(F) \geq \lambda(E) - \varepsilon \ .$$

Es ist $F \subseteq E = \dot\bigcup E_k \subseteq \bigcup_k G_k$ und F ist kompakt ($\hookrightarrow$ Heine-Borel, vgl. MfPh3Diff Satz 3.5.) $\Rightarrow$ $\exists N \in \mathbb{N}$

$$F \subseteq G_1 \cup \cdots \cup G_N \ .$$

Daher gilt nun:

$$\begin{aligned}
\lambda(E) &\le \lambda(F)+\varepsilon \\
&\overset{\substack{\text{Monotonie}\\ \text{von}\lambda}}{\le} \lambda(G_1\cup\cdots\cup G_N)+\varepsilon \\
&\overset{\substack{\text{Subadd.}\\ \text{von}\lambda}}{\le} \lambda(G_1)+\cdots+\lambda(G_N)+\varepsilon \\
&\le \sum_{k=1}^{N}\left(\lambda(E_k)+2^{-k}\cdot\varepsilon\right)+\varepsilon \\
&\le \sum_{k=1}^{\infty}\lambda(E_k)+\underbrace{\left(\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\right)}_{=\frac{1/2}{1-1/2}=1}\cdot\varepsilon+\varepsilon \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\lambda(E_k)+2\varepsilon\ .
\end{aligned}$$

Weil $\varepsilon>0$ beliebig war, folgt sogar

$$\lambda(E)\le\sum_{k=1}^{\infty}\lambda(E_k)\ .$$

Teil 2
Es ist nach Definition für $E_1,E_2\in\mathcal{E}$ mit $E_1\cap E_2=\emptyset$:

$$\lambda(E_1\cup E_2)=\lambda(E_1)+\lambda(E_2)\ .$$

Deshalb ist für $E=\dot{\bigcup}_{k\in\mathbb{N}}E_k\in\mathcal{E}$:

$$\lambda(E_1)+\cdots+\lambda(E_N)=\lambda\left(\dot{\bigcup_{k=1}^{N}}E_k\right)\le\lambda(E)\ \Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\lambda(E_k)\le\lambda(E)\ .$$

Tatsächlich ist damit

$$\lambda(E)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda(E_k)\ ,$$

also λ ein Prämaß auf $\mathcal{E}$.
QED■

21.04.2005

1.5 Äußere Maße

Definition 1.12.
Sei X eine Menge. Eine Funktion $\mu^*:\mathcal{P}(X)\to[0,\infty]$ heißt ein *äußeres Maß auf* X, wenn gilt

(a) $\mu^*(\emptyset)=0$;

(b) ist $A\subseteq B$, so ist $\mu^*(A)\le\mu^*(B)$;

(c) ist $A_k\subseteq X\ k\in\mathbb{N}$, so ist $\mu^*(\bigcup A_k)\le\sum\mu^*(A_k)$.

1.5.1 Konstruktion (Caratheodory)

Sei X eine Menge, $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein Ring und $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ ein Prämaß auf $\mathcal{R}$.

(a) Sei $A \subseteq X$ beliebig. Eine Familie $(R_k)_{k=1}^{\infty}$ mit $R_k \in \mathcal{R}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so dass $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k$ ist, heißt eine $\mathcal{R}$ -*Pflasterung* von A.

(b) Man definiert nun $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ folgendermaßen:

$$\mu^*(A) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu(R_k) \middle| (R_k) \text{ ist } \mathcal{R}\text{-Pflasterung von } A \right\} .$$

($\mu^*(A) := \infty$, falls es keine $\mathcal{R}$ -Pflasterung von A gibt.)

1.5.2 Bemerkung

Es ist dann μ^* ein äußeres Maß auf X und $\mu^*|_{\mathcal{R}} = \mu$.

¡? Beweis ¿!

(1) Sei $R \in \mathcal{R}$ und $(R_k)_k$ eine beliebige $\mathcal{R}$ -Pflasterung von R. Wegen $R = \bigcup_{k=1}^{\infty}(R_k \cap R)$ ist nun

$$\mu(R) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\underbrace{R \cap R_k}_{\leq \mu(R_k)}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(R_k) .$$

Daher ist

$$\mu(R) \leq \mu^*(R) .$$

Andererseits ist insbesondere $(R, \emptyset, \emptyset, \dots)$ auch eine $\mathcal{R}$ -Pflasterung, also ist

$$\mu^*(R) \leq \mu(R) + \underbrace{\mu(\emptyset)}_{=0} + \underbrace{\mu(\emptyset)}_{=0} + \dots = \mu(R)$$

und damit

$$\mu^*|_{\mathcal{R}} = \mu .$$

(2) (a) Da $\emptyset \in \mathcal{R} \;\Rightarrow\; \mu^*(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$.

(b) Sei $A \subseteq B$. Jede $\mathcal{R}$ -Pflasterung von B ist auch eine $\mathcal{R}$ -Pflasterung von A. Daher ist

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(B) .$$

(c) Sei $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ und $\mu^*(A_k) = \infty$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\mu^*(A) \leq \infty = \sum \mu^*(A_k) .$$

Also ist ohne Einschränkung $\mu^*(A_k) < \infty \quad \forall k \in \mathbb{N}$.
Sei $\varepsilon > 0$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ existiert eine $\mathcal{R}$ -Pflasterung $(R_k)_l$ von A_k, so dass gilt

$$\sum_{l=1}^{\infty} \mu(R_{kl}) \leq \mu^*(A_k) + 2^{-k}\varepsilon .$$

Weil nun $(R_{kl})_{k,l \in \mathbb{N}}$ ein $\mathcal{R}$ -Pflasterung für A ist, folgt nach Definition

$$\begin{aligned}
\mu^*(A) &\leq \sum_{k,l} \mu(R_{kl}) \\
&= \sum_{k} \left(\sum_{l} \mu(R_{kl}) \right) \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\mu^*(A_k) + 2^{-k}\varepsilon \right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k) + \varepsilon
\end{aligned}$$

Für alle $\varepsilon > 0$. Daher gilt:

$$\Rightarrow \mu^*(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k) \ .$$

QED$\blacksquare$

1.5.3 Kommentar

(1) Man nennt dann μ^* die *natürliche Erweiterung* von μ auf $\mathcal{P}(X)$.

(2) Man beginnt also bei der Definition des Maßes auf möglichst vielen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ mit der elementargeometrischen Inhaltsdefinition auf Quadern, erweitert diese dann mit Caratheodorys Überdeckungskonstruktion auf alle Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ und „bezahlt“ mit der Aufgabe der σ-Additivität.

In einem letzten Schritt versucht man nun das Mengensystem (so sparsam wie möglich) zu verkleinern, dass die σ-Additivität wieder hergestellt wird.

1.6 Messbare Mengen

Definition 1.13.
Sei X eine Menge und $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ ein äußeres Maß. Man sagt, dass $A \subseteq X$ μ^*-messbar ist (bzw. die Zerlegungseigenschaft bzgl. μ^* hat), wenn für alle $B \subseteq X$ gilt

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c) \ .$$

1.6.1 Kommentar

Man beachte, dass wegen $B = (B \cap A) \dot\cup (B \cap A^c)$ und der Subadditivität eines äußeren Maßes stets gilt:

$$\mu^*(B) \leq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c) \ .$$

Lemma 1.14.
Sei $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ ein äußeres Maß auf X und

$$\mathcal{A}^* := \{A \in \mathcal{P}(X) | A \text{ ist } \mu^* - \text{messbar}\}$$

Dann gilt:

(a) $\mathcal{A}^*$ ist eine σ-Algebra auf X;

(b) die Einschränkung $\mu^*|_{\mathcal{A}^*} : \mathcal{A}^* \to [0, \infty]$ ist ein Maß (auf $\mathcal{A}^*$).

¡? Beweis ¿!

(a)
- $X \in \mathcal{A}^*$, denn $\forall B \in \mathcal{P}$:

$$\mu^*(\underbrace{B \cap X}_{=B}) + \mu^*(\underbrace{B \cap X^c}_{=\emptyset}) = \mu^*(B) + 0 = \mu^*(B) \ .$$

- Sei $A \in \mathcal{A}^*$, wegen $A^{cc} = A$ ist dann $\forall B \in \mathcal{P}$:

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c) = \mu^*(B \cap (A^c)) + \mu^*(B \cap (A^c)^c)$$

also ist auch $A^c \in \mathcal{A}^*$.

- Seien $A_k \in \mathcal{A},\ k \in \mathbb{N}$ zeige $\bigcup A_k \in \mathcal{A}^*$ (nicht trivial!) Zunächst nur für zwei Mengen $A_1, A_2 \in \mathcal{A}^* : \forall B \in \mathcal{P}$ gilt:

  (i) $\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A_1) + \mu^*(B \cap A_1^c)$, denn $A_1 \in \mathcal{A}^*$;

  (ii)
$$\begin{aligned} \mu^*(B \cap A_1^c) &= \mu^*(B \cap A_1^c \cap A_2) + \mu^*(B \cap A_1^c \cap A_2^c) \\ &= \mu^*(B \cap A_1^c \cap A_2) + \mu^*(B \cap (A_1 \cup A_2)^c), \end{aligned}$$
  denn $A_2 \in \mathcal{A}$;

  (iii)
$$\begin{aligned} \mu^*(B \cap (A_1 \cup A_2)) &= \mu^*(B \cap (A_1 \cup A_2) \cap A_1) + \mu^*(B_1 \cap (A_1 \cup A_2) \cap A_1^c) \\ &= \mu^*(B \cap A_1) + \mu^*(B \cap A_2 \cap A_1^c), \end{aligned}$$
  denn $A_1 \in \mathcal{A}^*$ insbesondere ist für $A_1 \cap A_2 = \emptyset$;

  (iv) $\mu^*(B \cap (A_1 \dot\cup A_2)) = \mu^*(B \cap A_1) + \mu^*(B \cap A_2)$.

  Zusammen ist
$$\begin{aligned} & \mu^*(B \cap (A_1 \cup A_2)) + \mu^*(B \cap (A_1 \cup A_2)^c) + \mu^*(B \cap A_1^c \cap A_2) \\ \overset{(2)\&(3)}{=} \; & \mu^*(B \cap A_1) + \mu^*(B \cap A_2 \cap A_1^c) + \mu(B \cap A_1^c) \\ \overset{(1)}{=} \; & \mu^*(B) + \mu(B \cap A_2 \cap A_1^c) \end{aligned}$$
  Falls $\mu(B \cap A_2 \cap A_1^c) < \infty$ ist, folgt damit
$$\mu^*(B \cap (A_1 \cup A_2)) + \mu(B \cap (A_1 \cap A_2^c)) = \mu^*(B)$$
  und diese Gleichung gilt auch für den Fall $\mu(B \cap A_2 \cap A_1^c) = \infty$, weil sie dann $\infty = \infty$ lautet. Daher ist gezeigt
$$A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}^* \ ,$$
  wenn $A_1, A_2 \in \mathcal{A}^*$ ist.

  Es reicht nun zu zeigen, dass $\mathcal{A}^*$ ein Dynkin-System ist, denn $\mathcal{A}^*$ ist durchschnittsstabil wegen
$$A_1 \cap A_2 = (A_1^c \cup A_2^c)^c \ .$$
  Sei deshalb nun $A_k \cap A_l = \emptyset$ für $k \neq l \quad k \in \mathbb{N}$ und $A_k \in \mathcal{A}^*$.

  Für jedes $N \in \mathbb{N}$ ist nun wegen (4):
$$\mu^*(B \cap (A_1 \dot\cup \ldots \dot\cup A_N)) = \mu^*(B \cap A_1) + \cdots + \mu^*(B \cap A_N) \ .$$
  Es folgt weiter für alle $B \subseteq X$:
$$\begin{aligned} \mu^*(B) &= \mu^*(B \cap (A_1 \dot\cup \ldots \dot\cup A_N)) + \mu^*(B \cap (A_1 \dot\cup \ldots \dot\cup A_N)^c) \\ & \quad \text{(weil } A_1, \ldots, A_N \in \mathcal{A}^* \text{ und damit } A_1 \dot\cup \ldots \dot\cup A_N \in \mathcal{A}^*) \\ &= \sum_{k=1}^{N} \mu^*(B \cap A_k) + \mu^*(B \cap (A_1 \dot\cup \ldots \dot\cup A_N)^c) \\ &\geq \sum_{k=1}^{N} \mu^*(B \cap A_k) + \mu^*(B \cap (\dot\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)^c) \ , \ \forall N \in \mathbb{N} \ . \end{aligned}$$
  Damit gilt
$$\begin{aligned} \mu^*(B) &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(B \cap A_k) + \mu^*(B \cap (\dot\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)^c) \\ &\geq \mu^*(B \cap \dot\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) + \mu^*(B \cap (\dot\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)^c) \ . \end{aligned}$$

Die Ungleichung

$$\mu^*(B) \leq \mu^*(B \cap \dot{\bigcup_{k=1}^{\infty}} A_k) + \mu^*(B \cap (\dot{\bigcup_{k=1}^{\infty}} A_k)^c)$$

gilt sowieso (siehe Kommentar 1.6.1). Damit gilt die Gleichheit und $\mathcal{A}^*$ ist eine σ-Algebra. 26.04.2005

(b) Sei $A = \dot{\bigcup} A_k,\ A_k \in \mathcal{A}^*,\ A \in \mathcal{A}^*,\ k \in \mathbb{N}$. Aus (vi.)folgt mit $B = X$ für alle $N \in \mathbb{N}$, dass

$$\mu^*(\dot{\bigcup_{k=1}^{\infty}} A_k) \geq \mu^*(\dot{\bigcup_{k=1}^{N}} A_k) = \mu^*(A_1) + \cdots + \mu^*(A_N) \ .$$

Damit ist

$$\mu^*(\dot{\bigcup_{k=1}^{\infty}} A_k) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k) \ .$$

Die Ungleichung $\leq$ ist ohnehin erfüllt, also

$$\mu^*(\dot{\bigcup_{k=1}^{\infty}} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k) \ .$$

Daher ist auch $\mu^*|_{\mathcal{A}^*}$ ein Maß.

QED$_\blacksquare$

Satz 1.15. Fortsetzungssatz
Sei $\mathcal{R} = \mathcal{P}(X)$ ein Ring auf einer Menge X und $\mathcal{A}$ die von $\mathcal{R}$ erzeugte σ-Algebra. Weiter sei $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ ein Prämaß und $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ seine natürliche Erweiterung. Dann ist die Einschränkung von μ^* auf $\mathcal{A}$ ein Maß.

¡? Beweis ¿!

Sei $\mathcal{A}^* \subseteq \mathcal{P}(X)$ die σ-Algebra der μ^*-messbaren Mengen (vgl.Lemma 1.14.a).
Zeige: $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A}^*$ (denn dann ist $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^*$ und nach dem Lemma dann $\mu^*|_{\mathcal{A}}$ ein Maß).
Sei also $R \in \mathcal{R}$ und $B \in \mathcal{P}$ beliebig. Zu zeigen:

$$\mu^*(B) \geq \mu^*(B \cap R) + \mu^*(B \cap R^c)$$

Sei (R_k) eine $\mathcal{R}$ -Pflasterung von B, $B \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k$. Dann gilt:

- $(R_k \cap R)_{k \in \mathbb{N}}$ ist $\mathcal{R}$ -Pflasterung von $B \cap R$;
- $(R_k \cap R^c)_{k \in \mathbb{N}}$ ist $\mathcal{R}$ -Pflasterung von $B \cap R^c$.

Weil μ ein Prämaß ist, gilt

$$\mu(R_k) = \mu(R_k \cap R) + \mu(R_k \cap R^c)$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \mu(R_k) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mu(R_k \cap R) + \mu(R_k \cap R^c) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mu(R_k \cap R) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(R_k \cap R^c) \\
&\geq \mu^*(B \cap R) + \mu^*(B \cap R^c)
\end{aligned}$$

nach Definition von μ^* für jede $\mathcal{R}$ -Pflasterung von B. Daraus folgt direkt

$$\mu^*(B) \geq \mu^*(B \cap R) + \mu^*(B \cap R^c) \ .$$

QED$_\blacksquare$

1.6.2 Kommentar

(1) Man nennt ein Prämaß $\mu : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ σ-endlich, wenn es eine Ausschöpfung (R_k) von ganz X gibt, d.h. $R_k \in \mathcal{R}$, $\bigcup R_k = X$, $R_k \subseteq \mathbb{R}_{k+1}$, mit $\mu(R_k) < \infty$. Aus dem Eindeutigkeitssatz (Satz 1.8.) folgt dann:
Ist $\mu : \mathcal{R} \to [0,\infty]$ σ-endlich, so ist $\mu^*|_{\mathcal{A}}$ das einzige Maß auf $\mathcal{A}$ (Erzeugnis von $\mathcal{R}$), welches μ fortsetzt.

(2) Angewendet auf den Ring der Elementarfiguren $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ im $\mathbb{R}^n$ mit seinem natürlichen σ endlichen Prämaß $\lambda : \mathcal{E}(R^n) \to [0,\infty)$ sehen wir nun, dass die Borel-Algebra $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ ein natürliches Maß (ebenfalls mit λ bezeichnet) $\lambda : \mathcal{B} \to [0,\infty)$ hat, dass gegeben ist durch das *Borel-Lebesgue-Maß*

$$\lambda(A) = \inf\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(Q_k) \middle| (Q_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ Quader-Pflasterung von } A \right\} ,$$

$$\mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}^* \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$$

(3) Die σ-Algebra $\mathcal{A}^*$ der λ^*-messbaren Mengen ist aber größer. Sie heißt die *Lebesgue-Algebra* $\mathcal{L}$ und $\lambda^*|_{\mathcal{L}}$ heißt das *Lebesguesche Maß* auf $\mathcal{L}$. ✎ *Übung* ✐

1.7 Das Borel-Lebesguesche-Maß

Definition 1.16.
Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine σ-Algebra und $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ eine σ-Algebra auf Y. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *($\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}$)-messbar*, wenn für alle $B \in \mathcal{B}$ das Urbild $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ ist.

1.7.1 Bemerkung

Sei $f : (X,\mathcal{A}) \to (Y,\mathcal{B})$ wie oben und sei $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{B}$ ein Erzeuger für $\mathcal{B}$. Ist nun $f^{-1}(N) \in \mathcal{A}$, für alle $N \in \mathcal{N}$, so ist f bereits messbar.

¡? Beweis ¿!
Betrachte

$$\mathcal{B}' := \{B \subseteq Y | f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\} .$$

Dann ist $\mathcal{B}'$ ist eine σ-Algebra (klar?!) und $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{B}'$. Deshalb ist $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}'$, also f messbar.
QED■

1.7.2 Beispiel

Sei $\mathcal{B}_n \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ die Borel-Algebra auf $\mathbb{R}^n$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine stetige Abbildung, also $f^{-1}(V) \subseteq \mathbb{R}^n$ offen für $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen. Dann ist f messbar, denn die offenen Mengen in $\mathbb{R}^m$ erzeugen (nach Definition) $\mathcal{B}_m$.
Insbesondere: Ist $p \in \mathbb{R}^n$ ein fester Punkt und $T_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die *Translation* um p,

$$x \mapsto x + p ,$$

so gilt

$$B \subseteq \mathbb{R}^n \text{ Borelsch} \quad \Leftrightarrow \quad B + p = \{x + p | x \in B\} \text{ Borelsch}$$

(denn $B + p = T_{-p}^{-1}(B),\ B = T_p^{-1}(B + p)$)

1.7.3 Bemerkung

Das Borel-Lebesguesche-Maß λ ist translationsinvariant, d.h. für jedes $p \in \mathbb{R}^n$ und jede Borel-Menge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt

$$\lambda(B+p) = \lambda(B) \ .$$

¡? Beweis ¿!

Sei $p \in \mathbb{R}^n$. Für jeden Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt nach Definition $\lambda(Q+p) = \lambda(Q)$. Setzt man $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$

$$\mu(B) := \lambda(B+p) \ ,$$

so folgt: μ ist ein Maß und $\mu|_{\mathcal{E}} = \lambda|_{\mathcal{E}}$ mit dem Ring der Elementarfiguren $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{R}^n$. Nun folgt mit Satz 1.8. direkt: $\mu = \lambda$, denn $\mathcal{E}$ ist durchschnittsstabiler Erzeuger für $\mathcal{B}$ und $\mathbb{R}^n = \dot{\bigcup}_k W_k$, mit $W_k := [-k, k]^n$ sowie $\lambda(W_k) < \infty \ \ \forall k \in \mathbb{N}$. Also ist λ translationsinvariant.

QED$\blacksquare$ 28.04.2005

1.7.4 Erinnerung

Sei X eine Menge. $R \subseteq X \times X$ heißt eine Äquivalenzklassenrelation auf X, $x \sim y :\Leftrightarrow \in R$, wenn gilt

- $\sim$ ist reflexiv, d.h. $x \sim x$ für alle $x \in X$;
- $\sim$ ist symmetrisch, d.h. $x \sim y \ \Rightarrow y \sim x$ für alle $x, y \in X$;
- $\sim$ ist transitiv, d.h. $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$ für alle $x, y, z \in X$.

Es heißt $[x] = \{y \in X | x \sim y\}$ eine Äquivalenzklasse von X. Zwei Äquivalenzklassen $[x], [y] \subseteq X$ sind entweder disjunkt oder gleich ✎ *Übung* ✐. X ist also damit disjunkte Vereinigung seiner Äquivalenzklassen. Man setzt dann

$$X/\sim = \{[x] \in \mathcal{P}(X), x \in X\} \ .$$

Beispiel:

- $X = \mathbb{Z}$, $x \sim y \ \Rightarrow \ x - y \in 12\mathbb{Z} \Rightarrow$
  $[0] = \{0, 12, 24, \dots\}, [1] = \{1, 13, 25, \dots\}, \dots$
  $\mathbb{Z}/\sim =: \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} = \{[0], [1], [2], \dots [11]\}$ („ $\mathbb{Z}$ modulo 12“.
- $X = \mathbb{R}$, $x \sim y \ \Rightarrow \ x - y \in \mathbb{Q}$
  Wir setzen $\mathbb{R}/\mathbb{Q} = \mathbb{R}/\sim$.

1.7.5 Beispiel

Sei $n \geq 1$ und $W := [0,1]^n$. Sei A ein vollständiges Repräsentantensystem von $\mathbb{R}^n/\mathbb{Q}^n$ (Auswahlaxiom!), d.h. A enthalte aus jeder Äquivalenzklasse $[x] \subseteq \mathbb{R}^n$ (bzgl. der Äquivalenz-Relation $x \sim y :\Leftrightarrow y - x \in \mathbb{Q}^n$) genau ein Element. Seien I, J die folgenden abzählbaren Mengen: $I = \mathbb{Q}^n \cap W$ und $J = \mathbb{Q}^n \cap [-1, 2]^n$.
Es ist nun

$$(A+q) \cap (A+q') = \emptyset \ \ \forall \, q, q' \in \mathbb{Q}^n, q \neq q' \ ,$$

$$\dot{\bigcup}_{q \in I} (A+q) \overset{(\#)}{\subseteq} [0,2]^n \overset{(*)}{\subseteq} \dot{\bigcup}_{q \in J} (A+q) \ .$$

((#) für $q \in I$ ist $\forall a \in A : 0 \leq a_i \leq 1, 0 \leq q_i \leq 1 \ \Rightarrow \ 0 \leq a_i + q_i \leq 2$, für $i = 1, \dots, n$.
(*) ist $x \in [0,2]^n$, so folgt: $\exists a \in A, q \in \mathbb{Q}^n : x = a + q$. Wegen $0 \leq a_j \leq 1$ und $0 \leq x_j \leq 2$ folgt $-1 = 0 - 1 \leq q_j = x_j - a_j \leq 2 - 0 = 2$).

Angenommen A ist Borelsch. Dann folgt

$$\sum_{q\in I}\lambda(A)=\sum_{q\in I}\lambda(A+q)\overset{\text{Maß}}{=}\lambda\Big(\dot{\bigcup}_{q\in I}(A+q)\Big)\leq\lambda([0,2]^n)=2^n<\infty$$

Weil I ∞-viele Element besitzt, folgt weiter:

$$\lambda(A)=0\ .$$

Andererseits ist dann

$$0=\sum_{q\in J}\lambda(A)\overset{\text{TransInv}}{=}\sum_{q\in J}\lambda(A+q)\overset{\lambda\ \text{Maß}}{=}\lambda\left(\dot{\bigcup}_{q\in J}(A+q)\right)\geq\lambda\left([0,2]^n\right)=2^n$$

↯ `Widerspruch` ↯
Also kann A nicht Borelsch sein (und auch nicht Lebesgue-messbar).

Satz 1.17. Eindeutigkeit für λ
Ist μ ein translationsinvariantes Maß auf der Borelalgebra $\mathcal{B}\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, welches auf dem Einheitswürfel $W=[0,1]^n$ den Wert 1 hat, so ist μ bereits das Borel-Lebesguesche-Maß λ.

¡? Beweis ¿!

Weil in W ∞-viele disjunkte Translate von $[0,1]^{n-1}\times\{0\}$ liegen, ist sicher $\mu(S)=0$, wobei $S\subseteq W$ eine beliebige Seite ist; insbesondere ist auch $\mu\left([0,1)^n\right)=1$ Die Borel-Algebra wird von den halboffenen Quadern Q mit rationalen Eckpunkten erzeugt. Nach Satz 1.8. reicht es daher für solche Quader zu zeigen:

$$\mu(Q)=\lambda(Q)\ .$$

Sei nun **o.B.d.A.** wegen der Translationsinvarianz von μ

$$Q=[0,r_1)\times[0,r_2)\times\cdots\times[0,r_n)$$

wobei $r_j\in\mathbb{Q}_+$. Damit folgt

$$\exists a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{N},\ b\in\mathbb{N},\ \ r_j=\frac{a_j}{b}\quad(j=1,\ldots,n)\ .$$

Daher ist Q die disjunkte Vereinigung von Quadern der Form

$$\left[\frac{l_1}{b},\frac{l_1+1}{b}\right)\times\left[\frac{l_2}{b},\frac{l_2+1}{b}\right)\times\cdots\times\left[\frac{l_n}{b},\frac{l_n+1}{b}\right)\ .$$

mit $0\leq l_j\leq a_j-1,\ j=1,\ldots n$. Die Würfel haben wiederum wegen der Translationsinvarianz das gleiche Maß wie

$$Q_b=\left[0,\frac{1}{b}\right)^n\ .$$

Es reicht also zu zeigen, dass $\mu(Q_b)=\lambda(Q_b)=\left(\frac{1}{b}\right)^n$ ist, für alle $b\in\mathbb{N}$. Aber $W=[0,1)^n$ hat eine disjunkte Zerlegung in b^n Würfel, die alle Translate von Q_b sind. Daher ist

$$\begin{aligned} b^n\cdot\mu(Q_b)&=\mu(W)=1 &&(1.1)\\ \Rightarrow\qquad \mu(Q_b)&=\frac{1}{b^n} &&(1.2)\\ \Rightarrow\qquad \mu&=\lambda+\ . &&(1.3)\end{aligned}$$

QED■

Sei nun $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein linearer Isomorphismus, $T \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$. Weil T stetig ist und $T^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist, gilt auch hier:

$$B \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ist Borelmenge } \Leftrightarrow \quad TB := T(B) \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ist Borelmenge}$$

Satz 1.18.
Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein linearer Isomorphismus. Dann gilt für jede Borelmenge $B \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\lambda(TB) = |\det T| \, \lambda(B)$$

¡? Beweis ¿!

Setze $\mu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$

$$\mu(B) := \frac{1}{|\det T|} \lambda(TB) \ .$$

Dann gilt: μ ist ein Maß auf $\mathcal{B}$ und μ ist translationsinvariant: $\forall p \in \mathbb{R}^n$ und $\forall B \in \mathcal{B}$.

$$\begin{aligned} \mu(B+p) &= \frac{1}{|\det T|} \lambda(T(B+p)) \\ &= \frac{1}{|\det T|} \lambda(TB + Tp) \\ &= \frac{1}{|\det T|} \lambda(TB) \\ &= \mu(B) \ . \end{aligned}$$

Nach Satz 1.17. reicht es daher zu zeigen, dass

$$\mu(W) = 1, \quad W = [0,1]^n$$

ist. Betrachte dazu $\varphi : \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}) \to (0, \infty)$

$$\varphi(T) = \lambda(TW) \ .$$

Weil $T\big(((0,1)^n\big)$ offen ist, enthält nämlich TW einen offenen Würfel. Es ist damit $\lambda(TW) > 0$ und weil $TW \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt ist, ist auch $\lambda(TW) < \infty$.

Behauptung

φ ist ein Homomorphismus (d.h. $\varphi(TS) = \varphi(T) \cdot \varphi(S) \quad \forall T, S \in \mathrm{Gl}_n(R)$).

Denn

Setze

$$\tilde{\mu}(B) := \frac{1}{\lambda(TW)} \lambda(TB) \ .$$

Dann folgt $\tilde{\mu}$ ist translationsinvariant (wie oben) und $\tilde{\mu}$ ist normiert, $\tilde{\mu}(W) = 1$. Daher folgt mit Satz 1.17.:

$$\tilde{\mu} = \lambda \ .$$

Insbesondere ist für jedes $S \in \mathrm{Sl}_n(\mathbb{R}) = \{T \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}) | \det T = 1\}$:

$$\lambda(SW) = \tilde{\mu}(SW) = \frac{1}{\lambda(TW)} \lambda(TSW) \ ,$$

also

$$\varphi(S) \cdot \varphi(T) = \varphi(TS) \ , \quad \forall T, S \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}) \ .$$

Nach Lemma 1.19. ist jeder Homomorphismus $\psi : \mathrm{Sl}_n(\mathbb{R}) \to (0, \infty)$ trivial (d.h. $\psi(S) = 1 \quad \forall S \in \mathrm{Sl}_n(\mathbb{R})$). Betrachte deshalb schließlich

$$T_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

für $\alpha \neq 0$ (d.h. $\det T_\alpha = \alpha$). Dann ist

$$T_\alpha W = [0,1]^{n-1} \times [0,\alpha] \;\Rightarrow\; \lambda(T_\alpha W) = |\alpha| \;.$$

Für $\alpha := \frac{1}{\det T} > 0$ ist nun $T_\alpha T \in \mathrm{Sl}_n(\mathbb{R})$, denn $\det(T_\alpha T) = \det(T_\alpha)\cdot\det(T) = \alpha\cdot\det(T) = 1$ und daher ist nun

$$1 = \varphi(T_\alpha T) \overset{\varphi\text{Hom}}{=} \varphi(T_\alpha)\varphi(T) = \lambda(T_\alpha W)\cdot\varphi(T) = |\alpha|\,\varphi(T) = \frac{1}{|\det T|}\varphi(T) \;.$$

Daraus folgt

$$\varphi(T) = |\det T|$$

und damit

$$\mu(W) = \frac{1}{|\det T|}\lambda(TW) = \frac{1}{|\det T|}\varphi(T) = 1 \;.$$

Somit ist μ also auch normiert und nach Satz 1.17.: $\mu = \lambda$.
QED$_\blacksquare$

Lemma 1.19.
Ist $\psi : \mathrm{Sl}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ ein Homomorphismus, so ist ψ bereits trivial, d.h. $\psi(S) = 1\ \forall S \in \mathrm{Sl}_n(\mathbb{R})$.

¡? Beweis ¿!
Aus der linearen Algebra ist die Kommutatoruntergruppe bekannt und es gilt:

$$C = \left\langle ABA^{-1}B^{-1}, A, B \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})\right\rangle = \mathrm{Sl}_n(\mathbb{R}) \;,$$

d.h. jedes $S \in \mathrm{Sl}_n(\mathbb{R})$ lässt sich schreiben, als

$$S = \prod_{j=1}^{r} A_j B_j A_j^{-1} B_j^{-1} \quad \text{mit} \quad A_j, B_j \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}) \;.$$

Damit folgt:

$$\psi(S) = \psi\Big(\prod_{j=1}^{r} A_j B_j A_j^{-1} B_j^{-1}\Big) \overset{\psi\text{Hom}}{=} \prod_{j=1}^{r} \psi(A_j)\psi(B_j)\psi(A_j^{-1})\psi(B_j^{-1}) = 1 \;.$$

QED$_\blacksquare$

Kapitel 2

Integrierbare Funktionen

03.05.2005

2.1 Grundlagen

2.1.1 Bezeichnungen

(1) Sei $\bar{\mathbb{R}} := [-\infty, +\infty]$ und $B \subseteq \bar{\mathbb{R}}$. Sei $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ die Borel-Algebra auf $\mathbb{R}$. Wir setzen $B \in \bar{\mathcal{L}} \Leftrightarrow B \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}$ mit $\bar{\lambda}(B) := \lambda(B \cap \mathbb{R})$.
Es ist dann $(\bar{\mathbb{R}}, \bar{\mathcal{B}}, \bar{\lambda})$ ist ein Maßraum.

(2) Setze $\forall a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
a + \infty &:= \infty \\
\infty + \infty &:= \infty \\
a - \infty &:= -\infty \\
-\infty - \infty &:= -\infty \\
a \cdot \infty &:= \begin{cases} \infty & \text{falls } a > 0 \\ -\infty & \text{falls } a < 0 \end{cases} \\
\infty \cdot \infty &:= \infty \\
0 \cdot \pm\infty &:= 0
\end{aligned}$$

Vorsicht bei $\infty - \infty$! Dies ist nicht definiert.

2.1.2 Kommentar

(1) Es ist $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ messbar $\Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(\pm\infty) \subseteq X & \text{messbar} \\ f|_{f^{-1}(\mathbb{R})} : f^{-1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} & \text{messbar} \end{cases}$.

(2) Für Funktionen $f, g : X \to \bar{\mathbb{R}}$ ist also $f \cdot g : X \to \bar{\mathbb{R}}$ stets definiert, während $f + g$ nur auf $X \setminus \Big[\big(f^{-1}(\infty) \cap g^{-1}(-\infty)\big) \cup \big(f^{-1}(-\infty) \cap g^{-1}(\infty)\big) \Big]$ erklärt ist.

2.1.3 Bemerkung

Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf der Menge X. Für eine Funktion $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ sind äquivalent:

(1) f ist messbar

(2) $\forall a \in \mathbb{R}$ ist $\{f \geq a\} := \{x \in X | f(x) \geq a\}$ ist messbar

(3) $\forall a \in \mathbb{R}$ ist $\{f > a\} := \{x \in X | f(x) > a\}$ ist messbar

(4) $\forall a \in \mathbb{R}$ ist $\{f \leq a\} := \{x \in X | f(x) \leq a\}$ ist messbar

(5) $\forall a \in \mathbb{R}$ ist $\{f < a\} := \{x \in X | f(x) < a\}$ ist messbar

¡? Beweis ¿!

Die Mengen $\{y \geq a\} = \{y \in \bar{\mathbb{R}} | y \geq a\}$, $\{y > a\}$, $\{y \leq a\}$, $\{y < a\}$ sind Erzeuger der σ-Algebra $\bar{\mathcal{B}}$. Mit (1.7.1) folgt die Behauptung.
QED■

2.1.4 Bemerkung

Es seien $f, g : X \to \bar{\mathbb{R}}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann sind $\alpha \cdot f$, $f + g$, $f \cdot g$ messbar.

¡? Beweis ¿!

$(f+g)^{-1}(\infty) = \left[f^{-1}(\infty) \cap g^{-1}(-\infty, \infty]\right] \cup \left[f^{-1}(-\infty, \infty] \cap g^{-1}(\infty)\right]$ ist messbar.
$(f \cdot g)^{-1}(\infty) = \left[f^{-1}(\infty) \cap g^{-1}(0, \infty]\right] \cup \left[f^{-1}(-\infty) \cap g^{-1}[-\infty, 0)\right] \cup \dots$ (f, g vertauscht) ist auch messbar.
Daher sei ohne Einschränkung $f, g : X \to \mathbb{R}$.
Es sind $+, \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, also messbar. Kompositionen messbarer Abbildungen sind messbar, $(f, g) : X \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $x \mapsto \big(f(x), g(x)\big)$ ist messbar, weil Rechtecke $\mathcal{B}_2$ erzeugen. Es folgt daher: $f + g, f \cdot g$ sind messbar und mit $g = const = \alpha$ auch $\alpha \cdot f$.
QED■

2.1.5 Bemerkung

Sei $\left(f_n : X \to \bar{\mathbb{R}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen. Dann gilt:

(1) $\sup_n(f_n)$, $\inf_n(f_n)$ sind messbar;

(2) $\limsup_n(f_n)$, $\liminf_n(f_n)$ sind messbar.

¡? Beweis ¿!

(1) $\{\sup_n f_n \leq a\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{f_n \leq a\}$ und der Schnitt messbarer Mengen ist messbar
$\inf(f_n) = -\sup(-f_n)$ und daher messbar.

(2) $g_n := \sup_{k \geq n}(f_k)$, $\limsup_{n \to \infty}(f_n) = \inf_n g_n$.
QED■

Korollar 2.1.
(a) $(f_n) \to f$ punktweise, f_n messbar $\forall n \in \mathbb{N}$. Dann ist auch f messbar.

(b) $f_1, \dots, f_n$ messbar, dann ist $\max(f_1, \dots, f_n)$ messbar.

(c) f messbar, dann $|f|$ messbar.

¡? Beweis ¿!

$|f| = \max(f, -f)$
QED■

2.2 Treppenfunktionen und Integral

Definition 2.2.
Eine messbare Funktion $s : X \to [0, \infty)$ heißt eine *nicht-negative Treppenfunktion*, $s \in \mathcal{T}$, wenn sie nur endlich viele Werte annimmt.

2.2.1 Kommentar

Für jede Teilmenge $A \subseteq X$ definiert man die charakteristische Treppenfunktion (Indikatorfunktion) durch

$$\chi_A : X \to \mathbb{R}\ , \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \in A \\ 0 & \text{für} \quad x \notin A \end{cases} .$$

Ist nun $s \in \mathcal{T}(X)$ und $Img(s) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$, so ist $A_j := s^{-1}(\alpha_j) \subseteq X$ messbar und offenbar

$$s = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \chi_{A_j} \ .$$

Umgekehrt ist jeder solcher Ausdruck (mit $A_j \in \mathcal{A},\ \alpha_j \geq 0$) ein Element in $\mathcal{T}(X)$.

Definition 2.3.
Sei $s : X \to [0, \infty)$ in $\mathcal{T}(X)$ und also $s = \sum_j \alpha_j \chi_{A_j}$ mit $\alpha_j \geq 0,\ A_j \in \mathcal{A}$ $(j = 1, \ldots, r)$ wobei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X ist. Ist μ ein Maß auf $\mathcal{A}$, so setzt man (das Integral)

$$\int s \ d\mu := \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \mu(A_j) \ .$$

2.2.2 Bemerkung

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum $s, t \in \mathcal{T}(X)$ und $\alpha \geq 0$. Dann gilt:

(1) $a \cdot s \in \mathcal{T}$ und $\int \alpha s \ d\mu = \alpha \int s \ d\mu$;

(2) $s + t \in \mathcal{T}$ und $\int (s + t) \ d\mu = \int s \ d\mu + \int t \ d\mu$;

(3) Aus $s \leq t$ folgt: $\int s \ d\mu \leq \int t \ d\mu$.

¡? Beweis ¿!
Sei

$$s = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \chi_{A_i} \quad , \quad t = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \chi_{A_j} \ .$$

Setze $C_{ij} = A_i \cap B_j$, $\alpha_{ij} := \alpha_i$, $\beta_{ij} := \beta_j$.
Dann folgt

$$s = \sum_{i,j} \alpha_{ij} \chi_{C_{ij}} \quad , \quad t = \sum_{i,j} \beta_{ij} \chi_{C_{ij}} \ .$$

O.B.d.A. sei also $r = m$ und $A_j = B_j$.

- $s = \sum_j \alpha_j \chi_{A_j} \Rightarrow \ \alpha s = \sum (\alpha \alpha_j) \chi_{A_j} \Rightarrow \int \alpha s \ d\mu = \sum (\alpha \alpha_j) \mu(A_j) = \alpha \int s \ d\mu$
- $t = \sum \beta_j \chi_{A_j} \Rightarrow \int (s + t) \ d\mu = \sum (\alpha_j + \beta_j) \mu(A_j) = \int s \ d\mu + \int t \ d\mu$
- $s = \sum_j \alpha_j \chi_{A_j}$, $t = \sum_j \beta_j \chi_{A_j}$. Aus $s \leq t$ folgt $\alpha_j \leq \beta_j \quad \forall j$. Damit gilt

$$\int s \ d\mu = \sum_j \alpha_j \mu(A_j) \leq \sum_j \beta_j \mu(A_j) \leq \int t \ d\mu \ .$$

QED■

Definition 2.4.
Sei $f : X \to [0, \infty]$ messbar. Man setzt

$$\int f \; d\mu = \sup \left\{ \int s \; d\mu \middle| s \in \mathcal{T}, s \leq f \right\} \in [0, \infty] \; .$$

Lemma 2.5.
Sei $f : X \to [0, \infty]$ eine messbare Funktion. Dann gibt es stets eine monoton wachsende Folge (s_n) in $\mathcal{T}(X)$, $s_n \leq s_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ von Treppenfunktionen mit $s_n \to f$.
Bezwichnung: $(s_n) \nearrow f$.

¡? Beweis ¿!

Setze $s_n : X \to [0, \infty)$,

$$s_n(x) = \begin{cases} \frac{k}{2^n} & \text{wenn } \; \frac{k}{2^n} \leq f(x) \leq \frac{k+1}{2^n} \; \text{ mit } k < n \cdot 2^n \quad k \in \mathbb{N}_0 \\ n & \text{wenn } \; f(x) \geq n \end{cases} \; .$$

Damit gilt:

$$|s_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2^n} \quad \forall x \in f^{-1}\big([0, n)\big) \; .$$

Daher folgt

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \forall x \in f^{-1}\big([0, \infty)\big) \; \exists n_0(\varepsilon, x) > 0 \;\; \forall n \geq n_0 : |s_n(x) - f(x)| < \varepsilon \; .$$

Für $x \in f^{-1}(\infty)$ folgt auch $\big(s_n(x)\big) \nearrow f(x) = \infty$. Insgesamt ist damit $s_n \in \mathcal{T}$ und $s_n \nearrow f$.
QED■

Lemma 2.6.
Sei $f : X \to [0, \infty]$ messbar und (s_n) in $\mathcal{T}$ eine Folge von Treppenfunktionen mit $(s_n) \nearrow f$.
Dann gilt

$$\int f \; d\mu = \lim_{n \to \infty} \int s_n \; d\mu \; .$$

10.05.2005

¡? Beweis ¿!

Nach Def von $\int f \; d\mu$ ist

$$\int s_n \; d\mu \leq \int f \; d\mu \; , \forall \, n \in \mathbb{N} \; ,$$

also auch

$$\int f \; d\mu \geq \sup_n \left(\int s_n \; d\mu \right) \; .$$

Weil $s_n \leq s_{n+1}$ ist, folgt $\left(\int s_n \; d\mu\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton wachsend, also ist

$$\sup_n \left(\int s_n \; d\mu \right) = \lim_n \left(\int s_n \; d\mu \right) \leq \int f \; d\mu$$

Es reicht daher zu zeigen:
Ist $t \in \mathcal{T}(x)$, $t \leq f$ beliebig, so folgt:

$$\int t \; d\mu \leq \lim_n \int s_n \; d\mu \; .$$

Es sei

$$t = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \chi_{A_j}$$

und wähle ein $\beta \in (0,1)$ beliebig. Setze nun

$$C_n := \{x \in X \big| s_n(x) \geq \beta t(x)\} \ .$$

Dann ist C_n messbar und $s_n \geq \beta t \chi_{C_n}$. Mit (2.2.2) folgt

$$\int s_n \ d\mu \geq \int \beta t \chi_{C_n} \ d\mu = \beta \int t \chi_{C_n} \ d\mu \ .$$

Wegen $s_n \leq s_{n+1}$ ist nun $C_n \subseteq C_{n+1}$ und wegen $(s_n) \longrightarrow f$ punktweise und $\beta < 1$ ist

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = X$$

(kurz: $(C_n) \nearrow X$). Damit folgt:

$$(C_n \cap A_j) \nearrow A_j \quad j = 1, \ldots, r \ .$$

Mit der Ausschöpfungsformel (1.1.7) ist

$$\int t \ d\mu = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \mu(A_j) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \lim_{n \to \infty} \mu(C_n \cap A_j) \ .$$

Wegen $t = \sum \alpha_j \chi_{A_j}$ ist andererseits:

$$\begin{aligned}
& t\chi_{c_n} = \sum \alpha_j \underbrace{\chi_{A_j}\chi_{C_n}}_{=\chi_{A_j \cap C_n}} = \sum \alpha_j \chi_{A_j \cap C_n} \ , \text{ aber} \\
& \int t\chi_{C_n} \ d\mu = \sum \alpha_j \mu(A_j \cap C_n) \ . \\
\Rightarrow \quad & \int t \ d\mu = \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum \alpha_j \mu(C_n \cap A_j) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \int t \chi_{C_n} \ d\mu \ . \\
\Rightarrow \quad & \lim_{n \longrightarrow \infty} \int s_n(x) \ d\mu \geq \beta \lim_{n \longrightarrow \infty} \int t\chi_{C_n} \ d\mu = \beta \int t \ d\mu \quad \forall \beta \in (0,1) \ . \\
\Rightarrow \quad & \lim_{n \longrightarrow \infty} \int s_n(x) \ d\mu \geq \int t \ d\mu \ .
\end{aligned}$$

QED■

2.2.3 Bemerkung

Seien $f, g : X \to [0, \infty]$ messbar, $\alpha \geq 0$. Es gilt dann:

(1) $\int \alpha f \ d\mu = \alpha \int f \ d\mu$;

(2) $\int (f+g) \ d\mu = \int f \ d\mu + \int g \ d\mu$;

(3) $f \leq g \Rightarrow \ \int f \ d\mu \leq \int g \ d\mu$.

¡? Beweis ¿!

(1) Sei (s_n) in $\mathcal{T}(X)$, $(s_n) \nearrow f$ (existiert gemäß Lemma 2.5.). Dann ist $(\alpha s_n) \nearrow \alpha f$ und $\alpha s_n \in \mathcal{T}(X)$. Nach 2.2.2 ist dann

$$\int \alpha f \, d\mu = \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(\int \alpha s_n \, d\mu \right) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(\alpha \int s_n \, d\mu \right) = \alpha \lim_{n \longrightarrow \infty} \int s_n \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu \ .$$

(2) ähnlich wie (1);

(3) sei $s_n \in \mathcal{T}(X)$, $(s_n) \nearrow f$. Dann ist $s_n \leq f \leq g \ \forall n \in \mathbb{N}$. Nach Definition folgt $\int s_n \, d\mu \leq \int g \, d\mu$

$$\Rightarrow \quad \int f \, d\mu = \lim_n \int s_n \, d\mu \leq \int g \, d\mu \ .$$

QED ■

Satz 2.7. Satz über monotone Konvergenz von B. Levi
Seien $f_n : X \to [0, \infty]$ messbar, $f_n \leq f_{n+1}$ und $f = \lim_{n \longrightarrow \infty} f_n$ Dann gilt:

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \longrightarrow \infty} \int f_n \, d\mu \ .$$

¡? Beweis ¿!

Wegen (2.2.3) und $f_n \leq f$ gilt: $\lim_{n \longrightarrow \infty} \int f_n \ d\mu \leq \int f \ d\mu$. Konstruiere nun $s_n \in \mathcal{T}(X)$ mit $(s_n) \nearrow f$, aber $s_n \leq f_n$.
Dann folgt mit Lemma 2.6.

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \longrightarrow \infty} s_n \, d\mu \leq \lim_{n \longrightarrow \infty} \int f_n \, d\mu$$

und die Behauptung ist bewiesen.

Zur Konstruktion: Sei $(t_{nk})_{k \in \mathbb{N}} \nearrow f_n$ mit $t_{nk} \in \mathcal{T}(X)$ nach Lemma 2.5. und setze

$$s_n := \max(t_{1n}, t_{2n}, \ldots, t_{nn}) \in \mathcal{T}(X) \ .$$

$$\begin{array}{cccccccc}
t_{11} & t_{12} & \mathbf{t_{13}} & t_{14} & \ldots & \nearrow & f_1 \\
t_{21} & t_{22} & \mathbf{t_{23}} & t_{24} & \ldots & \nearrow & f_2 \\
t_{31} & t_{32} & \mathbf{t_{33}} & t_{34} & \ldots & \nearrow & f_3 \\
t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} & \ldots & \nearrow & f_4 \\
 & & & & \vdots & &
\end{array}$$

Dann ist:

- $t_{jn} \leq f_j \leq f_n$ für $1 \leq j \leq n$. Damit:

$$s_n = \max_{j=1}^{n}(t_{jn}) \leq f_n \ .$$

- wegen $t_{jn} \leq t_{j,n+1}$ ist

$$s_n = \max\{t_{1n}, \ldots, t_{nn}\} \leq \max\{t_{1,n+1}, \ldots, t_{n,n+1}\} \leq s_{n+1} \ .$$

- Wegen $f_j = \lim_{n \longrightarrow \infty}(t_{jn})$ und $t_{jn} \leq s_n$ für $n \geq j$ ist
$$f_j \leq \lim_{n \longrightarrow \infty}(s_n) \quad \forall j \in \mathbb{N}\ .$$

Daher ist auch
$$f = \lim_{j \longrightarrow \infty}(f_j) \leq \lim_{n \longrightarrow \infty}(s_n) \leq \lim_{n \longrightarrow \infty}(f_n) = f\ ,$$
also
$$\lim(s_n) = f\ .$$

QED■

2.3 Integrierbarkeit

Definition 2.8.
Sei X ein Maßraum und $f : X \to \bar{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ eine messbare Funktion. Es heißt f *integrierbar*, wenn für
$$f_+ := \max\{f, 0\} \text{ und } f_- := \max\{-f, 0\}$$
(also $f = f_+ - f_-$) gilt: $\int f_+\ d\mu < \infty$ und $\int f_-\ d\mu < \infty$ und man setzt dann:
$$\int f\ d\mu = \int f_+\ d\mu - \int f_-\ d\mu \ \in \mathbb{R}\ .$$

2.3.1 Bemerkung

Sei $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ messbar. Es sind äquivalent:

(1) f ist integrierbar;

(2) $|f|$ ist integrierbar;

(3) Es gibt ein integrierbares $g : X \to [0, \infty]$ mit $|f| \leq g$.

¡? Beweis ¿!

- (1) $\Rightarrow$ (2) : $|f|$ messbar und $|f|_+ = f_+ + f_-$, $|f|_- = 0$ Daher ist $|f|$ integrierbar, denn $\int |f|_+\ d\mu = \int (f_+ + f_-)\ d\mu = \underbrace{\int f_+\ d\mu}_{<\infty} + \underbrace{\int f_-\ d\mu}_{<\infty} < \infty$;
- (2) $\Rightarrow$ (3) Wähle $g := |f|$;
- (3) $\Rightarrow$ (1) $|f| \leq g \Rightarrow f_+ \leq g\ ,\ f_- \leq g \Rightarrow \int f_+\ d\mu \leq \int g\ d\mu < \infty$ und $\int f_-\ d\mu \leq \int g\ d\mu < \infty$.

QED■

2.3.2 Bemerkung

Seien $f, g : X \to \bar{\mathbb{R}}$ integrierbar, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt

(1) αf ist integrierbar und $\int \alpha f\ d\mu = \alpha \int f\ d\mu$;

(2) (Ist $f+g$ auf ganz X definiert, so gilt:) $f+g$ ist integrierbar und $\int (f+g)\ d\mu = \int f\ d\mu + \int g\ d\mu$;

(3) Ist $f \leq g$, so ist $\int f\ d\mu \leq \int g\ d\mu$;

(4) $\left|\int f\ d\mu\right| \leq \int |f|\ d\mu$.

12.05.2005

¡? Beweis ¿!

(1) Für $\alpha \geq 0$ gilt

$$(\alpha f)_+ = \alpha f_+ \ , \ (\alpha f_-) = \alpha f_- \ .$$

Wegen $\int \alpha f_+ \ d\mu = \alpha \int f_+ \ d\mu$ und $\int \alpha f_- \ d\mu = \alpha f_- \ d\mu$ nach (2.2.3). Also ist αf integrierbar und

$$\int (\alpha f) \ d\mu = \int (\alpha f)_+ \ d\mu - \int (\alpha f)_- \ d\mu = \alpha \int f_+ \ d\mu - \int f_- \ d\mu = \alpha \int f \ d\mu \ .$$

(2) Wegen $|f+g| \leq |f| + |g|$ und (2.3.1) folgt $f+g$ ist integrierbar und mit $h := f+g$ gilt

$$h_+ - h_- = h = (f_+ - f_-) + (g_+ - g_-) \ ,$$

daher auch

$$h_+ + f_- + g_- = h_- + f_+ + g_+$$

und mit (2.2.3) weiter:

$$\int h_+ \ d\mu + \int f_- \ d\mu + \int g_- \ d\mu = \int h_- \ d\mu + \int f_+ \ d\mu + \int g_+ \ d\mu \ .$$

Daraus ergibt sich

$$\int h = \int h_+ - \int h_- = \left(\int f_+ - \int f_-\right) + \left(\int g_+ - \int g_-\right) = \int f \ d\mu + \int g \ d\mu \ .$$

(3) Aus $f \leq g$ folgt $f_+ \leq g_+ \ , \ f_- \geq g_-$. Also mit (2.2.3): $\int f = \int f_+ \ d\mu - \int f_- \ d\mu \leq \int g_+ \ d\mu - \int g_- \ d\mu = \int g \ d\mu$.

(4) $f \leq |f| \ , \ -f \leq |f|$ daher $\int f \ d\mu \leq \int |f| \ d\mu \ , \ -\int f \ d\mu \leq \int |f| \ d\mu$. Insgesamt

$$\left| \int f \ d\mu \right| \leq \int |f| \ d\mu \ .$$

QED■

Definition 2.9.
Sei X eine Menge und η eine Aussage über die Elemente von X (die für jedes $x \in X$ entweder richtig oder falsch ist). Ist μ ein Maß auf einer σ-Algebra $\mathcal{A}$, so sagt man η *gilt μ-fast überall (kurz: η f.ü.)* wenn es eine μ-Nullmenge $N \subseteq X$ gibt, so dass η für alle $x \in N^c$ richtig ist.

2.3.3 Beispiel

Ist $f : X \to \bar{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ integrierbar, so ist $f(x) \in \mathbb{R}$ fast überall, denn sei $N := |f|^{-1}(\infty)$. Dann folgt $\alpha \chi_N \leq |f| \ \forall \alpha > 0$, daher $\alpha \mu(N) = \int \alpha \chi_N \ d\mu \leq \int |f| \ d\mu < \infty$. Es folgt $\mu(N) = 0$.

2.3.4 Bemerkung

$f : X \to [0, \infty]$ sei messbar. Dann gilt

$$\int f \ d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ fast überall} \ .$$

¡? Beweis ¿!

Setze $N = \{x \in X | f(x) \neq 0\}$.

$\Rightarrow$ Setze $A_n = \{x \in X | f(x) \geq \frac{1}{n}\}$ und damit $A_n \subseteq A_{n+1}$ und $\bigcup A_n = N$, kurz $(A_n) \nearrow N$, und damit $\mu(N) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \mu(A_n)$. Zeige $\mu(A_n) = 0$:

$$\frac{1}{n}\chi_{A_n} \leq f \Rightarrow \frac{1}{n}\mu(A_n) = \int \frac{1}{n}\chi_{A_n}\ d\mu \overset{2.3.2(3)}{\leq} \int f\ d\mu = 0\ .$$

Es folgt

$$\mu(A_n) = 0\ .$$

$\Leftarrow$ Setze $s_n := n\chi_N$ und $g := \sup_n(s_n)$. Dann ist g messbar und $(s_n) \nearrow g$. Also

$$\int g\ d\mu \overset{\text{Lemma 2.6.}}{=} \lim_{n \longrightarrow \infty} \int s_n\ d\mu = \lim_{n \longrightarrow \infty} \big(n \underbrace{\mu(N)}_{\substack{=0,\ \text{weil}\ f=0 \\ \text{fast überall}}}\big) = 0\ .$$

Wegen $f \leq g$ is also

$$\int f\ d\mu \leq \int g\ d\mu = 0\ .$$

QED■

2.3.5 Kommentar

(1) Ändert man eine integrierbare Funktion auf einer Nullmenge ab, so bleibt sie also integrierbar und ihr Integral ändert sich nicht.

(2) Insbesondere darf man dies für die Nullmenge $|f|^{-1}(\infty)$ annehmen, d.h. für integrierbare Funktionen $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ darf man annehmen, das ihre Werte in $\mathbb{R}$ liegen. Man setzt dann

$$\mathcal{B}(\mu) := \{f : X \to \mathbb{R} | f \text{ ist integrierbar}\}\ .$$

(3) Die Bedingung 2.3.2(2) ist also redundant, denn $f + g$ ist offenbar fast überall definiert und das reicht aus.

Kapitel 3

Konvergenzsätze

12.05.2005

Motivation

Erinnere an den Konvergenzsatz von B. Levi $f_n : X \to [0, \infty]$ messbar, $n \in \mathbb{N}$ und wenn $(f_n) \nearrow f$, folgt f ist messbar und

$$\int f \; d\mu = \lim_{n \longrightarrow \infty} \int f_n \; d\mu$$

3.1 Konvergenzsätze

Lemma 3.1. Lemma von Fatou
Seien $f_n : X \to [0, \infty]$ messbar, $n \in \mathbb{N}$ Dann gilt

$$\int \liminf_{n \longrightarrow \infty} (f_n) \; d\mu \leq \liminf_{n \longrightarrow \infty} \left(\int f_n \; d\mu \right)$$

¡? Beweis ¿!

Setze $g_n := \inf_{k \geq n}(f_k) \Rightarrow g_n$ messbar und $(g_n) \nearrow f := \lim_{n \longrightarrow \infty}(g_n) = \liminf_{n \longrightarrow \infty}(f_n)$

$$\Rightarrow \quad \int f \; d\mu = \lim_{n \longrightarrow \infty} \int g_n \; d\mu \text{ (Levi).}$$

Andererseits ist $g_n \leq f_k \; \forall k \geq n$. Daher ist

$$\int g_n \; d\mu \leq \inf_{k \geq n} \int f_k \; d\mu \; .$$

Insgesamt

$$\int f \; d\mu = \lim_{n \longrightarrow \infty} \int g_n \; d\mu \leq \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(\inf_{k \geq n} \int f_k \; d\mu \right) = \liminf_{n \longrightarrow \infty} \left(\int f_n \; d\mu \right) \; .$$

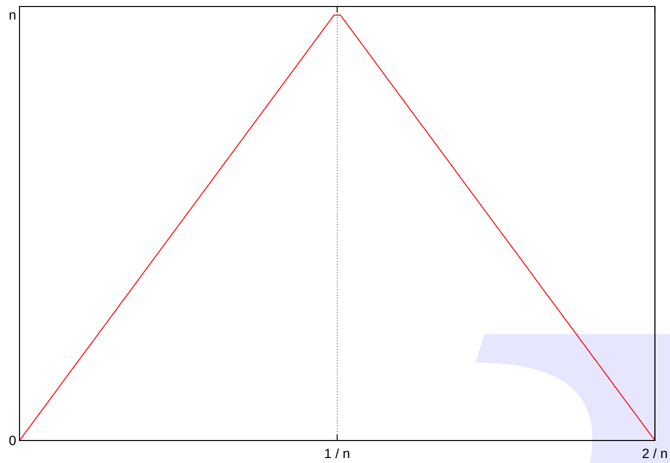
QED■

3.1.1 Beispiel

Aus dem ersten Semester ist bekannt: Im Allgemeinen kann aus bloßer punktweiser Konvergenz $(f_n) \longrightarrow f$ nicht folgen

$$\int \lim(f) \; d\mu = \lim \int f_n \; d\mu \; ,$$

z.B. gilt für die Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit folgendem Graph



$$(f_n) \longrightarrow 0 \ , \ \text{also} \ \int \lim(f_n) \ d\mu = 0 \ ,$$

aber

$$\lim_{n \to 0} \Big(\underbrace{\int f_n \ d\mu}_{=1} \Big) = 1 \ .$$

3.2 Majorisierte Konvergenz (Lebesgue)

Satz 3.2. majorisierte Konvergenz von H. Lebesgue
Seien $f_n : X \to \bar{\mathbb{R}}$ messbar und $(f_n) \longrightarrow f$ punktweise. Es sei $g : X \to [0, \infty]$ integrierbar mit $|f_n| \leq g$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann sind f_n, f integrierbar und es gilt

$$\int f \ d\mu = \lim_{n \longrightarrow \infty} \int f_n \ d\mu$$

¡? Beweis ¿!

Weil $|f_n| \leq g$ und daher auch $|f| \leq g$ ist, folgt f_n, f ist integrierbar. Es ist nun $f_n + g \geq 0$ und deshalb mit Fatous Lemma (Lemma 3.1.):

$$\begin{aligned}
\int g \ d\mu + \int f \ d\mu &= \int (g + f) \ d\mu = \int \lim_{n \longrightarrow \infty} (g + f_n) \ d\mu \\
&\leq \liminf_{n \longrightarrow \infty} \Big(\int (g + f_n) \ d\mu \Big) = \liminf_{n \longrightarrow \infty} \Big(\int g \ d\mu + \int f_n \ d\mu \Big) \\
&= \int g \ d\mu + \liminf_{n \longrightarrow \infty} \Big(\int f_n \ d\mu \Big) \ .
\end{aligned}$$

Wegen $\int g \ d\mu < \infty$ also:

$$\int f \ d\mu \leq \liminf_{n \longrightarrow \infty} \Big(\int f_n \ d\mu \Big) \ .$$

Es ist aber auch $g - f_n \geq 0$ und $\liminf_{n \longrightarrow \infty} \big(-\int f_n \ d\mu \big) = -\limsup_{n \longrightarrow \infty} \big(\int f_n d\mu \big)$, also:

$$\begin{aligned}
\int g \ d\mu - \int f \ d\mu &= \int \lim_{n \longrightarrow \infty} (g - f_n) \ d\mu \\
&\overset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{n \longrightarrow \infty} \Big(\int g \ d\mu - \int f_n \ d\mu \Big) \\
&= \int g \ d\mu + \liminf_{n \longrightarrow \infty} \Big(- \int f_n \ d\mu \Big) \\
&= \int g \ d\mu - \limsup_{n \longrightarrow \infty} (f_n \ d\mu)
\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\int f \ d\mu \geq \limsup_{n \longrightarrow \infty} (f_n \ d\mu)$$

und damit:

$$\int f\ d\mu \leq \liminf_{n\longrightarrow\infty}\left(\int f_n\ d\mu\right) \leq \limsup_{n\longrightarrow\infty}\left(\int f_n\ d\mu\right) \leq \int f\ d\mu\ .$$

Es folgt insgesamt $\int f_n\ d\mu$ ist konvergent und $\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(\int f_n\ d\mu\right) = \int f\ d\mu$.

QED$_\blacksquare$

19.05.2005

Satz 3.3. parameterabhängige Integrale
Sei X ein Maßraum und Y ein metrischer Raum (z.B. eine offenen Menge im $\mathbb{R}^n$). Sei $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ derart, dass gilt:

(a) für jedes $y \in Y$ ist $f_y : X \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto f(x,y)$ integrierbar;

(b) für jedes $x \in X$ ist $f_x : Y \to \mathbb{R}\ ,\ y \mapsto f(x,y)$ stetig;

(c) es gebe eine integrierbare Funktion (Majorante) $g : X \to [0,\infty]$, so dass

$$|f(x,y)| \leq g(x)\ ,$$

für alle $x \in X, y \in Y$.

Dann gilt $F : Y \to \mathbb{R}$

$$F(y) := \int f_x\ d\mu \quad \left(= \int f(x,y)\ d\mu(x)\right)$$

ist stetig.

¡? Beweis ¿!

Sei $y_0 \in Y$ und (y_n) Folge in Y mit $(y_n) \longrightarrow y_0$. Setze $f_n : X \to \mathbb{R}\ ,\ f_n(x) = f(x,y_n) = f_{y_n}(x) \Rightarrow (f_n) \longrightarrow f_0 := f_{y_0}$ punktweise wegen (b). Weil $|f_n| \leq g$ (Majorante) wegen (c) $\forall n \in \mathbb{N}$, folgt mit Lebesgue:

$$F(y_0) = \int f_0\ d\mu = \lim \underbrace{\int f_n\ d\mu}_{=F(y_n)} = \lim_{n\longrightarrow\infty} F(y_n)\ .$$

QED$_\blacksquare$

Satz 3.4.
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Dann ist f auch Lebesgue-integrierbar und es gilt

$$\int f\ d\lambda = \int_a^b f(x)\ dx$$

3.2.1 Kommentar

(1) Erinnere, dass für eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ das Ober- bzw. Unterintegral $\int_a^{b*} f(x)\ dx$ bzw. $\int_{a*}^b f(x)\ dx$ wie folgt definiert war:

$$\int_{a*}^b f(x)\ dx = \sup\left\{\int_a^b s(x)\ dx \ \middle|\ \begin{array}{l} s = \sum_{i=1}^r \alpha_i\chi_{[z_{i-1},z_i]} \text{ für eine Zerlegung} \\ \mathcal{Z} = (z_0,\ldots,z_n) \text{ von } [a,b]\ ,\ s \leq f \end{array}\right\}$$

Natürlich ist für $s = \sum \alpha_i\chi_{[z_{i-1},z_i]}$:

$$\int_a^b s(x)\ dx = \sum \alpha_i(z_i - z_{i-1}) = \int_{[a,b]} s\ d\lambda\ .$$

f heißt dann *Riemann-integrierbar*, wenn

$$\int_a^{b*} f(x)\, dx = \int_{a*}^b f(x)\, dx =: \int_a^b f(x)\, dx \ .$$

Es gilt dann: Ist $\mathcal{Z}^{(n)} = (x_0^{(n)}, \dots, x_{m_n}^{(n)})$ Folge von Zerlegungen mit Feinheit $(\delta_n) \longrightarrow 0$ (wobei die Feinheit δ von $\mathcal{Z} = (z_0, \dots, z_m)$ erklärt ist durch $\delta := \max_{i=1}^n (z_i - z_{i-1})$) und ist

$$\begin{aligned} \gamma_i &:= \inf\left\{ f(x) \middle| x \in [z_{i-1}, z_i] \right\} \ , \quad U(f, \mathcal{Z}) = \sum_{i=1}^m \gamma_i \chi_{[z_{i-1}, z_i]} \ , \\ \Gamma_i &:= \sup\left\{ f(x) \middle| x \in [z_{i-1}, z_i] \right\} \ , \quad O(f, \mathcal{Z}) = \sum_{i=1}^m \Gamma_i \chi_{[z_{i-1}, z_i]} \ , \end{aligned}$$

so folgt:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_a^b U_n(f, \mathcal{Z})\, dx = \lim_{n\longrightarrow\infty} \int_a^b O_n(f, \mathcal{Z})\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \ .$$

(2) Erinnere, dass die Lebesgue-Algebra $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ etwas größer als die Borel-Algebra $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ war, nämlich genau die Vervollständigung ($\mathcal{L}$ ist bzgl. des Lebesgue-Maßes $\lambda = \lambda^*|_{\mathcal{L}}$ vollständig, d.h. ist $M \in \mathcal{L}$ mit $\lambda(M) = 0$ und $N \subseteq M$, so ist auch $N \in \mathcal{L}$). $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt *Lebesgue-integrierbar*, wenn $f^{-1}(U) \in \mathcal{L}$ für alle offenen Mengen $U \subseteq \mathbb{R}$. Insbesondere gilt: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ $\mathcal{B}$ -messbar und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ erfülle $f = g$ fast überall, so ist g noch $\mathcal{L}$ -messbar.

Satz 3.5. Vergleich von Riemann- und Lebesgue-Integral
Sei $f : [a : b] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Dann ist f auch Lebesgue-integrierbar und es gilt:

$$\int_{[a,b]} f\, d\lambda = \int_a^b f(x)\, dx \ .$$

¡? Beweis ¿!

Für eine Zerlegung $\mathcal{Z} = \{a = z_0 < \cdots < z_m = b\}$ von $[a, b]$ setze γ_i, Γ_i $(i = 1, \dots, m)$ und $U(f, g), O(f, g)$ wie oben. Dann gilt

$$U(f, \mathcal{Z}) \le f \le O(f, \mathcal{Z}) \ .$$

Sei nun $(\mathcal{Z}_n)$ eine Folge von Zerlegungen mit Feinheit δ_n und $(\delta_n) \longrightarrow 0$ und außerdem $\mathcal{Z}_{n+1}$ feiner als $\mathcal{Z}_n$ (d.h. jedes Intervall von $\mathcal{Z}_{n+1}$ ist in einem von $\mathcal{Z}_n$ enthalten). Setze nun

$$\begin{aligned} u_n &= \int_a^b U(f, \mathcal{Z}_n)\, dx = \sum \gamma_i^{(n)} \left(z_i^{(n)} - z_{i-1}^{(n)} \right) \ , \\ o_n &= \int_a^b O(f, \mathcal{Z}_n)\, dx = \sum \Gamma_i^{(n)} \left(z_i^{(n)} - z_{i-1}^{(n)} \right) \ . \end{aligned}$$

Dann gilt $(o_n - u_n) \longrightarrow 0$ und $\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\longrightarrow\infty}(u_n)$. Weil $\mathcal{Z}_{n+1}$ feiner als $\mathcal{Z}_n$ ist, gilt: $U_n \le U_{n+1}$, $O_n \ge O_{n+1}$. Damit ist $O_n - U_n \le 0$ und $(O_n - U_n)$ ist monoton fallend. Setze $Q := \lim_{n\longrightarrow\infty}(O_n - U_n) \ge 0$. Dann ist Q $\mathcal{B}$ -messbar und mit Fatous-Lemma (Lemma 3.1.) gilt:

$$\begin{aligned} 0 \le \int Q\, d\lambda = \int \lim(O_n - U_n)\, d\lambda &\le \liminf_{n\longrightarrow\infty} \int (O_n - U_n)\, d\lambda \\ &\overset{\substack{\text{Treppen-}\\\text{Funktionen}}}{=} \liminf_{n\longrightarrow\infty} \int_a^b (O_n - U_n)\, dx \\ &= \lim_{n\longrightarrow\infty} (o_n - u_n) = 0 \ . \end{aligned}$$

$\Rightarrow \int Q \, d\lambda = 0$.

$\Rightarrow Q = 0$ λ-fast überall. Setze nun $\tilde{f} := \lim(U_n)$.

$\Rightarrow \tilde{f}$ ist $\mathcal{B}$ -messbar und $\tilde{f} = f$ λ-fast überall.

$\Rightarrow f$ ist wenigstens $\mathcal{L}$ -messbar und es ist

$$\int f \, d\lambda = \int \tilde{f} \, d\lambda \ .$$

Weil f Riemann-Integral ist, ist f insbesondere beschränkt. Sei $M > 0$ mit $|f| \leq M \;\Rightarrow\; |U_n| \leq M$ und die konstante Funktion $[a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto M$ ist integrierbar. Dann folgt (Lebesgue):

$$\int f \, d\lambda = \int \tilde{f} \, d\lambda = \lim_{n \longrightarrow \infty} \int U_n \, d\lambda = \lim(u_n) = \int_a^b f(x) \, dx \ .$$

QED■

3.2.2 Erinnere

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, so setzten wir

$$\mathcal{L}(\mu) = \{f : X \to \mathbb{R} | f \text{ integrierbar}\} \ .$$

Wir wissen bereits: $\mathcal{L}(\mu)$ ist ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum.
Beachte aber: Sind $f, g \in \mathcal{L}(\mu)$, so ist zwar $f \cdot g$ messbar, aber im Allgemeinen nicht mehr in $\mathcal{L}(\mu)$ enthalten, z.B. ist im Allgemeinen $f^2 \notin \mathcal{L}(\mu)$. Man setzt daher für $1 \leq p < \infty$ allgemeiner:

$$\mathcal{L}^p(\mu) := \{f : X \to \mathbb{R} | \, |f|^p \text{ integrierbar}\} \ .$$

3.3 „p-fach“ Integrierbarkeit

Definition 3.6.
Eine messbare Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt *p-fach integrierbar*, wenn $\int |f|^p \; d\mu < \infty$ ist. Man setzt dann $\|-\|_p : \mathcal{L}^p(\mu) \to [0, \infty)$ fest durch

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p \; d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \ .$$

3.3.1 Kommentar

$\|-\|$ erfüllt zunächst die folgende Homogenitätseigenschaft einer Norm: Ist $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ so ist auch $\lambda f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ und es ist $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \, \|f\|_p$ denn $\|\lambda f\|_p^p = \int |\lambda f|^p \; d\mu = \int |\lambda|^p \, |f|^p \; d\mu = |\lambda|^p \int |f|^p \; d\mu = |\lambda|^p \, \|f\|_p^p$.

3.3.2 Beispiel

Sei $X = \mathbb{N}$ und $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, \infty]$ das Zählmaß auf $\mathbb{N}$ ($\mu(\{n\}) = 1 \; \forall n \in \mathbb{N}$). Eine reelle Zahlenfolge (a_n) ist eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = a_n$. Jede davon ist messbar und für $p \geq 1$ genau dann p-integrierbar, wenn

$$\infty > \int |f|^p \; d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p$$

ist. Man schreibt

$$l^p(\mathbb{N}) = \mathcal{L}^p(\mathbb{N}, \mu) \ .$$

24.05.2005

Lemma 3.7.
Für alle $s, t \geq 0$ und für alle $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt:

$$s^{\frac{1}{p}} \cdot t^{\frac{1}{q}} \leq \frac{s}{p} + \frac{t}{q} \ .$$

¡? Beweis ¿!
Für $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist offenbar

$$\frac{d^2}{ds^2} \ln(s) = -\frac{1}{s^2} < 0 \ ,$$

also ist ln konkav, d.h. $\forall \lambda \in [0,1]$ und $s > 0, t > 0$ ist:

$$(1-\lambda)\ln(s) + \lambda \ln(t) \leq \ln\big((1-\lambda)s + \lambda t\big) \ .$$

Mit $\lambda := \frac{1}{q} \in (0,1)$ ist $(1-\lambda) = 1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$. Deshalb ist

$$\frac{1}{p}\ln(s) + \frac{1}{q}\ln(t) \leq \ln\left(\frac{s}{p} + \frac{t}{q}\right)$$

und damit

$$\ln(s^{\frac{1}{p}}) + \ln(t^{\frac{1}{q}}) \leq \ln\left(\frac{s}{p} + \frac{t}{q}\right) \ .$$

Exponenzieren der Ungleichung liefert

$$s^{\frac{1}{p}} \cdot t^{\frac{1}{q}} \leq \frac{s}{p} + \frac{t}{q}$$

und das ist offenbar auch für $s = 0$ oder $t = 0$ richtig.
QED■

Satz 3.8. Hölder
Seien $p, q > 1$ aus $\mathbb{R}$, so dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ist. Für alle messbaren Funktionen $f, g : X \to \mathbb{R}$ auf einem Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ gilt dann:

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \ .$$

3.3.3 Kommentar

(1) Diese *Höldersche Ungleichung* zeigt erneut die Nützlichkeit von $0 \cdot \infty := 0$ in der Maßtheorie. Ist zum Beispiel $\|f\|_p = 0$, so ist wegen 2.3.4 $f = 0$ μ-fast überall und damit auch $f \cdot g = 0$ fast überall, also $\|f \cdot g\|_1 = 0$. Also ist Hölders Ungleichung richtig, auch wenn g nicht q-integrierbar ist.

(2) Für den Fall $X = \{1, \ldots, n\}$ mit seinem Zählmaß μ kommt die Ungleichung auf die *klassische Hölder Ungleichung* im $\mathbb{R}^n$ herunter: Ist $f = (x_1, \ldots, x_n) =: x$ und $g = (y_1, \ldots, y_n) =: y$ so ist

$$|\langle x, y\rangle| = |\langle f, g\rangle| = \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q = (x_1^p, \ldots, x_n^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (y_1^q, \ldots, y_n^q)^{\frac{1}{q}} \ .$$

Insbesondere erhält man für $p = q = 2$ die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$|\langle x, y\rangle| = \|x\|_2 \, \|y\|_2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \ .$$

¡? Beweis ¿!

Wegen $\|f\|_p = \||f|\|_p$ kann man offenbar $f, g \geq 0$ annehmen. Ist $\|f\|_p = 0$ oder $\|g\|_q = 0$, so ist die Aussage offenbar richtig. Ist $\|f\|_p = \infty$ oder $\|g\|_q = \infty$, so ist sie ebenfalls richtig.
Sei **o.B.d.A.** deshalb

$$0 < a := \|f\|_p < \infty \quad , \quad 0 < b := \|g\|_q < \infty \ .$$

Für beliebiges $x \in X$ setze nun

$$s := \frac{f^p(x)}{a^p} \quad , \quad t := \frac{g^q(x)}{b^p} \ .$$

Mit Satz 3.8. folgt

$$\frac{1}{ab} fg = s^{\frac{1}{p}} t^{\frac{1}{q}} \overset{\text{Lemma 3.7.}}{\leq} \frac{s}{p} + \frac{t}{q} = \frac{f^p}{pa^p} + \frac{g^q}{qa^q} \ .$$

Integration über x liefert

$$\frac{1}{ab} \|fg\|_1 \leq \frac{1}{pa^p} \underbrace{\int f^p \ d\mu}_{=a^p} + \frac{1}{qb^q} \underbrace{\int g^q \ d\mu}_{=b^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \ .$$

Dann folgt

$$\|fg\|_1 \leq a \cdot b = \|f\|_p \|g\|_q \ .$$

QED■

Korollar 3.9. Minkowski
Sei $1 \leq p < \infty$ und $f, g : X \to \mathbb{R}$ seien p-fach integrierbar. Dann ist auch $f + g$ p-fach integrierbar und es gilt

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \ .$$

¡? Beweis ¿!

O.B.d.A. sei $f, g \geq 0$, denn wenn die Aussage für $|f|$, $|g|$ gilt, so auch für f, g. Wegen

$$(f+g)^p \leq (2 \cdot \max(f,g))^p = 2^p \max(f^p, g^p) \leq 2^p (f^p + g^p)$$

folgt, dass mit $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ auch $f + g \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Sei **o.B.d.A.** auch $p > 1$. (Für $p = 1$ gilt sogar die Gleichheit.) Nun ist

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p &= \int (f+g)^p \ d\mu \\
&= \int (f+g)(f+g)^{p-1} \ d\mu \\
&= \int f(f+g)^{p-1} \ d\mu + \int g(f+g)^{p-1} \ d\mu \\
&= \left\|f(f+g)^{p-1}\right\|_1 + \left\|g(f+g)^{p-1}\right\|_1 \\
&\overset{\text{Hölder}}{=} \|f\|_p \left\|(f+g)^{p-1}\right\|_q + \|g\|_p \left\|(f+g)^{p-1}\right\|_q
\end{aligned}$$

mit $\frac{1}{q} := 1 - \frac{1}{p}$, also $(p-1)q = p$. Deshalb gilt

$$\left\|(f+g)^{p-1}\right\|_q = \left[\int (f+g)^{(p-1)q} \ d\mu\right]^{\frac{1}{q}} = \left[\int (f+g)^p \ d\mu\right]^{\frac{p-1}{p}} = \|f+g\|_p^{p-1} \ .$$

Also ist

$$\|f+g\|_p^p \leq \left(\|f\|_p + \|g\|_p\right) \|f+g\|_p^{p-1} \ .$$

Es folgt die Behauptung $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.
QED■

3.3.4 Kommentar

(1) Minkowskis Korollar beschreibt also eine weitere Eigenschaft einer Normfunktion für $\|.\|_p : \mathcal{L}^p(\mu) \to [0, \infty)$. Als letzte Eigenschaft fehlt die Aussage $\|f\| = 0 \;\Leftrightarrow\; f = 0$, was aber i.a nicht erfüllt ist. Wir wissen aber, dass $\|f\|_p = 0 \;\Leftrightarrow\; f = 0$ fast überall. Daher betrachtet man den Unter-Vektorraum (Minkowski zeigt auch, dass $\mathcal{L}^p(\mu)$ ein Vektorraum ist)

$$N(\mu) = \{f \in \mathcal{L}^p(\mu) | f = 0 \text{ fast überall}\}$$

und setzt

$$L^p(\mu) := \mathcal{L}^p(\mu)/N(\mu) \quad \text{(Quotientenvektorraum)} .$$

(Zwei Funktionen werden als gleich angesehen, wenn sie sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden.) Dann ist auch $\|-\|_p : L^p(\mu) \to [0, \infty)$,

$$\|[f]\|_p := \|f\|_p$$

31.05.2005 wohldefiniert und macht $\|-\|$ zu einer Norm auf $L^p(\mu)$.

(2) $(L^p(\mu), \|-\|_p)$ ist im Allgemeinen ein normierter Vektorraum unendlicher Dimension, z.B. für $l^p(\mathbb{N}) = \{(x_n) | \sum |x_n|^p < \infty\}$ ist das System $(\varphi_1, \varphi_2, \dots)$ mit

$$\varphi_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$$

(1 an n-ter Position) linear unabhängig.

3.3.5 Vollständigkeit der L^p-Räume

Definition 3.10.

(a) Man nennt eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{L}^p(\mu)$ *im p-ten Mittel konvergent gegen f* (kurz *p-konvergent*) $(f_n) \xrightarrow{\mathcal{L}^p} f$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 > 0$ gibt, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$\|f_n - f\|_p < \varepsilon$$

(b) Es heißt (f_n) in $\mathcal{L}^p(\mu)$ eine *Cauchy-Folge* in $\mathcal{L}^p(\mu)$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 > 0$ gibt, so dass für alle $n > n_0$ gilt

$$\|f_n - f_m\| < \varepsilon$$

3.3.6 Kommentar

Der Grenzwert einer Folge (f_n) in $\mathcal{L}^p(\mu)$ ist offenbar im Allgemeinen nicht eindeutig. Ist nämlich $(f_n) \xrightarrow{\mathcal{L}^p} f$ und $f = g$ fast überall, so ist

$$\|f_n - g\|_p \leq \underbrace{\|f_n - f\|_p}_{\substack{n \\ \longrightarrow \\ \infty}\; 0} + \underbrace{\|f - g\|_p}_{=0} \;\underset{\infty}{\overset{n}{\longrightarrow}}\; 0 ,$$

also auch $(f_n) \xrightarrow{\mathcal{L}^p} g$.
Umgekehrt: Strebt (f_n) auch im p-ten Mittel gegen $g \in \mathcal{L}^p(\mu)$, so muss $f = g$ fast überall gelten. Der Grenzwert einer Folge $([f_n])_{n \in \mathbb{N}}$ in L^p ist natürlich eindeutig bestimmt.

Frage: Ist jede Cauchy-Folge (f_n) in $\mathcal{L}^p(\mu)$ auch gegen ein $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ konvergent?

Definition 3.11. Hilbert Raum

(a) Sei $(B, \|-\|)$ ein normierter Vektorraum. Man nennt dann $(B, \|-\|)$ *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge in B konvergiert. Ein vollständiger normierter Raum heißt ein *Banachraum*.

(b) Sei B ein reeller Vektorraumund $\langle -,- \rangle : B \times B \to \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt. Ist $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ und ist B bzgl. dieser Norm vollständig, so nennt man $(B, \langle -,- \rangle)$ einen *Hilbert Raum*.

3.3.7 Beispiel

Auf $L^2(\mu)$ definert man $\langle -,- \rangle : L^2(\mu) \times L^2(\mu) \to \mathbb{R}$ durch

$$\langle [f], [g] \rangle := \int fg \; d\mu$$

Wegen Hölders Ungleichung ($p = q = 2$) ist

$$|\langle f, g \rangle| \leq \int |fg| \; d\mu = \|fg\|_1 \overset{\text{Hölder}}{\leq} \|f\|_2 \, \|g\|_2 < \infty$$

$\langle -,- \rangle$ ist offenbar ein Skalarprodukt (Bilinearität, Symmetrie, positive Definitheit) und

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle} \; .$$

3.3.8 Kommentar

In ganz analoger Weise sagt man, dass ein *komplexer Vektorraum* ein komplexer Banachraum ist, wenn er vollständig ist. Ist $(B, \langle -,- \rangle)$ ein komplexer Vektorraum mit hermiteschem Produkt $\langle -,- \rangle : B \times B \to \mathbb{C}$, so dass bzgl. der induzierten Norm $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ Vollständigkeit vorliegt, so heißt $(B, \langle -,- \rangle)$ ein *komplexer Hilbert Raum*.

3.3.9 Beispiel

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : X \to \mathbb{C}$ messbar (d.h. $f^{-1}(U) \in \mathcal{A} \quad \forall U \subseteq \mathbb{C}$ offen). Ist $u = \Re(f)$, $v = \Im(f)$, so dass $f = u + i \cdot v$ ist, $u, v : X \to \mathbb{R}$ messbar, so heißt f *integrierbar*, wenn u und v es sind und man setzt dann

$$\int f \; d\mu := \int u \; d\mu + i \int v \; d\mu$$

Alle bisherigen Konzepte dehnen sich dann in natürlicher Weise auf $\mathbb{C}$ -wertige Funktionen aus, z.B.

$$\mathcal{L}^p(X, \mathbb{C}) := \left\{ f : X \to \mathbb{C} \text{ messbar} \middle| \int |f|^p \; d\mu < \infty \right\}$$

mit

$$\|f\|_p := \left(\int |f|^p \; d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \; .$$

Es ist dann $L^p(X, \mathbb{C}) = \mathcal{L}^p / N(\mu)$ zusammen mit $\|-\|_p$ ein komplexer normierter Raum für alle $p \geq 1$. Schließlich ist $(L^2(X, \mathbb{C}), \langle -,- \rangle)$ mit

$$\langle f, g \rangle = \int \overline{f} g \; d\mu (\text{in der Physik } = \int f^\dagger g \; d\mu)$$

ein komplexer Vektorraum mit *Hermitescher Form* $\langle -,- \rangle$.

Lemma 3.12.
Sei (f_n) Folge nicht-negativer messbarer Funktion auf X, $f_n : X \to [0, \infty)$ und $p \geq 1$. Dann gilt

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} f_n \right\|_p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p \; .$$

¡? Beweis ¿!

Setze $g_n := f_1 + \dots + f_n$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\|g_n\|_p = \|f_1 + \dots + f_n\|_p \le \|f_1\|_p + \dots + \|f_n\|_p \le \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

und damit

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \|g_n\|_p \le \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p \ .$$

Weil (g_n^p) monotone Folge ist und gegen g^p konvergiert mit

$$g := \sum_{k=1}^{\infty} f_k \ ,$$

$g : X \to [0, \infty]$, gilt nach Levi's Satz (Satz 2.7.):

$$\underbrace{\left\| \sum_n f_n \right\|_p}_{\|g\|_p} = \left(\int g^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\lim_{n \longrightarrow \infty} \int g_n^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(\int g_n^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \|g_n\|_p \le \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p \ .$$

QED■

Satz 3.13. Fischer-Riesz
Sei (f_n) eine Cauchy-Folge in $\mathcal{L}^p(\mu)$ ($(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum). Dann gilt:

(a) Es gibt ein messbares $f : X \to \mathbb{R}$ und eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, so dass $(f_{n_k}) \underset{\infty}{\overset{k}{\longrightarrow}} f$ punktweise fast überall konvergiert.

(b) Es ist dann f sogar in $\mathcal{L}^p(\mu)$ und (f_n) konvergiert gegen f im p-ten Mittel, $(f_n) \xrightarrow{\mathcal{L}^p} f$.

¡? Beweis ¿!

(a) Weil (f_n) Cauchy-Folge, existiert zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $n_k > 0$, so dass für alle $n, m \ge n_k$ gilt:

$$\|f_n - f_m\|_p < \frac{1}{2^k} \ .$$

O.B.d.A. sei auch $n_{k+1} \ge n_k$.
Setze nun $g_k := f_{n_{k+1}} - f_{n_k}$ und $\tilde{f} := \sum_{k=1}^{\infty} |g_k| : X \to [0, \infty]$. Nach dem Lemma ist

$$\|\tilde{g}\|_p \le \sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_p \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 < \infty \ ,$$

also $\tilde{g} \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Es folgt, dass $\tilde{g}(x) \in \mathbb{R}$ fast überall. Setze nun $N := \tilde{g}^{-1}(\infty)$ und $g : X \backslash N \to [0, \infty)$

$$g(x) := \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) \in \mathbb{R}$$

(existiert, weil $\sum g_k(x)$ sogar absolut konvergiert). Wegen $\sum_{j=1}^{k} g_j = f_{n_{k+1}} - f_{n_1}$ (alle anderen f_{n_j} heben sich gegenseitig weg) folgt nun

$$\big(f_{n_k}(x)\big)_{n \in \mathbb{N}} \longrightarrow g(x) + f_{n_1} \quad \forall x \in X \backslash N \ .$$

Setzt man nun etwa $f : X \to [0, \infty)$,

$$f(x) := \begin{cases} g(x) + f_{n_1} & \text{für } x \in X \backslash N \\ 0 & \text{für } x \in N \end{cases} \quad ,$$

so folgt $(f_{n_k}) \underset{\infty}{\overset{k}{\longrightarrow}} f$ punktweise fast überall. f ist auch messbar, weil N messbar ist und $f|_{X\backslash N} = \lim_{k\longrightarrow\infty} f_{n_k}$.

02.06.2005

(b) Behauptung: $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ und $\|f_n - f\|_p \underset{\infty}{\overset{n}{\longrightarrow}} 0$.

Erinnere: $(\alpha + \beta)^p \leq 2^p (\alpha^p + \beta^p)$. Dann ist

$$\begin{aligned} |f_{n_k}|^p &= |(f_{n_1} + g_1 + \cdots + g_{k-1})|^p \\ &\leq 2^p (|f_{n_1}|^p + (|g_1| + \cdots + |g_{k-1}|)^p) \\ &\leq 2^p (|f_{n_1}|^p + |\tilde{g}|^p) \end{aligned}$$

und $f_{n_1},\ g \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Man kann deshalb den Satz von Lebesgue Satz 3.2. (in der fast überall-Version) anwenden und findet, dass aus $(f_{n_k}) \longrightarrow f$ punktweise fast überall auch folgt, dass $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ und $\|f_{n_k}\|_p \longrightarrow \|f\|_p$, insbesondere $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Setze nun

$$h_{n_k} := 2^p (|f_{n_k}|^p + |f|^p) - |f_{n_k} - f|^p \ .$$

Daher ist $h_{n_k} \geq 0$ und $(h_{n_k}) \longrightarrow 2^{p+1} |f|^p$ punktweise fast überall. Mit Fatous Lemma Lemma 3.1. (in der fast überall-Version) ist deshalb weiter

$$\begin{aligned} 2^{p+1} \|f\|_p^p &= 2^{p+1} \int |f|^p \ d\mu \\ &\leq \liminf_{n\longrightarrow\infty} \int (2^p (|f_{n_k}|^p + |f|^p) - |f_{n_k} - f|^p) \ d\mu \\ &= 2^p \lim_{k\longrightarrow\infty} \left(\|f_{n_k}\|_p^p + \|f\|_p^p\right) - \limsup_{k\longrightarrow\infty} \|f_{n_k} + f\|_p^p \\ &= 2^{p+1} \|f\|_p^p - \limsup_{k\longrightarrow\infty} \|f_{n_k} + f\|_p^p \end{aligned}$$

und deshalb

$$\limsup_{k\longrightarrow\infty} \|f_{n_k} - f\|_p^p \leq 0 \ ,$$

also ist $\lim_{k\longrightarrow\infty} \|f_{n_k} - f\|_p = 0$, d.h. gerade $(f_{n_k}) \xrightarrow{\mathcal{L}^p} f$.

Schließlich: Wenn eine Cauchy-Folge einen Häufungspunkt hat, so konvergiert sie bereits gegen diesen, denn: Ist $\varepsilon > 0$ und $\tilde{n}_0 > 0$ so groß, dass $\|f_n - f_m\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$, für alle $n, m \geq \tilde{n}_0$ wähle nun ein $k_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass $n_{k_0} > \tilde{n}_0$ ist und $\|f_{n_k} - f\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann gilt für alle $n \geq n_{k_0} =: n_0$:

$$\|f_n - f\| \leq \|f_n - f_{n_0}\|_p + \|f_{n_0} - f\|_p < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ .$$

Also konvergiert tatsächlich die ganze Folge (f_n) im p-ten Mittel gegen f.

QED■

3.3.10 Kommentar

(1) Wir haben Fatous Lemma und Lebesgues Satz in der fast überall-Version benutzt. Die Aussagen gelten nämlich auch, wenn nur $(f_n) \longrightarrow f$ punktweise fast überall (und $f_n \geq 0$ fast überall im Fatuos Fall bzw. $|f_n| \leq g$ fast überall im Lebesgue Fall) ist, in dem man die Aussagen auf $X\backslash N$ für eine geeignete μ-Nullmenge betrachtet.

(2) Es ist also $\mathcal{L}^p(\mu)$ für alle $1 \leq p < \infty$ ein Banchraum und für $p = 2$ sogar ein Hilbertraum!

Kapitel 4

Produktmaße

02.06.2005

Motivation

Seien (X_1, μ_1) und (X_2, μ_2) Maßräume. Kann man auf X_1, X_2 in „natürlicher Weise“ ein Maß, „$\mu_1 \otimes \mu_2$,“ definieren?

4.1 Existenz und Eindeutigkeit

Definition 4.1.
Sei $\mathcal{A}_1$ eine σ-Algebra auf X_1 und $\mathcal{A}_2$ eine σ-Algebra auf X_2. Mit $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{P}(X_1 \times X_2)$ wird die von allen Mengen $A_1 \times A_2$, wo $A_1 \in \mathcal{A}_1$ und $A_2 \in \mathcal{A}_2$ ist, erzeugte σ-Algebra bezeichnet.

4.1.1 Kommentar

$\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 = \{A_1 \times A_2 \in \mathcal{P}(X_1 \times X_2) | A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}$ ist im Allgemeinen keine σ-Algebra. Deshalb muss die nun von $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ erzeugte σ-Algebra mit einer anderen Bezeichnung versehen werden: $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$.

4.1.2 Bemerkung

Sei $\mathcal{M}_i \subseteq \mathcal{A}_i$ ein Erzeuger von $\mathcal{A}_i$ $\quad (i = 1, 2)$ und es gebe eine Ausschöpfung $(M_n^i)_{n \in \mathbb{N}} \nearrow X_i$ $\quad (i = 1, 2)$. Dann ist $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 = \{M_1 \times M_2 | M_1 \in \mathcal{M}_1 \ , \ M_2 \in \mathcal{M}_2\}$ ein Erzeuger für $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$.

¡? Beweis ¿!

Sei $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X_1 \times X_2)$ das Erzeugnis von $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$. Da $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 \subseteq \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 =: \mathcal{A}$ ist, ist klar: $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. Andererseits betrachte $\mathcal{B}_1 := \{B_1 \subseteq X_1 | B_1 \times X_2 \in \mathcal{B}\}$. Dann folgt: $\mathcal{B}_1$ ist σ-Algebra und für $M_1 \in \mathcal{M}_1$ gilt

$$M_1 \times X_2 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{M_1 \times M_n^2}_{\in \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2} \in \mathcal{B} \ .$$

Also $M_1 \in \mathcal{B}_1 \quad \forall M_1 \in \mathcal{M}_1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{B}_1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{B}_1$ d.h.: $\forall A_1 \in \mathcal{A}_1$ gilt also $A_1 \times X_2 \in \mathcal{B}$. Ähnlich sieht man $X_1 \times A_2 \in \mathcal{B} \quad \forall A_2 \in \mathcal{A}_2$.

$$\Rightarrow A_1 \times A_2 = \underbrace{(A_1 \times X_2)}_{\in \mathcal{B}} \cap \underbrace{(X_1 \times A_2)}_{\in \mathcal{B}} \in \mathcal{B}$$

$$\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{B} \quad \overset{\substack{\mathcal{A} \text{ Erzeugnis} \\ \text{von } \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2}}{\Rightarrow} \quad \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$$

QED■

Korollar 4.2.
Bezeichnet $\mathcal{B}^n \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ die Borel-Algebra auf $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, so gilt

$$\mathcal{B}^n = \underbrace{\mathcal{B}^1 \otimes \mathcal{B}^1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}^1}_{n\text{-mal}} \ .$$

¡? Beweis ¿!

Bezeichne $\mathcal{Q}^n \subseteq \mathcal{B}^n$ den Erzeuger aller Quader. Es besitzt $\mathcal{Q}^n$ auch eine Ausschöpfung von $\mathbb{R}^n$ und $\mathcal{Q}^n \times \mathcal{Q}^m = \mathcal{Q}^{n+m}$. Mit Bemerkung 4.1.2 folgt $\mathcal{B}^n \otimes \mathcal{B}^m = \mathcal{B}^{n+m} \quad \forall n, m \geq 1$.
Induktion liefert $\mathcal{B}^1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}^1 = \mathcal{B}^n$.
QED$_\blacksquare$

4.1.3 Frage

Seien nun μ_1, μ_2 Maße auf $(X_1, \mathcal{A}_1)$ bzw. $(X_2, \mathcal{A}_2)$. Kann man nun ein Maß $\mu_1 \otimes \mu_2$ auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ finden, welches für alle $A_1 \in \mathcal{A}_1$, $A_2 \in \mathcal{A}_2$ erfüllt:

$$\mu_1 \otimes \mu_2(A_1 \times A_2) = \mu(A_1) \cdot \mu(A_2) \ ?$$

Erinnere: Ein Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ heißt σ-*endlich*, wenn es eine Ausschöpfung (A_n) in $\mathcal{A}$, $(A_n) \nearrow X$, gibt mit

$$\mu(A_n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N} \ .$$

4.1.4 Bemerkung

Sind $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ σ-endliche Maßräume, so gibt es höchstens ein Maß μ auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, welches für alle $A_1 \in \mathcal{A}_1$, $A_2 \in \mathcal{A}_2$ erfüllt:

$$\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2) \ .$$

07.06.2005

¡? Beweis ¿!

Die Menge $\mathcal{M} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ ist ein durchschnittsstabiler Erzeuger von $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ und besitzt auch eine maßendliche Ausschöpfung von $X_1 \times X_2$. Ist nämlich $\big(A_n^{(i)}\big)$ mit $\big(A_n^{(i)}\big) \nearrow X_i$, $\mu_i\big((A_n^{(i)})\big) < \infty \ (i = 1, 2)$, so ist $\big(A_n^{(1)} \times A_n^{(2)}\big)$ Auschöpfung von $X_1 \times X_2$ und $\mu\big(A_n^{(1)} \times A_n^{(2)}\big) = \mu_1\big(A_n^{(1)}\big)\mu_2\big(A_n^{(2)}\big) < \infty$.
Dann folgt mit Satz 1.8.: μ ist durch seine Werte auf $\mathcal{M}$ bereits festgelegt.
QED$_\blacksquare$

4.1.5 Notation

Für $A \subseteq X_1 \times X_2$ und $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$ bezeichne

$$A_{x_2} = \{x_1 \in X_1 | (x_1, x_2) \in A\} \subseteq X_1 \ ,$$

$$A_{x_1} = \{x_2 \in X_2 | (x_1, x_2) \in A\} \subseteq X_2$$

den x_1- *bzw.* x_2-*Schnitt von* A in X_1 bzw. X_2.

Lemma 4.3.
Sei $\mathcal{A}_i$ eine σ-Algebra auf $X_i \quad (i = 1, 2)$ und $x_i \in X_i$. Für jedes $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ ist dann der Schnitt $A_{x_2} \in \mathcal{A}_1$ bzw. $A_{x_1} \in \mathcal{A}_2$.

¡? Beweis ¿!

Für $x_2 \in X_2$ setzt man

$$\mathcal{B} := \{B \subseteq X_1 \times X_2 | B_{x_2} \in \mathcal{A}_1\} \ .$$

$\mathcal{B}$ ist σ-Algebra und $A_1 \times A_2 \in \mathcal{B} \ \ \forall A_1 \in \mathcal{A}_1 \ \ \forall A_2 \in \mathcal{A}_2$, denn

$$(A_1 \times A_2)_{x_2} = \begin{cases} A_1 & \text{wenn } x_2 \in A_2 \\ \emptyset & \text{wenn } x_2 \notin A_2 \end{cases} \in \mathcal{A}_1 \ .$$

Also ist $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{B}$ und damit $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{B}$, d.h. $\forall A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$: $A_{x_2} \in \mathcal{A}_1$.

QED$_\blacksquare$

Lemma 4.4.
Seien $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ σ-endliche Maßräume und $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Dann sind die Funktionen $s^i_A : X_i \to [0, \infty]$,

$$s^{(1)}_A(x_1) = \mu_2(A_{x_1}) \qquad s^{(2)}_A(x_2) = \mu_1(A_{x_2})$$

$(i = 1, 2)$ $\mathcal{A}_i$-messbar.

¡? Beweis ¿!

Bezeichne $s_A := s^{(1)}_A : X_1 \to [0, \infty]$ und betrachte zunächst den Fall $\mu_2(X_2) < \infty$.
Bezeichne dann weiter mit ϑ das System

$$\vartheta := \{A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 | s_A \text{ messbar}\} \subseteq \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \ .$$

Behauptung: ϑ ist Dynkin System.
Denn

- $X := X_1 \times X_2 \in \vartheta$, weil $s_X(x_1) = \mu_2(\underbrace{X_{x_1}}_{=X_2}) = \mu(X_2) = c = const.$, also ist s_X messbar.

- $D \in \vartheta$, zeige $D^c \in \vartheta$:
  Es ist $(D^c)_{x_1} = (D_{x_1})^c$ und daher wegen $\mu_2(X_2) < \infty$

  $$s_{D^c}(x_1) = \mu_2 \underbrace{(D^c_{x_1})}_{X_2 \setminus D_{x_1}} = \mu_2(X_2) - \mu_2(D_{x_1}) = c - s_D(x_1) \ ,$$

  also ist mit s_D auch S_{D^c} messbar.

- $D_n \in \vartheta$ $(n \in \mathbb{N})$, $\ D_n \cap D_m = \emptyset \ \ \forall m \neq n$, zeige $\dot{\bigcup} D_n \in \vartheta$:
  Denn

  $$s_{\dot{\cup} D_n}(x_1) = \mu_2\left(\left(\dot{\bigcup} D_n\right)_{x_1}\right) = \mu_2\left(\dot{\bigcup} (D_n)_{x_1}\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_2\left((D_n)_{x_1}\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} s_n(x_1)$$

  wobei $s_n := s_{D_n}$. Also ist $s_{\dot{\bigcup} D_n}$ messbar. Damit ist ϑ ein Dynkin-System.
  Weiter gilt $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \subseteq \vartheta$, denn für $A_1 \in \mathcal{A}_1$, $A_2 \in \mathcal{A}_2$ ist

  $$s_{A_1 \times A_2} = \mu_2(A_2) \chi_{A_1} \ ,$$

  also messbar. Weil $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ durchschnittsstabil ist, gilt für das von $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ erzeugt Dynkin-System $\tilde{\vartheta}$ nach Lemma 1.7.: $\tilde{\vartheta} \subseteq \vartheta \subseteq \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ und $\tilde{\vartheta} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, denn $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ ist die von $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ erzeugte σ-Algebra. Daher ist $\vartheta = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, d.h. s_A ist messbar $\forall A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$.

Betrachte nun den Fall $\mu_2(X_2) = \infty$. Sei $(B_n) \nearrow X_2$ und $\mu_2(B_n) < \infty$. Setze dann für $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$

$$s_{A,n} : X_1 \to [0, \infty] \ , \ s_{A,n}(x) = \mu_2(A_{x_1} \cap B_n) \ .$$

Damit ist auch $s_{A,n}$ messbar (nach erstem Fall) und

$$s_A = \sup_{n \in \mathbb{N}} (s_{A,n})$$

(nach der Ausschöpfungsformel). Also ist auch s_A messbar.
QED$_\blacksquare$

Satz 4.5. Existenz und Eindeutigkeitssatz von Produktmaßen
Seien $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ Maßräume, die σ-endlich sind. Dann existiert auf der Produktalgebra $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ genau ein Maß μ, so dass für alle $A_1 \in \mathcal{A}_1$ und $A_2 \in \mathcal{A}_2$ gilt:

$$\mu(A_1 \times A_2) = \mu(A_1)\mu(A_2) \ .$$

¡? Beweis ¿!

Eindeutigkeit: Siehe 4.1.4
Existenz: Man setze für $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \int_{X_1} \mu_2(A_{x_1}) \, d\mu_1 \ , \\ \tilde{\mu}(A) &= \int_{X_2} \mu_1(A_{x_2}) \, d\mu_2 \ . \end{aligned}$$

Behauptung: μ ist ein Maß.
Denn zunächst ist $\mu(\emptyset) = 0$. Sei nun $A = \dot{\bigcup}_{n \in \mathbb{N}} A_n$, $A_n \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, $s_A : X_1 \to [0, \infty]$ wie in Lemma 4.4.. Dann folgt $s_A = \sum_{n \in \mathbb{N}} s_{A_n}$ (weil μ_2 Maß). Die Partialsummen bilden eine monotone Folge nicht-negativer, messbarer Funktionen, also gilt mit Satz 2.7. (Levi):

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \int_{X_1} s_A \, d\mu_1 = \int \sum_n s_{A_n} \, d\mu_1 \\ &\overset{\text{Levi}}{=} \sum_n \underbrace{\int s_{A_n} \, d\mu_1}_{=\mu(A_n)} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) \ . \end{aligned}$$

Also ist μ ein Maß auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Wegen

$$s_{A_1 \times A_2} = \mu_2(A_2)\chi_{A_1}$$

ist

$$\mu(A_1 \times A_2) = \int \mu_2(A_2)\chi_{A_1} \, d\mu_1 = \mu_2(A_2) \underbrace{\int \chi_{A_1} \, d\mu_1}_{=\mu_1(A_1)} = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2) \ .$$

Ähnlich sieht man: $\tilde{\mu}$ ist auch ein Maß mit $\tilde{\mu}(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)$. Wegen der Eindeutigkeit gilt dann $\tilde{\mu} = \mu$.
QED$_\blacksquare$

4.1.6 Kommentar

Man bezeichnet das Produktmaß $\mu = \tilde{\mu}$ mit $\mu_1 \otimes \mu_2$. Der Beweis zeigt, dass es die Formeln erfült:

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(A) = \int_{X_1} \mu_2(A_{x_1}) \, d\mu_1 = \int_{X_2} \mu_1(A_{x_2}) \, d\mu_2$$

Korollar 4.6. Cavalieris Prinzip
Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und für $p = m, n, m+n$ bezeichne λ^p das Borel-Lebesgue'sche-Maß auf der Borel-Algebra von $\mathbb{R}^p$. Für jede Borelmenge $A \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ ist dann

$$A_x = \{y \in \mathbb{R}^n | (x,y) \in A\}$$

bzw.

$$A_y = \{x \in \mathbb{R}^m | (x,y) \in A\}$$

Borel-messbar, für alle $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$ und es gilt

$$\lambda^{m+n}(A) = \int_{\mathbb{R}^m} \lambda^n(A_x)\, d\lambda^m(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda^m(A_y)\, d\lambda^n(y) \ .$$

¡? Beweis ¿!

Nach Korollar 4.2. ist $\mathcal{B}^{n+m} = \mathcal{B}^n \otimes \mathcal{B}^m$ (wo $\mathcal{B}^p \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^p)$ die Borel-Algebra auf $\mathbb{R}^p$ bezeichne). Und weil λ^{n+m} und $\lambda^n \otimes \lambda^m$ auf den Quadern $\mathcal{Q}^{n+m}$ übereinstimmen, folgt mit Satz 1.8.

$$\lambda^{n+m} = \lambda^m \otimes \lambda^n \ .$$

Die Behauptung liefert daher Satz 4.5. (bzw. Kommentar 4.1.6).
QED■

4.1.7 Beispiel (Kugelvolumen)

Bezeichne für $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\omega_n := \lambda^n(\mathbb{B}^n)$$

das Volumen der n-dimensionalen *Einheitskugel*

$$\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n | \, \|x\| \leq 1\} \ .$$

Dann gilt

$$\omega_n = \begin{cases} \frac{1}{k\,!}\pi^k & \text{für } n = 2k \\ \frac{2^{k+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2k+1)}\pi^k & \text{für } n = 2k+1 \end{cases} \ .$$

Insbesondere ist $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = \pi$, $\omega_3 = \frac{4}{3}\pi$, $\omega_4 = \frac{1}{2}\pi^2$.

09.06.2005

Setze $\mathbb{B}^n(r) := \{x \in \mathbb{R}^n | \, \|x\| \leq r\}$, $r > 0$. Nach Satz 1.18. folgt mit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto rx$

$$\lambda^n\big(\mathbb{B}^n(r)\big) = \lambda^n\big(T(\mathbb{B}^n)\big) = |\det T|\, \lambda^n(\mathbb{B}^n) = \omega_n r^n \ .$$

Mit Korollar 4.6. (Cavalieri) folgt nun

$$\omega_{n+1} = \lambda^{n+1}(\mathbb{B}^{n+1}) = \int_{[-1,+1]} \lambda^n\left(\mathbb{B}^n\big(\sqrt{1-t^2}\big)\right) d\lambda^n(t) = \int_{-1}^{1} \omega_n (1-t^2)^{\frac{n}{2}}\, dt = c_n \omega_n$$

mit $c_n := \int_{-1}^{+1} (1-u^2)^{\frac{n}{2}}\, du$. Daher folgt mit $u = \cos t$, $du = -\sin t\, dt$:

$$c_n = -\int_{\pi}^{0} \left[(1-\cos^2 t)^{\frac{1}{2}}\right]^n \sin t\, dt = \int_0^{\pi} \sin^{n+1} t\, dt \ .$$

Partielle Integration mit

$$\begin{aligned} u(t) &= \sin^n t & v(t) &= -\cos t \\ u'(t) &= n \sin^{n-1} t \cos t & v'(t) &= \sin t \end{aligned}$$

liefert:

$$\begin{aligned} c_n &= -\sin^n t \cos t|_0^\pi + \int_0^\pi n \sin^{n-1} t \cos^2 t \; dt \\ &= n \int_0^\pi \left(\sin^{n-1} t - \sin^{n+1} t\right) \; dt \qquad (n \geq 1) \\ &= n(c_{n-2} - c_n) \; . \end{aligned}$$

Daraus $c_n = \frac{n}{n+1} c_{n-2}$. Es ist $c_{-1} = \int_0^\pi \; dt = \pi$, $c_0 = \int_0^\pi \sin t \; dt = -\cos t|_0^\pi = 2$. Daher

$$c_1 = \frac{1}{2} c_{-1} = \frac{1}{2}\pi \; .$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} c_{2k} \cdot c_{2k-1} &= \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-1}{2k} \cdot c_{2k-2} \cdot c_{2k-3} \\ &= \frac{2k-1}{2k+1} \cdot \frac{2k-3}{2k-1} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{3} \cdot c_0 c_{-1} \\ &= \frac{2\pi}{2k+1} \; , \\ c_{2k+1} \cdot c_{2k} &= \frac{2k+1}{2k+2} \cdot \frac{2k}{2k+1} \cdot c_{2k-1} \cdot c_{2k-2} \\ &= \frac{2k}{2k+2} \cdot \frac{2k-2}{2k} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{4} \cdot c_1 c_0 \\ &= \frac{2\pi}{2k+2} \; , \\ \Rightarrow c_n c_{n-1} &= \frac{2\pi}{n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0 \; . \end{aligned}$$

Mit $\omega_0 = 1$ und $\omega_1 = 2$ folgt daher

$$\begin{aligned} \omega_{2k} &= c_{2k-1} \cdot c_{2k-2} \cdot \omega_{2k-2} \\ &= \frac{2\pi}{2k} \cdot \omega_{2k-2} \\ &= \frac{2\pi}{2k} \cdot \frac{2\pi}{2k-2} \cdot \ldots \cdot \frac{2\pi}{2} \cdot \omega_0 \\ &= \frac{\pi}{k} \cdot \frac{\pi}{k-1} \cdot \ldots \cdot \frac{\pi}{1} \cdot \omega_0 \\ &= \frac{\pi^k}{k\,!} \cdot \omega_0 \; , \\ \omega_{2k+1} &= \frac{2\pi}{2k+1} \cdot \ldots \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot \omega_1 \\ &= \frac{2^k \pi^k}{(2k+1) \cdot \ldots \cdot 3} \cdot \omega_1 \\ &= \frac{2^{k+1}}{(2k+1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 1} \cdot \pi^k \; . \end{aligned}$$

4.2 Der Satz von Fubini

4.2.1 Notation

Für $f : X_1 \times X_2 \to \bar{\mathbb{R}}$ bezeichne für $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$

$$\begin{aligned} f_{x_1} &: \quad X_2 \to \bar{\mathbb{R}} \; , \; x_2 \mapsto f(x_1, x_2) \; , \\ f_{x_2} &: \quad X_1 \to \bar{\mathbb{R}} \; , \; x_1 \mapsto f(x_1, x_2) \; . \end{aligned}$$

4.2.2 Kommentar

Wegen

$$\mu_2(A_{x_1}) = \int \chi_{A_{x_1}}\ d\mu_2 \quad \text{bzw.} \quad \mu_1(A_{x_2}) = \int \chi_{A_{x_2}}\ d\mu_1$$

lesen sich Cavalieris Formeln so:

$$\begin{aligned}\int \chi_A\ d(\mu_1 \otimes \mu_2) &= (\mu_1 \otimes \mu_2)(A) \\ &= \int_{X_1} \mu_2\left(A_{x_1}\right)\ d\mu_1 \\ &= \int_{X_2} \mu_1\left(A_{x_2}\right)\ d\mu_2 \\ &= \int_{X_1} \left(\int_{X_2} \chi_{A_{x_1}}\ d\mu_2\right)\ d\mu_1 \\ &= \int_{X_2} \left(\int_{X_1} \chi_{A_{x_2}}\ d\mu_1\right)\ d\mu_2\ .\end{aligned}$$

Deshalb ist Cavalieris Prinzip Spezialfall des folgenden Satzes:

Satz 4.7. Tonelli
Seien (X_1, μ_1) und (X_2, μ_2) σ-endliche Maßräume und $\mu_1 \otimes \mu_2$ das Produktmaß auf $X_1 \times X_2$. Sei $f : X_1 \times X_2 \to [0, \infty]$ eine messbare Funktion. Dann gilt:

(a) Für alle $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$ sind auch die Funktionen $f_{x_1} : X_2 \to [0, \infty]$ und $f_{x_2} : X_1 \to [0, \infty]$ messbar;

(b) die Funktionen $X_1 \to [0, \infty]$ bzw $X_2 \to [0, \infty]$ mit

$$x_1 \mapsto \int_{X_2} f_{x_1}\ d\mu_2 \quad \text{bzw.} \quad x_2 \mapsto \int_{X_1} f_{x_2}\ d\mu_1$$

sind messbar;

(c)

$$\int_{X_1} \left(\int_{X_2} f_{x_1}\ d\mu_2\right)\ d\mu_1 = \int_{X_2} \left(\int_{X_1} f_{x_2}\ d\mu_1\right)\ d\mu_2 = \int_{X_1 \times X_2} f\ d(\mu_1 \otimes \mu_2)\ .$$

¡? Beweis ¿!

Teil 1:
Sei $f = s$ eine nicht-negative Treppenfunktion $s = \sum_{i=1}^r \alpha_i \chi_{A_i}$ mit $\alpha_i \geq 0$, $A_i \subseteq X_1 \times X_2$ messbar ($r \in \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, r$).

Behauptung: Toneli's Satz gilt für s:
Es ist nämlich $s_{x_1} = \sum \alpha_i (\chi_{A_i})_{x_1} = \sum \alpha_i \chi_{(A_i)_{x_1}}$ eine Treppenfunktion (und damit insbesondere messbar) auf X_2 und es gilt

$$\int s_{x_1}\ d\mu_2 = \sum \alpha_i \mu_2\big((A_i)_{x_1}\big)\ .$$

Nach Lemma 4.4. ist damit auch $x_1 \mapsto \int_{X_2} s_{x_1}\ d\mu_2$ messbar. Nach Cavalieris Prinzip (Korollar 4.6. bzw. der Definition von $(\mu_1 \otimes \mu_2)$) ist daher

$$\int_{X_1} \left(\int_{X_2} s_{x_1}\ d\mu_2\right)\ d\mu_1 = \sum \alpha_i \int \mu_2\big((A_i)_{x_1}\big)\ d\mu_1 = \sum \alpha_i (\mu_1 \otimes \mu_2)(A_i) = \int_{X_1 \times X_2} s\ d(\mu_1 \otimes \mu_2)\ .$$

Ähnlich sieht man

$$\int_{X_2} \left(\int_{X_1} s_{x_2}\ d\mu_1\right)\ d\mu_2 = \int_{X_1 \times X_2} s\ d(\mu_1 \otimes \mu_2)\ .$$

Teil 2:
Sei nun $f : X_1 \times X_2 \to [0,\infty]$ messbar, sonst beliebig. Wähle nun eine Folge (s_n) von Treppenfunktionen mit $(s_n) \nearrow f$. Dann gilt $(s_n)_{x_1} \nearrow f_{x_1}$, also ist f_{x_1} messbar. Nach Levis Satz (in X_1) (Satz 2.7.) ist

$$\int_{X_2} f_{x_1}\ d\mu_2 = \lim_{n\longrightarrow\infty} \int_{X_2} (s_n)_{x_1}\ d\mu_2\ .$$

Wegen Lemma 4.4. ist $u_n : X_1 \to [0,\infty]\ ,\ u(x_1) = \int (s_n)_{x_1}\ d\mu_2$ messbar und wegen Levi's Satz (Satz 2.7.) ist $(u_n) \nearrow g_1$ wobei $g_1(x_1) = \int f_{x_1}\ d\mu_2$. Also ist auch g_1 messbar und erneut mit Levi's Satz ist

$$\begin{aligned}
\int_{X_1}\left(\int_{X_2} f_{x_1}\ d\mu_2\right) d\mu_1 &= \int_{X_1} g_1\ d\mu_1 \\
&\overset{\text{Levi}}{=} \lim_n \int_{X_1} u_n\ d\mu_1 \\
&= \lim_n \int_{X_1}\left(\int_{X_2} (s_n)_{x_1}\ d\mu_2\right) d\mu_1 \\
&\overset{\text{Teil 1}}{=} \lim_n \int_{X_1\times X_2} s_n\ d(\mu_1\otimes\mu_2) \\
&\overset{\substack{\text{Levi}\\ X_1\times X_2}}{=} \int_{X_1\times X_2} f\ d(\mu_1\otimes\mu_2)\ .
\end{aligned}$$

QED$_\blacksquare$

4.2.3 Beispiel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\ dt = \sqrt{\pi}$$

Denn: Setze $I := \int_0^\infty e^{-t^2}\ dt$. Dann ist mit $t =: xy$ für festes $y > 0$ zunächst $dt = y\ dx$, also

$$I = \int_0^\infty y e^{-x^2y^2}\ dx \quad \forall y > 0\ .$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
I^2 &= \left(\int_0^\infty y e^{-x^2y^2}\ dx\right)\cdot\left(\int_0^\infty e^{-y^2}\ dy\right) \\
&= \int_0^\infty\left(\int_0^\infty y e^{-x^2y^2}\ dx\right) e^{-y^2}\ dy \\
&= \int_0^\infty\left(\int_0^\infty y e^{-x^2y^2} e^{-y^2}\ dx\right) dy \\
&= \int_0^\infty\left(\int_0^\infty y e^{-y^2(x^2+1)}\ dx\right) dy \\
&\overset{\text{Tonelli}}{=} \int_0^\infty\left(\int_0^\infty y e^{-y^2(x^2+1)}\ dy\right) dx\ .
\end{aligned}$$

Mit $u = y^2(1+x^2)$ bei festem $x > 0$ folgt

$$du = 2(1+x^2)y\ dy$$

und damit $y\,dy = \frac{du}{2(1+x^2)}$. Es folgt

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \frac{1}{2(1+x^2)} e^{-u}\,du\right)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} \underbrace{\left(\int_0^\infty e^{-u}\,du\right)}_{=-e^{-u}|_0^\infty=1}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \frac{1}{2}\arctan x|_0^\infty \\ &= \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}-0) = \frac{\pi}{4}\ . \end{aligned}$$

Damit folgt

$$I = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\ ,$$

also

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}\ .$$

14.06.2005

Satz 4.8. Fubini
Seien (X_1, μ_1) und (X_2, μ_2) σ-endliche Maßräume, $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$ das Produktmaß auf $X_1 \times X_2$ und $f : X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Dann gilt:

(a) Für μ_1-fast alle $x_1 \in X_1$ bzw. μ_2-fast alle $x_2 \in X_2$ sind auch die Funktionen $f_{x_1} : X_2 \to \mathbb{R}$ bzw. $f_{x_2} : X_1 \to \mathbb{R}$ integrierbar;

(b) die (fast überall definierten) Funktionen $g_1 : X_1 \to \mathbb{R}$ bzw. $g_2 : X_2 \to \mathbb{R}$,

$$g_1(x_1) := \int_{X_2} f_{x_1}\,d\mu_2 \quad , \quad g_2(x_2) := \int_{X_1} f_{x_2}\,d\mu_1$$

sind integrierbar und es gilt

$$\int_{X_1} g_1\,d\mu_1 = \int_{X_2} g_2\,d\mu_2 = \int_{X_1\times X_2} f\,d\mu\ .$$

¡? Beweis ¿!

Es ist $|f|_{x_1} = |f_{x_1}|$ und $(f^+)_{x_1} = (f_{x_1})^+$, $(f^-)_{x_1} = (f_{x_1})^-$. Mit Tonelli ist nun

$$\infty > \int_{X_1\times X_2} |f|\,d\mu \overset{\text{Tonelli}}{=} \int_{X_1}\left(\int_{X_2} |f_{x_1}|\,d\mu_2\right)\,d\mu_1\ .$$

Also gibt es eine Nullmenge $N_1 \subseteq X_1$, so dass $\int_{X_2} |f_{x_1}|\,d\mu_2 < \infty$ ist, für alle $x_1 \in X_1 \backslash N_1$. Die Funktion f_{x_1} ist also für $x_1 \in X_1\backslash N_1$ integrierbar.
Nach Definition des Integrals ist nun für alle $x_1 \in X_1\backslash N_1$:

$$g_1(x_1) = \int_{X_2} f_{x_1}^+\,d\mu_2 - \int_{X_2} f_{x_1}^-\,d\mu_2\ .$$

Erneute Anwendung von Tonelli's Satz impliziert, dass $x_1 \mapsto \int_{X_2} f_{x_1}^+\,d\mu_2$ messbar ist und sogar integrierbar, denn

$$\int_{X_1}\left(\int_{X_2} f_{x_1}^+\,d\mu_1\right)\,d\mu_1 \overset{\text{Tonelli}}{=} \int_{X_1\times X_2} f^+\,d\mu < \infty\ .$$

Ähnlich ist

$$\int_{X_1}\left(\int_{X_2} f_{x_1}^- \, d\mu_1\right) \, d\mu_1 \overset{\text{Tonelli}}{=} \int_{X_1\times X_2} f^- \, d\mu < \infty \ .$$

Also ist $g_1 : X_1\backslash N_1 \to \mathbb{R}$ integrierbar und es ist

$$\begin{aligned}\int_{X_1} g_1 \, d\mu_1 \quad &= \quad \int_{X_1}\left(\int_{X_2} f_{x_1}^+ \, d\mu_1\right) \, d\mu_1 - \int_{X_1}\left(\int_{X_2} f_{x_1}^- \, d\mu_1\right) \, d\mu_1 \\ &\overset{\text{Tonelli}}{=} \quad \int_{X_1\times X_2} f^+ \, d\mu - \int_{X_1\times X_2} f^- \, d\mu \\ &= \quad \int_{X_1\times X_2} f \, d\mu \ .\end{aligned}$$

QED■

4.2.4 Kommentar

Fubinis Satz sagt insbesondere, dass es nicht auf die Reihenfolge der Integration ankommt. Zum Beispiel für das Borel-Lebesgue'sche Maß λ^n auf $\mathbb{R}^n$ und jeder stetigen Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit kompakten Träger (nur auf einem Kompaktum von Null verschieden) folgt, dass $\int_{\mathbb{R}^n} f \ d\lambda^n$ als iteriertes Riemann-Integral berechnet werden kann:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda^n \quad &= \quad \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\dots\int_{\mathbb{R}} f(x_1,x_2,\dots,x_n) \, d\lambda^1_{x_1}\dots \, d\lambda^1_{x_{n-1}} \, d\lambda^1_{x_n} \\ &= \quad \int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\dots\Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2,\dots,x_n) \, dx_1\Big)\dots \, dx_{n-1}\Big) \, dx_n \ .\end{aligned}$$

Kapitel 5

Die Transformationsformel

14.06.2005

Motivation

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, λ_D das Borel-Lebesgue'sche Maß auf der Borel-Algebra von D und $f : D \to \mathbb{R}$ eine λ_D-integrierbare Funktion. Das Integral

$$\int_D f(x)\,dx := \int_D f\,d\lambda_D \left(= \int_{\mathbb{R}^n} \bar{f}\,d\lambda \ \text{ mit } \bar{f} := \begin{cases} f & \text{auf} \quad D \\ 0 & \text{auf} \quad \mathbb{R}^n \setminus D \end{cases} \right)$$

möchte man häufig durch einen Koordinatenwechsel

$$\Phi : G \to D\ ,\ y \mapsto \Phi(y) = x\ ,\ G \subseteq \mathbb{R}^n \ \text{ Gebiet}$$

ausrechnen.
Frage: Wie transformiert sich das „x-Integral" $\int_D f(x)\,dx$ in ein „y-Integral" für $f \circ \Phi$ über G?

5.1 Die Transformationsformel für lineare Transformationen

5.1.1 Erinnere

1. Seien $G, D \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiete. Eine bijektive Abbildung $\Phi : G \to D$ heißt ein *Diffeomorphismus*, wenn Φ und $\Phi^{-1} : D \to G$ stetig differenzierbar sind.

2. Für jedes $y \in G$ ist $D\Phi(y) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine (invertierbare) lineare Abbildung. Die *Operatornorm* für lineare Abbildungen $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$\|T\| := \max\left\{ |Tx| \,\middle|\, |x| = 1 \right\}$$

und erfüllt $\|TS\| \leq \|T\| \cdot \|S\|$ und $|Tx| \leq \|T\| \cdot |x|$ für alle $T, S \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)\ ,\ x \in \mathbb{R}^n$
Stetige Differenzierbarkeit von Φ impliziert dann, dass

$$D \to (0, \infty)\ ,\ y \mapsto \|D\Phi(y)\|\ ,$$

stetig ist.

5.1.2 Notation

Ist $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet (oder auch nur Borelsch), so bezeichnet $\mathcal{B}_D$ die Borel-Algebra auf D, d.h. $A \in \mathcal{B}_D \Leftrightarrow A$ Borelsch und $A \subseteq D$ und λ_D stets das Borel-Lebesgue Maß auf $(D, \mathcal{B}_D)$. Eine messbare Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ meint stets Borel-messbar und integrierbar meint λ_D-integrierbar.

5.1.3 Bemerkung

Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein linearer Diffeomorphismus, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $G := T^{-1}(D)$. Dann gilt für jede messbare Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, dass auch $g : G \to \mathbb{R}$,

$$g(y) := |\det T| \cdot f \circ T(y)$$

messbar ist und f ist λ_D-integrierbar, so ist auch g λ_G-integrierbar. In diesem Falle gilt dann

$$\int_D f(x)\ dx = \int_G g(y)\ dy\ .$$

¡? Beweis ¿!

Wir wissen bereits aus Satz 1.18., dass für jede Borel-Menge $A \subseteq G$ gilt

$$\lambda\big(T(A)\big) = |\det T|\ \lambda(A)\ .$$

Ist daher $s = \sum_{i=1}^r \beta_i \chi_{B_i}$ eine Treppenfunktion auf D, $\beta_i \geq 0$, $B_i = T(A_i)$ messbar, so gilt

$$\int_D s\ dx = \sum_{i=1}^r \beta_i \lambda(B_i) \overset{\text{Satz 1.18.}}{=} |\det T| \sum_{i=1}^r \beta_i \lambda(A_i) = |\det T| \int_G s \circ T\ dy$$

wegen $s \circ T = \sum \beta_i (\chi_{B_i} \circ T) = \sum \beta_i \chi_{A_i}$ und $\chi_{B_i} \circ T = \chi_{A_i}$ $(i = 1, \dots, r)$.

Ist nun $f : D \to [0, \infty]$ messbar, so auch $f \circ T : G \to [0, \infty]$, denn T ist als Homöomorphismus $(\lambda_g - \lambda_D)$-messbar. Schreibt man $f = \lim(s_m)$ mit $(s_m) \nearrow f$ für geeignete Treppenfunktionen s_m $(m \in \mathbb{N})$, so zeigt Satz 2.7. (Levi), dass mit $g := |\det T|\,(f \circ T)$ gilt:

$$\int_D f\ d\lambda = \int_G g\ d\lambda\ ,$$

denn $\big(|\det T|\,(s_m \circ T)\big) \nearrow g$.

Für integrierbare Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ beweist man nun die Aussage durch Übergang zu f_+ und f_-.
QED$_\blacksquare$

5.1.4 Kommentar

Ist $\Phi : G \to D$ ein beliebiger (nicht notwendig linearer) Diffeomorphismus, $y_0 \in G$, so ist $D\Phi(y_0)$ (bis auf eine Verschiebung) in einer Umgebung $V_0 \subseteq G$ eine gute Approximation von Φ. Überdeckt man G disjunkt mit solchen Umgebungen $V_k := V(y_k)$ $k \in \mathbb{N}$, so wird in etwa gelten:

$$\begin{aligned}
\int_D f(x)\ dx \quad &= \quad \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{\Phi(V_k)} f(x)\ dx \\
&\overset{\Phi|_{V_k} \sim D\Phi(y_k)}{\approx} \quad \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{V_k} (f \circ \Phi)\,|\det T\ D\Phi(y_k)|\ dy \\
&\approx \quad \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{V_k} (f \circ \Phi)(y)\,|\det D\Phi(y)|\ dy \\
&= \quad \int_G (f \circ \Phi)\,|\det D\Phi|\ dy\ .
\end{aligned}$$

16.06.2005

Definition 5.1.
Ist $\Phi : G \to D$ ein Diffeomorphismus zwischen Gebieten $D, G \subseteq \mathbb{R}^n$, so nennt man die stetige Funktion $J_\Phi : G \to (0, \infty)$,

$$J_\Phi(y) = |\det D\Phi(y)|$$

die *Jacobische von* Φ.

Satz 5.2. Transformationsformel
Seien $G, D \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiete, $\Phi : G \to D$ ein Diffeomorphismus und $J_\Phi : G \to (0, \infty)$ die Jacobische von Φ. Für jede messbare Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist dann auch die Funktion

$$g : G \to \mathbb{R},\ g(y) = f \circ \Phi(y) \cdot J_\Phi(y)$$

messbar und es gilt: Ist f integrierbar, so auch g und man erhält

$$\int_D f(x)\, dx = \int_G g(y)\, dy\ .$$

5.1.5 Kommentar

(1) Symbolisch merkt man sich die Transformation so

$$dx = J_\Phi(y)\, dy\ .$$

(2) Für $n = 1$ ist die Transformation gerade die Substitutionsregel, denn ist $G = (\alpha, \beta)$ und $D = (a, b)$ und $\Phi : G \to D$ ein Diffeomorphismus, so ist Φ monoton wachsend ($\Phi' > 0$) oder monoton fallend ($\Phi' < 0$). Für $\Phi' < 0$ etwa ist dann $\Phi(\alpha) := b$ und $\Phi(\beta) := a$ eine stetige Fortsetzung von Φ auf $[\alpha, \beta] \to [a, b]$ und es ist dann

$$J_\Phi(y) = |\det \Phi'(y)| = -\Phi'(y)\ .$$

Also ist

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\, dx &= \int_{(a,b)} f(x)\, dx \\ &\overset{\text{Transform.}}{=} \int_{(\alpha,\beta)} f \circ \Phi(-\Phi')\, dy \\ &= -\int_\alpha^\beta f \circ \Phi(y)\Phi'(y)\, dy \\ &= \int_\beta^\alpha f \circ \Phi(y)\Phi'(y)\, dy \end{aligned}$$

(sogar für jedes $f \in \mathcal{L}^1\big((a, b)\big)$).

Korollar 5.3.
Sei $\Phi : G \to D$ ein Diffeomorphismus und $J_\Phi : G \to (0, \infty)$ ihre Jacobische. Für jede Borelmenge $A \subseteq G$ gilt dann, dass $\Phi(A) \subseteq D$ auch Borelsch ist und

$$\lambda(\Phi(A)) = \int_A J_\Phi(y)\, dy\ .$$

¡? Beweis ¿!

Mit $f = \chi_{\Phi(A)}$ ist natürlich $f \circ \Phi = \chi_A$ und deshalb

$$\lambda(\phi_(A)) = \int_D \chi_{\Phi(A)}\, dx \stackrel{\text{Transform.}}{=} \int_G \chi_A J_\Phi\, dy = \int_A J_\Phi\, dy$$

QED$\blacksquare$

5.1.6 Beispiel

Sei $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$ die Einheitskreisscheibe,

$$\Delta = \{(x,y)|x^2+y^2<1\}\ ,\ D = \Delta\backslash\{(x,y)\in\Delta|y=0,\ x\geq 0\}$$

und

$$\Phi : (0,1)\times(0,2\pi)\to D$$

gegeben durch

$$\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)\ .$$

Dann ist Φ offenbar bijektiv und sogar ein Diffeomorphismus, weil Φ stetig differenzierbar ist und für die Jacobische von Φ gilt:

$$J_\Phi(y) = \left|\det\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}\right| = |r| = r \neq 0$$

und damit ist nach dem Umkehrssatz auch Φ^{-1} stetig differenzierbar. Weil nun $\overline{\Delta}\backslash D$ eine Borel-Nullmenge ist (warum?) gilt mit $f=1$ erneut:

$$\begin{aligned}\omega_2 &= \lambda(B^2) \stackrel{\substack{\text{Weil}\\ \lambda(\overline{\Delta}\backslash D)=0}}{=} \lambda(D) \stackrel{\text{Korollar 5.3.}}{=} \int_G J_\Phi(r,\theta)\, dr\, d\theta\\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\, dr\, d\theta = \int_0^1 r\, dr \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{2}r\Big|_0^1\cdot 2\pi = \pi\ .\end{aligned}$$

5.2 Maße mit Gewichten und Bildmaße

Definition 5.4.
Sei $(X,\mathcal{A},\mu)$ ein Maßraum und $\rho : X \to [0,\infty]$ eine messbare Funktion. Man nennt dann $\tilde{\mu} : \mathcal{A}\to[0,\infty]$

$$\tilde{\mu}(A) = \int_A \rho\, d\mu$$

das *Maß der Dichte* ρ *bzgl.* μ. Bezeichnung $\tilde{\mu} = \rho\mu$.

5.2.1 Kommentar

Für $\rho = 1$ ist natürlich $\tilde{\mu} = \mu$. Man stellt sich $\tilde{\mu}$ so vor, dass (im Vergleich zu μ) nun jeder Punkt $x\in X$ „das Gewicht“ $\rho(x)\geq 0$ bekommt.

5.2.2 Notation

Ist $F : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ messbar, und μ ein Maß auf $\mathcal{A}$, so nennt man das Maß $\nu : \mathcal{B} \to [0, \infty]$,

$$\nu(B) := \mu\big(F^{-1}(B)\big)$$

das *Bildmaß von μ unter F* Bezeichnung $\nu = F_*(\mu)$.

Mit diesen Begriffen wird nun Korollar 5.3. zu der folgenden Aussage: Ist $\Phi : G \to D$ ein Diffeomorphismus und J_Φ seine Jacobische, so gilt für das Borel-Lebesgue-Maß λ_D bzw. λ_G:

$$\Phi_*^{-1}(\lambda_D) = J_\Phi \lambda_G \ , \tag{5.1}$$

denn

$$\big(\Phi_*^{-1}(\lambda_D)\big)(A) = \lambda_D\big(\Phi(A)\big) \overset{\text{Korollar 5.3.}}{=} \int_A J_\Phi \; d\lambda_G = (J_\Phi \lambda_G)(A) \quad \forall A \in \mathcal{B}_G \ .$$

5.2.3 Bemerkung

Die Gleichung (5.1) (als Gleichheit von Maßen auf $(G, \mathcal{B}_G)$) ist äquivalent zur Transformationsformel.

¡? Beweis ¿!

- Die Transformation liefert die Gleichung.
- Die Gleichung zeigt die Transformationsformel für charakteristische Funktionen $f = \chi_{\Phi(A)}$, $A \subseteq G$ Borelsch. Wie in 5.1.3 sieht man dann, dass die Transformationsformel für Treppenfunktionen $s = \sum_{i=1} \beta_i \chi_{\beta_i}$ gilt, mit Satz 2.7. (Levi) für messbare $f : D \to [0, \infty]$ und schließlich durch Zerlegung in f_+ und f_- auch für beliebige integrierbare Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$.

QED$\blacksquare$

Lemma 5.5.
Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es eine Überdeckung von abgeschlossenen Kugeln $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$, so dass gilt

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda(B_k) = \lambda(Q) + \varepsilon \ .$$

¡? Beweis ¿!

Elementar, aber lang.
QED$\blacksquare$

5.2.4 Bemerkung

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ beliebig und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es eine Kugelüberdeckung $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von A, so dass gilt

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda(B_k) \leq \lambda^*(A) + \varepsilon \ .$$

¡? Beweis ¿!

Sei $(Q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Quaderüberdeckung von A, so dass gilt:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(Q_i) \leq \lambda^*(A) + \frac{\varepsilon}{2}$$

nach Definition des äußeren Lebesgue Maßes $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$. Für jedes $i \in \mathbb{N}$ sei nun $(B_{ij})_{j\in\mathbb{N}}$ eine Kugelüberdeckung von Q_i nach Lemma 5.5., so dass

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(B_{ij}) \quad \leq \quad \lambda(Q_i) + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$$

ist. Es ist dann $(B_{ij})_{ij}$ eine Kugelüberdeckung von A und

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{\infty} \lambda(B_{ij}) &= \sum_{i=1}^{\infty} \Big(\lambda(Q_i) + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}\Big) \\ &\leq \Big(\lambda^*(A) + \frac{\varepsilon}{2}\Big) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \lambda^*(A) + \varepsilon \ . \end{aligned}$$

QED■

5.2.5 Kommentar

Hätten wir bereits am Anfang gewusst (oder festgelegt), wie groß das Volumen der Einheitskugel ist, hätten wir wegen Lemma 5.5. also die Lebesgue Maßtheorie auch mit Kugeln anstelle von Quadern aufbauen können, also etwa:

$$\lambda^*(A) = \inf\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(B_k) \,\middle|\, (B_k)_{k\in\mathbb{N}} \ \text{ Kugelüberdeckung von } A \right\} \ .$$

21.06.2005

5.3 Beweis der Transformationsformel

5.3.1 Erinnere

Man nennt eine Abbildung $F : G \to \mathbb{R}^n$, $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, *Lipschitz-stetig*, wenn es eine Konstante $L > 0$ gibt, so dass für alle $x, y \in G$ gilt

$$|F(x) - F(y)| \leq L \cdot |x - y| \ .$$

L heißt dann eine Lipschitz-Konstante für F.

Proposition 5.6.
Sei $F : G \to \mathbb{R}^n$ eine Lipschitz-Abbildung mit Lipschitzkonstante $L > 0$ und λ^* das Lebesgue'sche äußere Maß auf $\mathbb{R}^n$. Dann gilt für jede Teilmenge: $A \subseteq G$

$$\lambda^*(F(A)) \leq L^n \cdot \lambda^*(A) \ .$$

(Insbesondere für Nullmengen!)

¡? Beweis ¿!

Ist $B \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Kugel vom Radius $r > 0$, sagen wir $B = B(y_0, r) = \{y : |y - y_0| \leq r\}$, so ist

$$\lambda^*\big(\underbrace{F(B \cap G)}_{\subseteq B(F(y_0), L\cdot r)} \big) \leq \lambda\big(B(F(y_0)), L \cdot r) = (L \cdot r)^n \cdot \omega_n = L^n \lambda(B) \ ,$$

wobei ω_n das Volumen der Einheitskugel bezeichnet. Ist nun $A \subseteq G$ beliebig, so wähle zu $\varepsilon > 0$ eine Kugelüberdekung $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von A, so dass

$$\sum \lambda(B_k) \leq \lambda^*(A) + \varepsilon$$

ist. Dann ist

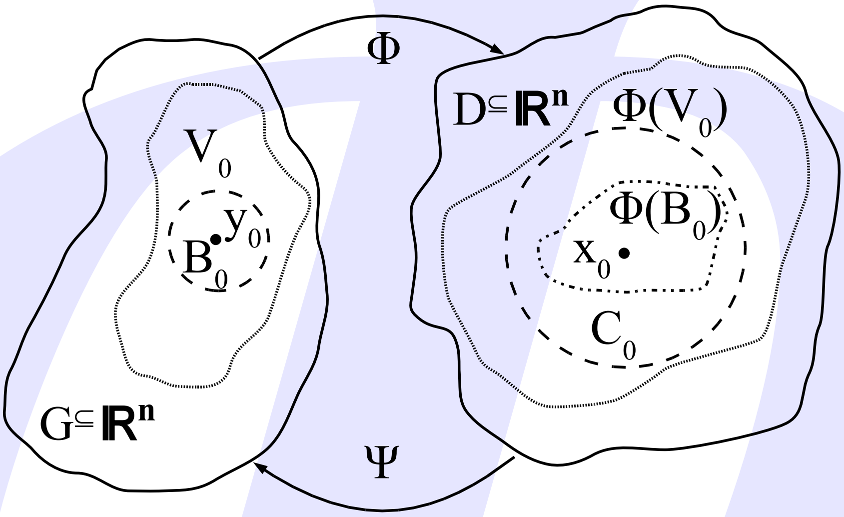
$$F(A) \subseteq \bigcup F(B_k \cap G)$$

und damit also

$$\begin{aligned} \lambda^*\big(F(A)\big) &\leq \lambda^*\Big(\bigcup F(B_k \cap G)\Big) \leq \sum_k \lambda^*\big(F(B_k \cap G)\big) \\ &\leq L^n \sum \lambda(B_k) \leq L^n\,(\lambda^*(A) + \varepsilon) = L^n \cdot \lambda^*(A) + L^n \varepsilon\ . \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $\lambda^*(F(A)) \leq L^n \lambda^*(A)$.
QED■

¡? Beweis ¿! der Transformationsformel



$\forall A \subseteq G$ Borelsch gilt:

$$\lambda\big(\Phi(A)\big) = \int_A J_\Phi\ dy\ .$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben.

Schritt 1
Weil für die Operatornormen $\|.\|$ auf $\mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ gilt $\|TS\| \leq \|T\| \cdot \|S\|$ und $|Tx| \leq \|T\| \cdot |x|$ und weil die Funktionen $y \mapsto \|D\Phi(y)\|$ und $y \mapsto \big\|D\Phi(y)^{-1}\big\|$ stetig sind, gilt folgendes: Zu jedem $y_0 \in G$ existiert eine offene Umgebung $V_0 \subseteq G$ von y_0, so dass für alle $y \in V_0$ gilt:

$$\big\|D\Phi(y_0) \cdot D\Phi(y)^{-1}\big\| \quad\leq\quad 1 + \varepsilon \tag{5.2}$$

$$\big\|D\Phi(y) \cdot D\Phi(y_0)^{-1}\big\| \quad\leq\quad 1 + \varepsilon\ . \tag{5.3}$$

Schritt 2
Bezeichne nun $\Psi := \Phi^{-1}$ und $x_0 = \Phi(y_0)$. Wähle zunächst eine Kugel C_0 um x_0, so dass $C_0 \subseteq \Phi(V_0)$. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gilt mit $L_0 = D\Phi(y_0)$ (vgl. MfPh2LinA Satz 0.0.)

$$|L_0 \circ \Psi(x) - L_0 \circ \Psi(x_0)| \leq \sup_{\xi \in C_0} \|D(L_0 \circ \Psi)(\xi)\| \cdot |x - x_0|\ ,$$

für alle $x_0 \in C_0$. Wegen $DL_0 = D\Phi(y_0)$ und $D\Psi(\xi) = D\Phi(\eta)^{-1}$ mit $\eta = \Psi(\xi)$ folgt daher mit Definition 5.1.

$$|L_0 \circ \Psi(x) - L_0 \Psi(x_0)| \leq (1 + \varepsilon)\,|x - x_0|\ .$$

Wählt man daher eine Kugel $B_0 = B(y_0)$ um y_0 so klein, dass $B_0 \subseteq V_0$ und $\Phi(B_0) \subseteq C_0$ ist, so gilt wegen Proposition 5.6. (denn $1 + \varepsilon$ ist nun Lipschitz-Konstante für $L_0 \circ \Psi|_{\Phi(B_0)}$):

$$\lambda\big(L_0 \Phi^{-1}(C)\big) \leq (1 + \varepsilon)^n \lambda(C)\ , \tag{5.4}$$

für alle Borelmengen $C \subseteq \Phi(B_0)$. Ähnlich sieht man, dass (nach evtl. Verkleinerung von B_0) auch für alle Borelmengen $C \subseteq L_0(B_0)$ gilt (nach Gleichung (5.3)):

$$\lambda(\Phi \circ L_0^{-1}(C)) \leq (1+\varepsilon)^n \lambda(C) \ . \tag{5.5}$$

Schritt 3
Behauptung: Man kann B mit abzählbar vielen solchen B_0's überdecken, denn setzt man

$$K_m := \{y \in G | dist(y, \partial G) \geq \frac{1}{m} \ ; \ |y| \leq m\} \ ,$$

so ist nach Heine-Borel K_m kompakt und $G \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m$ (Auschöpfung!).
Weil $K_1 \subseteq \bigcup_{y_0 \in K_1} B(y_0)$ ist, existieren daher $y_1, \ldots, y_{n_1} \in K_1$, so dass

$$K_1 \subseteq \bigcup_{k=1}^{n_1} B(y_0) \ .$$

Für K_2 finde $y_{n_1+1}, \ldots, y_{n_2} \in K_2$ usw. und schließlich folgt ($n_0 := 1$)

$$G = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=n_{m-1}+1}^{n_m} B(y_k) = \bigcup_{k=1}^{\infty} B(y_k) \ .$$

Schritt 4
Sei nun $A \subseteq G$ beliebige Borel-Menge. Setze nun $A_1 := A \cap B_1$

$$A_{k+1} := (A \cap B_{k+1}) \backslash A_k \qquad (k \geq 1)$$

wobei $B_k := B(y_k)$ sei. Es ist dann $A_k \subseteq B_k$ und $A = \dot{\bigcup_{k=1}^{\infty}} A_k$ und es gilt:

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)^{n+1}} \int_{A_k} J_\Phi(y) \ dy \leq \frac{1}{(1+\varepsilon)^n} \int_{A_k} J_\Phi(y_k) \ dy \ .$$

Denn wir dürfen auch noch annehmen, dass B_k so klein um y_k gewählt ist, dass (Stetigkeit von J_Φ)

$$J_\Phi(y) \leq J_\Phi(y_k)(1+\varepsilon) \tag{5.6}$$
$$J_\Phi(y_k) \leq J_\Phi(y)(1+\varepsilon) \tag{5.7}$$

ist. <u>Zusammen:</u> Es folgt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1+\varepsilon)^{n+1}} \int_{A_k} J_\Phi(y) \ dy \quad &\leq \quad \frac{1}{(1+\varepsilon)^n} \underbrace{J_\Phi(y_k)}_{|\det L_k|} \lambda(A_k) \\
&\overset{\substack{\text{Transform für} \\ \text{lineare Transform}}}{=} \quad \frac{1}{(1+\varepsilon)^n} \lambda(L_k A_k) \\
&= \quad \frac{1}{(1+\varepsilon)^n} \lambda\big(L_k \Phi \underbrace{\Phi^{-1}(A_k)}_{=:C}\big) \\
&\overset{\text{Gleichung (5.4)}}{\leq} \quad \lambda\big(\Phi(A_k)\big)
\end{aligned}$$

mit $L_k := D\Phi(y_k)$. Nach Gleichung (5.5) ist weiter

$$\begin{aligned}
\lambda\big(\Phi(A_k)\big) &\leq \lambda\big(\Phi L_k^{-1} L_k(A_k)\big) \\
&\overset{\text{Gleichung (5.5)}}{\leq} (1+\varepsilon)^n \lambda\big(L_k(A_k)\big) \\
&\overset{\substack{\text{Transform für} \\ \text{lineare Transform}}}{=} (1+\varepsilon)^n \underbrace{|\det L_k|}_{J_\Phi(y_k)}(A_k) \\
&= (1+\varepsilon)^n \int_{A_k} \underbrace{J_\Phi(y_k)}_{\substack{\leq (1+\varepsilon) J_\Phi \\ \text{Gleichung (5.7)}}} \; dy \\
&\leq (1+\varepsilon)^{n+1} \int_{A_k} J_\Phi(y) \, dy \ .
\end{aligned}$$

Summation über k liefert

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)^{n+1}} \int_A J_\Phi(y) \, dy \leq \lambda(\Phi(A)) \leq (1+\varepsilon)^{n+1} \int_A J_\Phi(y) \, dy \ .$$

Lasse nun $\varepsilon \longrightarrow 0$ gehen. Dann folgt

$$\lambda(\Phi(A)) = \int_A J_\Phi \, dy \ .$$

QED■

Kapitel 6

Integration auf Untermannigfaltigkeiten

23.06.2005

Motivation

Bisher haben wir Maße kennengelernt, mit denen sich das Volumen eines Körpers berechnen lässt. Die Oberfläche des Körpers lässt sich damit allerdings nicht berechnen.

6.1 Parametrisierungen

6.1.1 Erinnerung

Eine *regulär parametrisierte Kurve* ist gegeben durch eine stetig differenzierbareAbbildung $\alpha : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ mit $\dot{\alpha}(t) = 0$ für alle $t \in (a,b)$. Ist $C = \alpha\big((a,b)\big)$ und $f : C \to \mathbb{R}$ stetig, so setzt man (unabhängig von der Parametrisierung)

$$\int_C f(s)\ ds := \int_a^b f \circ \alpha(t)\, |\dot{\alpha}(t)|\ dt\ .$$

Weil: Ist $\beta = \alpha \circ \tau$ mit einem Parameterwechsel $\tau : (c,d) \to (a,b)$ (sagen wir mit $\tau' > 0$, also τ mit $\tau(c) = a$ und $\tau(d) = b$ stetig fortsetzbar), so ist nach der Substitutionsregel

$$\int_a^b f \circ \alpha(t)\, |\dot{\alpha}(t)|\ dt = \int_c^d \underbrace{f \circ \alpha(\tau(u))}_{f \circ \beta(u)} \underbrace{|\dot{\alpha}(\tau(u))|\, \tau'(u)}_{|\beta'(u)|}\ du\ .$$

Insbesondere ist für die *Bogenlänge* von C:

$$L(C) = \int_a^b |\dot{\alpha}(t)|\ dt\ .$$

<u>Frage</u>
Wie soll man *regulär parametrisierte Fläche* $S \subseteq \mathbb{R}^n$ oder allgemeiner *regulär parametrisierte k-dimensionale Untermannigfaltigkeit* $M \subseteq \mathbb{R}^n$ definieren?

6.1.2 Idee

Verwende *Parametrisierung* $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, φ stetig differenzierbar,

$$t = (t_1, \ldots, t_k) \to \big(x_1(t), \ldots, x_n(t)\big) = \varphi(t)\ .$$

Welche Eigenschaften sollte man von φ verlangen?

Definition 6.1.
Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Eine Teilmenge $U \subseteq M$ heißt offen in M (oder *relativ offen* bzgl. M), wenn gilt: Es gibt eine offene Menge $\tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $U = M \cap \tilde{U}$.

6.1.3 Kommentar

(1) Ist X eine Menge, so nennt man eine Teilmenge $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine *Topologie* auf X, wenn gilt

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{U}$;

(ii) $U_1, U_2 \in \mathcal{U} \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$;

(iii) $U_i \in \mathcal{U}\ ,\ i \in I\ \Rightarrow\ \bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{U}$.

Das Paar $(X,\mathcal{U})$ heißt ein *topologischer Raum*. Jede Teilmenge $Y \subseteq X$ erbt dann durch

$$\mathcal{V} = (U \cap Y)_{U \in \mathcal{U}}$$

eine Topologie und diese heißt *Spurtopologie*. Obige Definition zeigt damit, dass $\mathcal{U} = (U \cap M)_{U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ offen}}$ eine Topologie auf M definiert.

(2) Eine Abbildung zwischen topologischen Räumen $f : (X,\mathcal{U}) \to (Y,\mathcal{V})$ heißt *stetig*, wenn $f^{-1}(V) \in \mathcal{U}$, für alle $V \in \mathcal{V}$. Sie heißt ein *Homöomorphismus*, wenn es ein stetiges $g : Y \to X$ gibt, so dass $g \circ f = \mathrm{id}_X\ ,\ f \circ g = \mathrm{id}_Y$ ist.

Forderungen an φ:

- $\varphi : V \to M$ sollte Homöomorphismus sein,

$$M := \varphi(V) \subseteq \mathbb{R}^n\ ;$$

- M sollte „keine Ecken und Karten“ haben; deshalb verlange, dass $\varphi : V \to M \subseteq \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar ist mit $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial t_k}\right)$ linear unabhängig im $\mathbb{R}^n$, für alle $t \in V$, d.h.

$$\mathrm{rang}(D\varphi(t)) = k \quad , \quad D\varphi(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_k} \end{pmatrix} .$$

Definition 6.2.
Sei $1 \le k \le n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^k$ ein Gebiet. Eine *regulär parametrisierte Untermannigfaltigkeit der Dimension* k des $\mathbb{R}^n$ ist gegeben durch eine stetig differenzierbare Abbildung $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$, so dass gilt:

(a) Ist $M = \varphi(V)$, so ist $\varphi : V \to M$ ein Homöophismus (insbesondere ist φ injektiv);

(b) für alle $t \in V$ ist $\mathrm{rang}(D\varphi(t)) = k$.
($k = 1$: Kurve, $k = 2$: Fläche, $k = n - 1$: Hyperfläche)

6.1.4 Kommentar

Ist $V \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und $f : V \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, so dass $Df(t) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ injektiv ist, für alle $t \in V$, so nennt man f eine *Immersion*. Definition 6.2.b bedeutet also, dass φ eine Immersion ist.

6.1.5 Beispiel

(I) Ebene:
Seien (u, v) im $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig und $E = \operatorname{span}(u, v) \subseteq \mathbb{R}^3$. Es ist dann $\varphi : \mathbb{R}^2 \to E \subseteq \mathbb{R}^3$

$$\varphi(t_1, t_2) = t_1 \cdot u \ + \ t_2 \cdot v$$

eine regulär parametrisierte Fläche.

(II) Zylinder:
Durch $\varphi : V := (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$$\varphi(t_1, t_2) = (\cos(t_1), \sin(t_1), t_2)$$

wird der Kreiszylinder

$$Z = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 = 1 \right\}$$

ohne die Mantellinie $\{x_1 = 1\}$ regulär parametrisiert:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(t) = (-\sin(t_1), \cos(t_1), 0) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial t_2}(t) = (0, 0, 1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial t_2} \right) \quad \text{ist linear unabhängig} \quad \forall t \in V \ .$$

(III) Sphäre:
Durch $\varphi : (0, \pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$

$$\varphi(t_1, t_2) = (\cos(t_2)\sin(t_1), \sin(t_1)\sin(t_2), \cos(t_1))$$

wird die Sphäre

$$S^2 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \right\}$$

(ohne den halben Nullmeridian) regulär parametrisiert ✎ *Übung* ✎.

6.1.6 Kommentar

Die ganze Sphäre S^2 kann nicht homöomorphes Bild einer offenen Menge $V \subseteq \mathbb{R}^2$ sein, denn $V \subseteq \mathbb{R}^2$ ist nicht kompakt, S^2 sehr wohl und Kompaktheit ist eine Eigenschaft der Topologie.

6.2 Flächeninhalte

6.2.1 Motivation für die Volumendefinition von M

Seien (u, v) im $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig, $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(t_1, t_2) \mapsto t_1 u + t_2 v$ und sei $W \subseteq \mathbb{R}^2$ der Einheitswürfel, $W = [0, 1] \times [0, 1]$. Wie groß ist der „Flächeninhalt“ von $\varphi(W) \subseteq \mathbb{R}^3$?
Sei $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine orthogonale Transformation, also $S^t S = \mathbb{1}$ so dass

$$S(E) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_3 = 0 \right\} \quad , \quad E = \operatorname{span}(u, v) \ .$$

Sei weiter

$$\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \ , \ (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2)$$

und setze schließlich[1]

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ , \ T = \pi \circ S \circ \varphi \ .$$

Wegen Bild $(S \circ \varphi) \subseteq \mathbb{R}^2$ und $\pi^t \pi|_{\mathbb{R}^2} = \ \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ folgt

$$T^t T = (\varphi^t \circ s^t \circ \pi^t)(\pi \circ S \circ \varphi) = \varphi^t \circ \underbrace{S^t \circ S}_{=\mathbb{1}} \circ \varphi = \varphi^t \circ \varphi \ .$$

[1] Da alle Abbildungen linear sind, ist es auch möglich „$\circ$“ durch „$\cdot$“ zu ersetzen.

Nun ist

$$vol_2(\varphi(W)) = vol_2(T(W))$$

weil S orthogonal ist und $\pi|_{R^2} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ und

$$vol_2\big(T(W)\big) = \lambda^2(TW)\ ,$$

wobei λ^2 das Borel-Lebesguesche Maß ist. Insgesamt also

$$\begin{aligned} vol_2(\varphi(W)) &= vol_2(T(W)) = \lambda^2(TW) = |\det T|\,\underbrace{\lambda^2(W)}_{=1} = |\det T| \\ &= \sqrt{\det(T)^2} = \sqrt{\det(T^t)\det(T)} = \sqrt{\det({}^tTT)} = \sqrt{\det(\varphi^t\varphi)} \end{aligned}$$

Beachte schließlich

$$\varphi = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \varphi^t\varphi = \begin{pmatrix} \langle u,u\rangle & \langle u,v\rangle \\ \langle v,u\rangle & \langle v,v\rangle \end{pmatrix} .$$

28.06.2005

Definition 6.3.
Sei $V \subseteq \mathbb{R}^k$ ein Gebiet und $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ eine regulär parametrisierte Untermannigfaltigkeit der Dimension k. Für jedes $t \in V$ nennt man

$$G(t) := {}^tD\varphi(t) \cdot D\varphi(t) \in \mathrm{Mat}_k(\mathbb{R})$$

der *Maßtensor von* φ *in* t. Es heißt

$$g(t) := \det G(t)$$

die *Gram'sche Determinante* und $J_\varphi : V \to (0,\infty)$

$$J_\varphi(t) = \sqrt{g(t)} = \sqrt{\det({}^tD\varphi \cdot D\varphi)}$$

die *Jacobische von* φ.

6.2.2 Kommentar

Weil die Spalten $(\partial_1\varphi, \dots, \partial_k\varphi)$ mit $\partial_j\varphi := \frac{\partial\varphi}{\partial t_j}$ linear unabhängig sind und die Einschränkung des Standard-Skalarproduktes $\langle -,-\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ auf $E = \mathrm{span}(\partial_1\varphi, \dots, \partial_k\varphi)$ ein Skalarprodukt bleibt, muss

$$G(t) = (\langle \partial_i\varphi, \partial_j\varphi\rangle)_{1\le i,j\le k}$$

notwendig symmetrisch und positiv definit sein,

$$v \in E\backslash\{0\}\ ,\ 0 < \langle v,v\rangle\ \ ,\ v = \sum \lambda^j\partial_j\varphi \Rightarrow 0 < \langle v,v\rangle = \sum \lambda^i\lambda^j\,\langle \partial_i\varphi, \partial_j\varphi\rangle = \langle G(t)\lambda, \lambda\rangle\ \ .$$

Insbesondere ist $g(t) = \det G(t) > 0$.

Definition 6.4.
Sei $V \subseteq \mathbb{R}^k$ ein Gebiet und $\varphi : V \to M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine regulär parametrisierte Untermannigfaltigkeit

(a) Eine reelle Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt *messbar* wenn sie Borel-messbar ist, d.h. $f^{-1}(U) \subseteq M$ Borelsch für jedes offene $U \subseteq \mathbb{R}$.

(b) Eine messbare Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt *integrierbar*, wenn $h : V \to \mathbb{R}$,

$$h(t) = f \circ \varphi(t) \cdot J_\varphi(t) \ ,$$

Lebesgue-integrierbar ist. Man setzt nun

$$\int_M f \ dS := \int_V h \ d\lambda = \int_V f \circ \varphi(t) J_\varphi(t) \ dt \ ,$$

wobei auf der rechten Seite das Lebesgue-Integral gemeint ist. Insbesondere ist dann für jede Borelmenge $B \subseteq M$

$$vol_k(B) := \int_M \chi_B \ dS = \int_{\varphi^{-1}(B)} J_\varphi(t) \ dt \ .$$

6.2.3 Kommentar

Sei $\mathcal{B}_M$ die Borel-Algebra auf M.

(1) Es ist damit $\mathcal{H}^k_M : \mathcal{B}_M \to [0, \infty]$,

$$\mathcal{H}^k_M(B) := vol_k(B) \ ,$$

ein Maß und es ist dann tatsächlich für eine $\mathcal{H}^k$-integrierbare Funktion $f : M \to \mathbb{R}$

$$\int_M f \ d\mathcal{H}^k_M = \int_V f \circ \varphi \cdot J_\varphi \ d\lambda =: \int_M f \ dS$$

(sogenannte *Flächenformel*).

(2) Allgemein kann man das sogenannte *k-dimensionale Hausdorf-Maß* auf der ganzen Borel-Algebra $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ definieren. Es ist dann $\mathcal{H}^k_M(B) = \mathcal{H}^k(B)$, $\forall B \subseteq M$ Borelsch, wo $\varphi : V \to M \subseteq \mathbb{R}^n$ parametrisierte Untermannigfaltigkeit ist. Insbesondere ist damit $\mathcal{H}^k_M$ unabhängig von der Parametrisierung $\varphi : V \to M$. Hier wollen wir direkt zeigen, dass dann

$$\int_M dS : \mathcal{L}^1(\mathcal{H}^k_M) \to \mathbb{R} \quad , \quad f \mapsto \int_M f \ dS \ ,$$

unabhänig von der Parametrisierung ist.

(3) Im Fall $k = n$ ist nach dem Umkehrsatz $M = U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, φ ein Diffeomorphismus von V auf U und daher nach der Transformationsformel

$$\mathcal{H}^k_M(B) = \int \chi_B \ dS = \int_{\varphi^{-1}(B)} J_\varphi(t) \ dt \overset{\substack{\text{Transf.}\\ \text{formel}}}{=} \lambda(B)$$

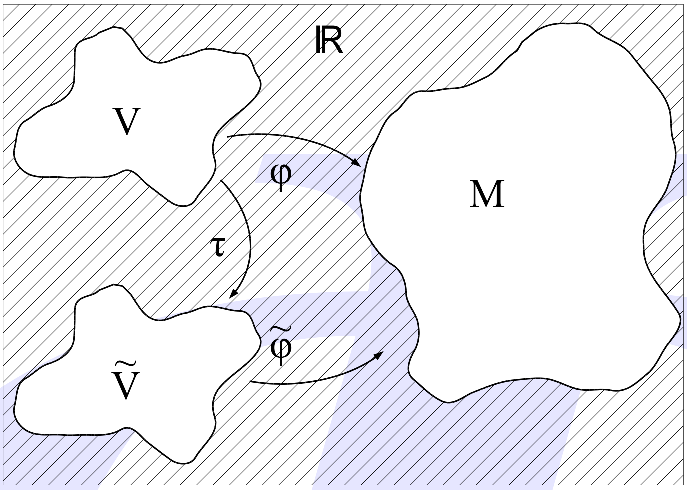
$\forall B \subseteq U$ Borelsch, weil $J_\varphi(t) = \sqrt{\det D\varphi^t D\varphi} = \sqrt{\det^2 D\varphi} = |\det D\Phi(t)|$ ist.

6.2.4 Bemerkung

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge und seien $\varphi : V \to M$ und $\tilde{\varphi} : \tilde{V} \to M$ Parametrisierungen ($V, \tilde{V}$ Gebiete) derart, dass der Parameterwechsel $\tau : V \to \tilde{V}$, $\tau = \tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi$ ein Diffeomorphismus ist.

Dann ist für eine messbare Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ die Funktion $h : V \to \mathbb{R}$, $h := f \circ \varphi \cdot J_\varphi$ genau dann integrierbar, wenn die Funktion $\tilde{h} : \tilde{V} \to \mathbb{R}$, $h := f \circ \tilde{\varphi} \cdot J_{\tilde{\varphi}}$ integrierbar ist und es gilt dann

$$\int_V h(t)\ dt = \int_{\tilde{V}} \tilde{h}(\tilde{t})\ d\tilde{t}\ .$$



6.2.5 Kommentar

Man kann zeigen, dass der Parameterwechsel $\tau = \tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi$ zwischen zwei Parametrisierungen stets ein Diffeomorphismus ist, so dass die Schreibweise $\int_M f\ dS$ nun in der Tat berechtigt ist, denn der Wert ist von der Parametrisierung unabhängig.

¡? Beweis ¿!

Es ist $\tilde{\varphi} \circ \tau = \varphi$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow\quad D\varphi = D\tilde{\varphi} \circ \tau D\tau \\
&\Rightarrow\quad {}^tD\varphi \cdot D\varphi = {}^tD\tau\, {}^t(D\tilde{\varphi} \circ \tau)\,(D\tilde{\varphi} \circ \tau)\, D\tau \\
&\Rightarrow\quad J_\varphi^2 = \det\left({}^tD\varphi \cdot D\varphi\right) = \det({}^tD\tau)\det\left({}^t(D\tilde{\varphi} \circ \tau)\right)\det(D\tilde{\varphi} \circ \tau)\det(D\tau) \\
&\qquad\quad = \det\left({}^t(D\varphi \circ \tau)\,(D\varphi \circ \tau)\right) \cdot \det\left({}^tD\tau \cdot D\tau\right) = J_{\tilde{\varphi}}^2 \circ \tau \cdot J_\tau^2 \\
&\Rightarrow\quad J_\varphi = J_{\tilde{\varphi}} \circ \tau J_\tau\ .
\end{aligned}$$

Also ist

$$\int_V h(t)\ dt = \int_V f \circ \varphi J_\varphi\ dt = \int_V f \circ \tilde{\varphi} \circ \tau J_{\tilde{\varphi}} \circ \tau \circ J_\tau\ dt = \int_V (f \circ \tilde{\varphi} J_{\tilde{\varphi}}) \circ \tau J_\tau\ dt\ ,$$

mit der Transformationsformel

$$= \int_{\tilde{V}} f \circ \tilde{\varphi} J_{\tilde{\varphi}}\ dt = \int_{\tilde{V}} \tilde{h}\ d\tilde{t}\ .$$

QED■

6.2.6 Beispiel

Es ist $\varphi : (0, \pi) \times (0, 2\pi) \to S^2 \backslash \{\text{Halbmeridian}\}$

$$\varphi(t_1, t_2) = (\sin t_1 \cos t_2, \sin t_1 \sin t_2, \cos t_1)$$

regulär parametrisierte Fläche.

$$\partial_1\varphi = \begin{pmatrix} \cos t_1 \cos t_2 \\ \cos t_1 \sin t_2 \\ -\sin t_1 \end{pmatrix} \quad , \quad \partial_2\varphi = \begin{pmatrix} -\sin t_1 \sin t_2 \\ \sin t_1 \cos t_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

$$G(t) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}(t) \ ,$$

$$\begin{aligned} g_{11} &= \langle \partial_1\varphi, \partial_1\varphi \rangle = 1 \\ g_{12} &= \langle \partial_1\varphi, \partial_2\varphi \rangle = 0 = g_{21} \\ g_{22} &= \langle \partial_2\varphi, \partial_2\varphi \rangle = \sin^2 t_1 \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_\varphi(t) &= \sqrt{\det G(t)} \\ &= \sqrt{\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 t_1 \end{pmatrix}} \\ &= \sin t_1 > 0 \end{aligned}$$

($\Rightarrow$ φ ist reguläre Parametrisierung). Also ist $dS = J_\varphi \; dt = \sin t_1 \; dt_1 \; dt_2$. Damit folgt

$$vol_2(S^2) = \int_V J_\varphi \; dt = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin t_1 \; dt_1 \; dt_2 = 2\pi(-\cos t_1)\Big|_0^\pi = 4\pi$$

(weil der Halbmeridian eine $\mathcal{H}^2$-Nullmenge in $\mathbb{R}^3$ ist).

6.3 Untermannigfaltigkeiten

6.3.1 Motivation

Mit nur einer einzigen Parametrisierung kann man nicht immer den ganzen Teil einer Fläche $M \subseteq \mathbb{R}^3$ erreichen. Besser beschrieben wird eine Fläche oft als Nullstellengebilde einer (mehrer) Gleichung(en), z.B.

Sphäre: $S^2 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \middle| x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1\right\}$,

Ebene: $E = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \middle| a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b\right\}$ mit $a \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$,

einschaliges Hyperboloid: $H = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \middle| x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1\right\}$.

Definition 6.5.
Sei $1 \leq k \leq n-1$. Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt eine *k-dimensionale Untermannigfaltigkeit* (Umf), wenn es zu jedem $p \in M$ eine offene Umgebung $\tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ von p gibt und ein stetig differenzierbares $F : \tilde{U} \to \mathbb{R}^{n-k}$, so dass gilt

(a) $M \cap \tilde{U} = \{x \in U | F(x) = 0\}$;

(b) $\text{rang}DF(p) = n - k$, d.h. $(\nabla F_1, \dots, \nabla F_{n-k})(p)$ ist linear unabhängig.

30.06.2005

6.3.2 Kommentar

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^p$ derart, dass $DF(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ surjektiv ist, für alle $x \in U$. Es heißt dann f eine *Submersion*. Bedingung (b) bedeutet also gerade, dass F eine Submersion um p ist.

6.3.3 Beispiel

Die n-dimensionale Einheitssphäre

$$S^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \middle| \, \|x\| = 1 \right\}$$

ist eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit des R^{n+1}. Es ist nämlich $S^n = F^{-1}(0)$ mit $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \|x\|^2 - 1 \ ,$$

und $\operatorname{grad} F(x) = 2x \neq 0 \ , \ \forall x \in S^n$ (also $\operatorname{rang}(DF(x)) = 1 \ , \ \forall x \in S^n$).

Satz 6.6.
Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine Untermannigfaltigkeit, wenn jedes $p \in M$ eine relativ offene Umgebung $U \subseteq M$ hat und es eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^k$ gibt, sowie eine reguläre Parametrisierung $\varphi : V \to U \subseteq M \subseteq \mathbb{R}^n$.

6.3.4 Kommentar

Es heißt dann $\varphi : V \to U \subseteq M$ ein *lokales Koordinatensystem* auf M und $\varphi^{-1} : U \to V$ eine *Karte* von M vgl. Beweis zu Satz 6.6..

¡? Beweis ¿!

„⇒“ Sei $p \in M \subseteq \mathbb{R}^n$ und $p = (p', p'') \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$. Sei $\tilde{U} \to \mathbb{R}^{n-k}$ eine Umgebung von p mit einem beschreibenden $F : \tilde{U} \to \mathbb{R}^{n-k}$, also für $U := M \cap \tilde{U}$ ist dann $U = \{x \in \tilde{U} \,|\, F(x) = 0\}$ und $\operatorname{rang} DF(p', p'') = n - k$.

Sei **o.B.d.A.**

$$\frac{\partial F}{\partial x''}(p) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_{k+j}}(p) \right)_{1 \leq i,j \leq n-k}$$

von vollem Rang. Es folgt dann aus dem Impliziten Funktionensatz: Es existiert eine Umgebung $V' \subseteq \mathbb{R}^k$ von p' und eine Umgebung $V'' \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$ vom p'', so dass $V' \times V'' \subseteq \tilde{U}$ und es gibt ein stetig differenzierbares $h : V' \to V''$, so dass für $(x', x'') \in v' \times v''$ gilt:

$$F(x', x'') = 0 \ \Leftrightarrow \ (x', x'') \in U = F^{-1}(0) \ \Leftrightarrow \ x'' = h(x') \ .$$

Setze nun $V := V'$ und $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ fest durch $\varphi(t) = (t, h(t))$. Dann ist $\varphi : V \to U \subseteq M$ offenbar injektiv und auch immersiv, weil bereits die 1. Koordinate dies erfüllt und ein Homöomorphismus auf $U := \varphi(V) \subseteq \bar{U}$, denn die Einschränkung $\pi|_U : U \to V$ der Projektion $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k \ , \ (x', x'') \mapsto x'$ ist ein stetiges Inverses von φ. Also ist $\varphi : V \to U \subseteq M$ eine reguläre Parametrisierung.

„⇐“ vgl. `Forster III, §14`.

QED■

6.3.5 Kommentar

(a) Man kann zeigen, dass für zwei lokale Koordinatensysteme $\varphi : V \to U$ und $\tilde{\varphi} : \tilde{V} \to \tilde{U}$ einer k-dimensionalen Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ der Übergang $\tau : \varphi^{-1}(U \cap \tilde{U}) \mapsto \tilde{\varphi}^{-1}(U \cap \tilde{U}) \ , \ \tau = \tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ sogar ein Diffeomorphismus ist (siehe `Forster III, §14`).

(b) Man kann also M mit einer Familie von lokalen Koordinatensystemen

$$\{\varphi_i | V_i \to U_i \subseteq M\}_{i \in I} = \mathcal{A}$$

überdecken, $M = \bigcup_{i \in I} U_i$, so dass die Übergänge $\tau_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ allesamt Diffeomorphismen sind. Man nennt eine solche Familie von lokalen Koordinatensystemen einen *Atlas* für M und die Diffeomorphismen $\{\tau_{ij}\}$ die Kartenwechsel von $\mathcal{A}$.

6.4 Integration auf Untermanigfaltigkeiten

6.4.1 Problem

$M \subseteq \mathbb{R}^n$ sei k-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $f : M \to \mathbb{R}$ sei messbar. Wie soll man $\int_M f \; dS$ erklären?
Im Allgemeinen gilt $M = \bigcup_{i \in I} U_i$, wobei $\varphi_i : V_i \to U_i \subseteq \mathbb{R}^n$ regulär parametrisierte Untermannigfaltigkeit ist, $i \in I$.

1. Fall
„f lebe nur auf der Karte“, präziser: definiere den Träger von f durch

$$\operatorname{supp}(f) := \overline{\{p \in M | f(p) \neq 0\}} \subseteq M \ .$$

Annahme: $\varphi : V \to U \subseteq M$ sei lokales Koordinatensystem und $\operatorname{supp}(f) \subseteq U$. Setze dann (wie früher)

$$\int_M f \; dS := \int_V f \circ \varphi \cdot J_\varphi \; dt$$

wobei $J_\varphi ; V \to (0, \infty)$ die Jacobische der Parametrisierung von φ ist.

2. Fall
Sei M Vereinigung von endlich vielen Karten (geht z.B. stets, wenn M kompakt ist), $M = \bigcup_{i=1}^r U_i$ und $\varphi_i : V_i \to U_i \subseteq M \quad (i = 1, \dots, r)$.

Frage
Wie soll man z.B. die Funktion $f \equiv 1$ integrieren, d.h. wie soll man den Flächeninhalt von M definieren?
Idee
Zerlege die Funktion $f \equiv 1$ in eine Summe von r Funktionen

$$\alpha_1, \dots, \alpha_r : M \to [0, 1] \subseteq \mathbb{R} \ ,$$

$$1 = \alpha_1 + \dots + \alpha_r$$

so dass jeder Summand α_i seinen Träger in dem lokalen Koordinatensystem $\varphi_i : V_i \to U_i$ hat, $\operatorname{supp}(\alpha_i) \subseteq U_i \quad (i = 1, \dots, r)$. Benutze dann die Definition aus dem 1. Fall:

$$\int_M f \; dS := \sum_{i=1}^r \int_M \alpha_i f \; dS \ .$$

Definition 6.7.
Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigkfaltigkeit und $(U_i)_{i=1}^r$ eine offene Überdeckung von M (d.h. $U_i \subseteq M$ relativ offen und $M = \bigcup_{i=1}^r U_i$). Es heißt eine Familie von (differenzierbaren) Funktionen $(\alpha_i | M \to \mathbb{R})_{i=1}^r$ eine (differenzierbare) *Zerlegung der Eins*, wenn gilt:

(a) $0 \leq \alpha_i(p) \leq 1 \quad \forall p \in M \ , \ i = 1, \dots, r$

(b) $\operatorname{supp}(\alpha_i) \subseteq U_i \ , \ i = 1, \dots, r$

(c) $\mathbb{1} = \sum_{i=1} \alpha_i(p) \quad \forall p \in M$

(α_i heißt differenzierbar, wenn $\alpha_i \circ \varphi_i$ differenzierbar ist.)

05.07.2005

6.4.2 Kommentar

Man kann zeigen, dass es zu jeder endlichen (offenen) Überdeckung $(U_i)_{i=1}^r$ einer Untermannigfaltigkeit stets eine solche Teilung der Eins gibt (`Forster III, §14`).

Definition 6.8.
Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit, für die ein endlicher Atlas von Karten existiert, $M = \bigcup_{i=1}^r U_i$, $\varphi_i : V_i \to U_i \subseteq M$. Es sei $(\alpha_i)_{i=1}^r$ eine Teilung der Eins bzgl. (U_i) und es sei $f : M \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion. Es heißt nun f *integrierbar* wenn jedes $\alpha_i f|_{U_i} : U_i \to \mathbb{R}$ auf der parametrisierten Fläche $\varphi_i : V_i \to U_i$ integrierbar ist und wir setzen dann

$$\int_M f\ dS := \sum_{i=1}^r \int \alpha_i f\ dS\ .$$

6.4.3 Kommentar

Zu prüfen ist nun die „Wohldefiniertheit“, d.h. die Unabhängigkeit der Definition von der Überdeckung und Teilung der Eins. Sei also

$$M = \bigcup_{i=1}^r U_i = \bigcup_{j=1}^s W_j$$

und seien $(\alpha_i)_{i=1}^r$ bzw. $(\beta_j)_{j=1}^s$ Teilungen der Eins bzgl (U_i) bzw. (W_j). Dann ist

$$\alpha_i = 1 \cdot \alpha_i = \left(\sum_{j=1}^s \beta_j\right) \alpha_i = \sum_{j=1}^s \alpha_i \beta_j\ ,$$
$$\beta_j = 1 \cdot \beta_j = \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i\right) \beta_j = \sum_{i=1}^r \alpha_i \beta_j\ ,$$

und $\operatorname{supp}(\alpha_i \cdot \beta_j) \subseteq U_i \cap W_j$. Rechne nun:

$$\sum_{i=1}^r \int_M \alpha_i f\ dS = \sum_{i,j} \int_M \alpha_i \beta_j f\ dS = \sum_{j=1}^s \int_M \beta_j f\ dS\ .$$

6.4.4 Kommentar

(1) Eine jede Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ besitzt stets einen *lokal endlichen Atlas* von Karten, $(\varphi_i | V_i \to U_i)_{i \in I}$, d.h. jedes $p \in M$ hat eine offene Umgebung $W \subseteq M$, die nur von endlich vielen Karten getroffen wird. Das ermöglicht nun wieder eine Definition der Teilung der Eins $(\alpha_i)_{i \in I}$, weil in der Gleichung

$$1 = \sum_{i \in I} \alpha_i(x)$$

nur endlich viele Summanden von Null verschieden sind. Dies ermöglicht dann auch die Definition von $\int_M f\ dS$ im allgemeinen Fall.

(2) Eine jede k-dimensionale Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist aber auch Borel-messbar und ist $\mathcal{H}_M^k : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ das k-dimensionale Hausdorfmaß, so wird $\mathcal{H}_M^k = \mathcal{H}^k|_{\mathcal{B}_M} : \mathcal{B}_M \to [0, \infty]$ zu einem Maß. Es gilt dann für eine messbares $f : M \to \mathbb{R}$, dass f genau dannn integrierbar ist, wenn es im Sinne der Integraltheorie $\mathcal{H}_M^k$-integrierbar ist und es gilt dann (ohne Beweis)

$$\int_M f\ dS = \int_M f\ dH_M^k\ .$$

6.4.5 Moral

$\int_M f\ dS$ ist nun für alle Untermannigfaltigkeiten $M \subseteq \mathbb{R}^n$ mit einem endlichen Atlas (U_i) definiert (z.B. wenn M kompakt ist).

Kapitel 7

Divergenzsatz von Gauß

05.07.2005

Motivation

Der Gauß'sche Integralsatz macht eine Aussage zwischen einem Lebesgue-Integral über einer kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ und einem Flächenintegral über $M = \partial K$, dem Rand von K.

Bedingung (für uns): Damit Flächenintegral überhaupt definiert ist, muss M Untermannigfaltigkeit (der Codimension 1) sein, also eine Hyperfläche.

7.1 Kompakta mit glattem Rand

7.1.1 Erinnere

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ Teilmenge. $x \in \mathbb{R}^n$ heißt *Randpunkt* von A, wenn für jede Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von x gilt:

$$U \cap A \neq \emptyset \quad \text{und} \quad U \cap A^c \neq \emptyset$$

$$\partial A := \{x \in \mathbb{R}^n \big| x \text{ ist Randpunkt von } A\} .$$

Definition 7.1.
Eine kompakte Teilmenge hat *glatten Rand*, wenn es zu jedem $p \in \partial K$ eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ gibt und ein stetig differenzierbares $h : U \to \mathbb{R}$, so dass gilt

(a) $K \cap U = \{x \in U | h(x) \leq 0\}$

(b) $\operatorname{grad} h(p) \neq 0$

7.1.2 Beispiel

Die Einheitkugel $\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n | \, \|x\| \leq 1\}$ im $\mathbb{R}^n$ ist Kompaktum mit glattem Rand, denn $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h(x) = \|x\|^2 - 1$ erfüllt $\mathbb{B}^n = \{x | h(x) \leq 0\}$ und für $p \in \partial \mathbb{B}^n = S^{n-1}$ ist $\operatorname{grad} h(p) = 2p \neq 0$.

Proposition 7.2.
Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand. Dann gilt: Der Rand $M = \partial K$ ist eine Hyperfläche (d.h. eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$).

¡? Beweis ¿!

Sei $p \in M = \partial K$ und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ Umgebung, $h : U \to \mathbb{R}$ beschreibende Funktion für $K \cap U = \{x | h(x) \leq 0\}$. Weil $\operatorname{grad} h(p) \neq 0$ und $\operatorname{grad} h$ stetig ist, darf man annehmen, dass $\operatorname{grad} h(x) \neq 0$ ist, für alle $x \in U$ (sonst verkleinere U).

Behauptung
h ist auch eine beschreibende Funktion für $M \cap U$, d.h.

$$M \cap U = \{x \in U | h(x) = 0\}$$

- „$\subseteq$“ K kompakt, d.h. auch abgeschlossen $\Rightarrow M = \partial K \subseteq K \Rightarrow h(x) \leq 0\ ,\ \forall x \in M \cap U$. Angenommen: $h(x) < 0$ für ein $x \in M \cap U$. Aus der Stetigkeit von h folgt, das es eine Umgebung $V \subseteq U$ von x gibt, mit $h|_V < 0 \Rightarrow V \subseteq K$ also $\Rightarrow V \cap K^c = \emptyset \Rightarrow x$ ist kein Randpunkt, also $x \notin M$ ↯ Widerspruch ↯

- „$\subseteq$“ Sei $x \in U$ mit $h(x) = 0$. Setze $v := \operatorname{grad} h(x) \neq 0$. Dann ist

$$h(x + \xi) = h(x) + \langle \operatorname{grad} h(x), \xi \rangle + o(\xi)$$

wobei $o(\xi)$ eine Funktion bezeichnet, welche $\frac{o(\xi)}{|\xi|} \longrightarrow 0$ für $\xi \longrightarrow 0$ erfüllt. Für $\xi = v \cdot t\ ,\ t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, ist also

$$h(x + tv) = t \left\| v \right\|^2 + o(t)\ .$$

Also existiert ein $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} 0 < t < \varepsilon &: h(x + tv) > 0\ , \\ -\varepsilon < t < 0 &: h(x + tv) < 0\ . \end{aligned}$$

Daher gilt für jede Umgebung $V \subseteq U$ von x: $V \cap K \neq \emptyset$ und $V \cap K^c \neq \emptyset$, also ist $x \in \partial K \cap U = M \cap U$.

QED■

7.2 Der Tangentialraum

Definition 7.3.
Sei M eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $p \in M$. Es heißt $v \in \mathbb{R}^n$ ein *Tangentialvektor* an M in p, wenn es eine (regulär) parametrisierte Kurve $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ gibt mit

(a) $\alpha(0) = p$

(b) $\dot{\alpha}(0) = v$

$$TM_p := \{v \in \mathbb{R}^n \big| v \text{ ist Tangentialvektor an } p\}$$

heißt *Tangentialvektorraum* an M in p.

Proposition 7.4.
Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $p \in M$. Dann gilt

(a) $TM_p \subseteq \mathbb{R}^n$ ist ein k-dimensionaler Unterraum

(b) Sei $\varphi : V \to U \subseteq M$ ein lokales Koordinatensystem und $\varphi(t_0) = p$. Dann ist $(\partial_1\varphi, \ldots, \partial_k\varphi)(t_0)$ ein Basis von TM_p,

$$\text{Bild}\,(D\varphi(t_0)) = TM_p \ .$$

(c) Ist $\tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ Umgebung von p und $F : \tilde{U} \to \mathbb{R}^n$ eine beschreibende Funktion für $M \cap \tilde{U}$, so gilt

$$TM_p = \ker\big(DF(p)\big) \ .$$

¡? Beweis ¿!

Beachte, dass φ nach Definition eine Immersion ist, d.h.

$$D\varphi(t_o) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$$

ist injektiv und damit $\dim(\text{Bild}\, D\varphi(t_0)) = k$ und dass $F : \tilde{U} \to \mathbb{R}^{n-k}$ eine Submersion ist, also

$$DF(t_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$$

surjektiv ist. Also muss auch

$$\dim(\ker DF(p)) = n - \dim(\text{Bild}\, DF(p)) = n - (n-k) = k$$

sein. Es reicht daher zu zeigen:

$$T_1 := \text{Bild}\, D\varphi(t_0) \subseteq TM_p \subseteq \ker DF(p) =: T_2 \ .$$

Zeige: $T_1 \subseteq TM_p$: Sei $v = \sum_{i=1}^k \lambda_i \partial_i \varphi(t_0) \in T_1$ beliebig. Setze $\lambda := (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$ und $\varepsilon > 0$ so klein, dass $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U \subseteq M$ definiert ist (also $t_0 + \tau\lambda \in V \quad \forall \tau \in (-\varepsilon, \varepsilon)$),

$$\alpha(\tau) := \varphi(t_0 + \tau\lambda) \ .$$

Dann folgt: $\alpha(0) = \varphi(t_0) = p$ und

$$\dot{\alpha}(0) = D\varphi(t_0) \cdot \lambda = \sum_{i=1}^k \lambda_i \partial_i \varphi(t_o) = v \ ,$$

also $v \in TM_p$.
Zeige: $TM_p \subseteq T_2$: Sei also $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ parametrisierte Kurve mit $\alpha(0) = p$ und $v := \dot{\alpha}(0) \in TM_p$. **O.B.d.A.** sei $\varepsilon > 0$ so klein, dass $\alpha(t) \in \tilde{U}$ ist $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Es ist dann $F(\alpha(t)) = 0 \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Die Kettenregel liefert:

$$0 = DF(\alpha(0)) \cdot \dot{\alpha}(0) = DF(p) \cdot v$$

also $v \in T_2$. 07.07.2005
QED■

7.3 Das Normalenfeld

Definition 7.5.
Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ein k-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $p \in M$.

(a) Es heißt dann $\nu \in \mathbb{R}^n$ ein *Normalenvektor* an M in p, wenn $\nu \in TM_p^\perp$ ist, also ist $\langle \nu, w \rangle = 0$ für alle $w \in TM_p$.

(b) ν heißt *Einheitsnormale* an M in p, wenn ν Normalenvektor an M in p und $\|\nu\| = 1$ ist.

7.3.1 Bemerkung

Ist $M \subseteq \mathbb{R}^n$ Hyperfläche, $p \in M$ und $h : \tilde{U} \to \mathbb{R}$ eine beschreibende Funktion für $M \cap \tilde{U}$. Dann ist

$$\nu = \frac{\operatorname{grad} h(p)}{\|\operatorname{grad} h(p)\|}$$

eine Einheitsnormale an M in p.

¡? Beweis ¿!

$\operatorname{grad} h(p) \perp TM_p$, denn $\langle \operatorname{grad} h(p), w\rangle = Dh(p) \cdot w = 0$, weil $TM_p = \ker(Dh(p))$ nach Proposition 7.4. ist. Daraus: $\nu = \frac{\operatorname{grad} h(p)}{\|\operatorname{grad} h(p)\|}$ ist Einheitsnormale.

QED■

7.3.2 Beispiel

(1) Für $M = S^{n-1}(r) = \{x \in \mathbb{R}^n | \, \|x\| = r\}$ ist $\nu(p) = \frac{p}{r}$ Einheitsnormale, denn $F(x) = \|x\|^2 - r^2$ ist beschreibende Funktion für M und $\operatorname{grad} F(x) = 2x$, also

$$\nu(p) = \frac{2p}{\|2p\|} = \frac{p}{r} \; .$$

(2) Sei $V \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ offen und $g : V \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Sei $M = graph(g) = \{x \in \mathbb{R} | x_n = g(x_1, \dots, x_n)\}$. Es ist dann für $p \in M$, $p = (p', p_n)$

$$\nu(p) = \frac{(-\partial_1 g, \dots - \partial_{n-1} g, 1)(p)}{\|(-\partial_1 g, \dots - \partial_{n-1} g, 1)(p)\|}$$

Einheitsnormale an p, denn $\|\nu(p)\| = 1$ ist klar und weil $F : V \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x', x_n) = x_n - g(x')$ beschreibende Funktion ist, gilt:
$\nu(p)$ ist Normale, denn $\operatorname{grad} F(p) = (-\partial_1 g, \dots, -\partial_{n-1} g, 1)(p)$.

Proposition 7.6.
Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand und $p \in M := \partial K$. Es gibt dann genau eine Einheitsnormale ν_p an p, so dass gilt: es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass für jedes $0 < \tau < \varepsilon$ gilt

$$p + \tau v_p \notin K \; .$$

¡? Beweis ¿!

1. Existenz:
Sei $\tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ Umgebung von p und $h : \tilde{U} \to \mathbb{R}$ beschreibende Funktion für $\tilde{U} \cap K$, d.h. $\tilde{U} \cap K = \{x \in \tilde{U} | h(x) \leq 0\}$ wobei $\operatorname{grad} h(p) \neq 0$. Setze $\nu_p := \frac{\operatorname{grad} h(p)}{\|\operatorname{grad} h(p)\|}$. Dann ist ν_p Einheitsnormale und weil

$$\begin{aligned} h(p + tv_p) &= h(p) + \langle \operatorname{grad} h(p), t\nu_p\rangle + o(t) \\ &= t \, \|\operatorname{grad} h(p)\| + o(t) \end{aligned}$$

ist, ist $h(t) > 0$ für $0 < t < \varepsilon$ klein genug.

2. Eindeutigkeit:
Es ist $\dim(TM_p^\perp) = n - (n-1) = 1$ und daher gilt für jede Einheitsnormale $\tilde{\nu}_p$ an M in p, dass $\tilde{\nu}_p = \pm \nu_p$ ist. Es ist aber $h(t) < 0$ für $-\varepsilon < t < 0$. Daraus folgt $\tilde{\nu}_p = \nu_p$, also ist ν_p eindeutig.

Definition 7.7.
(a) Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Teilmenge, so heißt eine Abbildung $X : A \to \mathbb{R}^n$ ein *Vektorfeld* auf A.

(b) Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $X : U \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld, so heißt $\operatorname{div}(X) : U \to \mathbb{R}$,

$$\operatorname{div}(X)(x) = \frac{\partial X_1}{\partial x_1}(x) + \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}(x) = \operatorname{spur}(DX)(x)$$

die *Divergenz* des Vektorfeldes X.

7.3.3 Kommentar

(1) Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand und $\nu : M \to \mathbb{R}^n$, $p \mapsto \nu_p$ die eindeutige Normale an $M := \partial K$ in p aus Proposition 7.6.. Es heißt dann ν das äußere *Einheitsnormalenfeld* an K. Es ist stetig, weil lokal

$$\nu_p := \frac{\operatorname{grad} h(p)}{\|\operatorname{grad} h(p)\|}$$

ist.

(2) Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ beliebig und $f : A \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so heißt f stetig differenzierbar, wenn es eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von A gibt ($A \subseteq U$) und ein stetig differenzierbares $\hat{f} : U \to \mathbb{R}$ mit $\hat{f}|_A = f$.

7.4 Gauß'scher Satz

Theorem 7.8. Gauß'scher Satz
Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand $\partial K = M$ und sei $\nu : M \to \mathbb{R}^n$ sein äußeres Einheitsnormalenfeld. Sei weiter $X : K \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf K. Dann gilt

$$\int_K \operatorname{div}(X)\ dx = \int_{\partial K} \langle X, v\rangle\ dS\ .$$

7.4.1 Physikalische Interpretation

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ Umgebung von K ,$K \subseteq U$ und **o.B.d.A.** sei X auf U definiert, $X : U \to \mathbb{R}^n$. Betrachte das System gewöhnlicher Differentialgleichungen $\dot{x} = X(x)$ auf U und sei $\{\varphi^t\} = \varphi$ das zugehörige dynamische System, also

$$\frac{d}{dt}\varphi^t(x) = X(\varphi^t(x) \quad \forall x \in U \quad \forall t \in I(x)\ .$$

Es ist dann $\langle X, \nu\rangle(p) = \left\langle \frac{d}{dt}\varphi(t)(p), \nu_p \right\rangle$ der Fluss von $\varphi = \{\varphi^t\}$ durch M an p, also ist $\int_M \langle X, \nu\rangle\ dS$ der „Gesamtfluss“ von X durch die Oberfläche $\partial K = M$. Der Gauß'sche Satz besagt also, dass der Gesamtfluss von X aus K heraus gleich dem Volumen-Integral von $\operatorname{div}(X)$ über K ist.

7.4.2 Kommentar

Ist $n = 1$, so ist also $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein Kompaktum mit glattem Rand $M = \{a, b\}$. Die äußere Einheitsnormale $\nu : M \to \mathbb{R}$ ist offenbar durch $\nu(a) = -1$, $\nu(b) = +1$ gegeben. Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so ist $\operatorname{div}(f)(x) = f'(x)$ also ist

$$\int_M \langle f, v\rangle\ dS = f(a)(-1) + f(b)(+1) = f(b) - f(a)\ .$$

Der Gauß'sche Satz wird also zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\int_a^b f'(x)\ dx = f(b) - f(a)\ .$$

Lemma 7.9.
Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit kompakten Träger. Dann gilt für alle $i = 1, \ldots, n$:

$$\int_U \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\ dx = 0\ .$$

¡? Beweis ¿!

Sei **o.B.d.A.** $U = \mathbb{R}^n$ (setze f sonst trivial fort) und $i = n$. Sei $x = (x_1, \ldots, x_{n-1})$, wähle $R > 0$ so groß, dass

$$\operatorname{supp}(f) \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \times [-R, +R]$$

Es gilt nun

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial x_n}(x', x_n)\ dx_n &= \int_{-R}^{+R} \frac{\partial f}{\partial x_n}(x', x_n)\ dx_n \\ &= f(x', +R) - f(x', -R) \\ &= 0 - 0 = 0 \end{aligned}$$

und deshalb

$$\int_U \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\ dx = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial x_n}(x', x_n)\ dx'_n \right)\ dx = 0\ .$$

14.07.2005 **QED**■

Lemma 7.10.
Sei $V \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ offen, $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ und $u : V \to I$ stetig differenzierbar. Sei

$$K = \{(x', x_n) \in V \times I | x_n \leq u(x')\} \quad \text{und} \quad M = \{(x', x_n) \in V \times I | x_n = u(x')\}\ .$$

Es sei weiter $f : V \times I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit kompakten Träger in $V \times I$, $\operatorname{supp}(f) \subseteq V \times I$. Dann gilt für alle $i = 1, \ldots, n$:

$$\int_K D_i f(x)\ dx = \int_M f \nu_i\ dS$$

mit

$$\nu_i(x', u(x')) = -\frac{D_i u(x')}{\sqrt{1 + |Du(x')|^2}} \quad \text{für } i = 1, \ldots, n-1$$

und

$$\nu_n(x', u(x')) = +\frac{1}{\sqrt{1 + |Du(x')|^2}} \quad \text{für } i = n\ .$$

¡? Beweis ¿!

1.Fall ($i = 1, \ldots, n-1$):
Man setze $F : V \times I \to \mathbb{R}$

$$F(x', x_n) := \int_a^{x_n} f(x', z)\ dz\ .$$

Mit dem Haupsatz folgt $D_n F(x) = f(x)$ und

$$D_i F(x) = \int_a^{x_n} D_i f(x', z)\ dz \quad (i = 1, \ldots, n-1)\ .$$

Betrachte nun $V \to \mathbb{R}$,

$$x' \to D_i\big(\int_a^{u(x')} f(x',z)\; dz\big) = D_i\big(F(x',u(x')\big)\;.$$

Dann ist

$$D_i\big(F(x',u(x'))\big) = (D_iF)\big(x',u(x')\big) + D_nF\big(x',u(x')\big)\cdot D_iu(x') \quad i=1,\dots,n-1\;.$$

Weil $V \to \mathbb{R}$, $x' \to F(x',u(x'))$ kompakten Träger in V hat, folgt nach Lemma 7.9.

$$\begin{aligned}
0 &= \int_V D_i\big(F(x',u(x'))\big)\; dx' \\
&= \int_V (D_iF)(x',u(x'))\; dx' + \int_V D_nF(x',u(x'))\cdot D_iu(x')\; dx' \\
&= \int_V \left(\int_a^{u(x')} D_if(x',u(x'))\; dz\right)\; dx' + \int_V f(x',u(x'))\cdot D_iu(x')\; dx' \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \int_K D_if(x)\; dx + \int_V f(x',u(x'))D_iu(x')\; dx'\;.
\end{aligned}$$

Für das Koordinatensystem $\varphi : V \to M \subseteq \mathbb{R}^n$, $\varphi(x') = (x',u(x'))$ gilt nun:

$$J_\varphi(x') = \sqrt{1+|Du(x')|^2}\;,$$

also ist

$$\begin{aligned}
\int_M f\nu_i\; dS &= \int_V f\nu_i \circ \varphi \cdot J_\varphi\; dx' \\
&= \int_V f(x',u(x'))\cdot \nu_i(x',u(x'))\sqrt{1+|Du(x')|^2}\; dx' \\
&= -\int_V f(x',u(x'))D_iu(x')\; dx' \\
&= \int_K D_if(x)\; dx\;.
\end{aligned}$$

2. Fall $(i=n)$:

$$\begin{aligned}
\int_K D_nf(x)\; dx &\overset{\text{Fubini}}{=} \int_V \left(\int_a^{u(x')} D_nf(x',z)\; dz\right)\; dx' \\
&\overset{\text{Hauptsatz}}{=} \int_V f(x',u(x')) - \underbrace{f(x',a)}_{\substack{=0 \\ \text{kompakter Träger}}} \quad dx' \\
&= \int_V f(x',u(x'))\underbrace{\nu_n(x',u(x'))J_\varphi(x')}_{=1}\; dx' \\
&= \int (f\nu_n)\circ\varphi J_\varphi\; dx' \\
&\overset{\text{Def von } M}{=} \int_M f\nu_n\; dS\;.
\end{aligned}$$

QED∎

¡? Beweis ¿! des Gauß'schen Satzes

Weil $M = \partial K$ Hyperfläche ist folgt: $\forall p \in M \quad \exists k \in \{1, \ldots, n\}, \exists$ Umgebung $(a, b) = I$ von p_k und $\exists$ Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ von $p' = (p_1, \ldots, (no\ p_k), \ldots, p_n)$, so dass

$$M \cap (V \times I) = graph(u)$$

für ein stetig differenzierbares $u : V \to I$ (impliziter Funktionen-Satz). Also: $\exists$ Überdeckung $(U_i)_{i=0}^r$ von K mit

1. $U_0 \subseteq K \backslash M$
2. $U_i = V_i \times (a, b)$ und $U_i \cap K = \{(x', x_{k(i)} | x_{k(i)} \leq u_i(x')\}$ für ein $u_i : V_i \to (a_i, b_i) \quad i = 1, \ldots, r$.

Benutze nun folgendes Überdeckungslemma von Lebesgue (`Forster III,§15`):

Lemma 7.11. Lebesgue
Ist $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von K, so existiert ein $\lambda > 0$ mit folgender Eigenschaft: Ist $A \subseteq K$ mit $\mathrm{diam}(A) = \sup\{|x - y| \, | x, y \in A\} < \lambda$, so existiert ein $i_0 \in I$, so dass $A \subseteq U_{i_0}$.

Sei nun $\lambda > 0$ eine Lebesgue-Zahl für K bzgl. $(U_i)_{i=0}^r$. Ist also $A \subseteq K$ so, dass $\mathrm{diam}(A) < \lambda$ ist, so existiert $i \in \{0, \ldots, r\} : A \subseteq U_i$. Setze $\varepsilon := \frac{\lambda}{2\sqrt{n}}$.
Schritt 1
Betrachte nun eine Teilung der Eins $(\alpha_{q\varepsilon})_{q \in \mathbb{Z}}$ von $\mathbb{R}^n$ (das expliziert `Forster III`) mit der Eigenschaft

$$\mathrm{supp}(\alpha_{q\varepsilon}) = W(\varepsilon q, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n | \, |x_i - \varepsilon q_i| < \varepsilon, i = 1, \ldots, n\} =: W_q$$

der Würfel mit Mittelpunkt εq und der Kantenlänge 2ε. Dann ist

$$\mathrm{diam}(W_q) = 2\sqrt{n}\varepsilon = \lambda \; .$$

Weiter gilt für $\forall q \in \mathbb{Z}^n$ mit $W_q \cap K \neq \emptyset \quad \exists i \in \{0, \ldots, r\} : W_q \subseteq U_i$ Sei nun

$$Q = \{q \in \mathbb{Z}^n | w_q \cap K \neq \emptyset\} \; .$$

Dann ist Q endlich und für alle $x \in K$ gilt

$$\sum_{q \in Q} \alpha_{q\varepsilon}(x) = 1 \; .$$

Nun rechne

$$\int_K \mathrm{div}\,(X)\; dx = \int_K \mathrm{div}\left(\sum_q \alpha_{q\varepsilon} X\right)\; dx = \sum_{q \in Q} \int \mathrm{div}\;(\alpha_{q\varepsilon} X)\; dx$$

und

$$\int_{\partial K} \langle X, \nu \rangle \; dS = \int_{\partial K} \left\langle \sum_q \alpha_{q\varepsilon} X, \nu \right\rangle \; dS = \sum_{q \in Q} \int \langle \alpha_{q\varepsilon} X, \nu \rangle \; dS \; .$$

Das zeigt: Gilt der Gauß'sche Integralsatz für Vektorfelder X mit $\mathrm{supp}(X) \subseteq U_i$ für ein $i \in \{0, \ldots, r\}$, so gilt er auch für alle Vektorfelder!

Schritt 2
1. Fall $(i = 0)$
Sei $\mathrm{supp}(X) \subseteq U_0$. Dann hat $f := X_k \quad k \in \{1, \ldots, n\}$ einen kompakten Träger in U_0. Mit Lemma 7.9. folgt deshalb:

$$\int_K \mathrm{div}\,(X)\; dx = \sum_{k=1}^n \int_K D_k(X_k)\; dx = 0 \; .$$

Andererseits

$$X|_{\partial K} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{\partial K} \langle X, \nu \rangle \; dS = 0 \; .$$

2. Fall $(i = 1, \ldots, r)$
Wegen Lemma 7.10. ist hier

$$\int_K \operatorname{div}(X) \; dx = \sum_{k=1}^{n} \int D_k(X_k) \; dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{\partial K} X_k \nu_k \; dS = \int_{\partial K} \langle X, \nu \rangle \; dS \; .$$

QED■

Index