Universität Tübingen — WiSe 2020/21
Fachbereich Mathematik — 09.11.2020
Prof. Dr. Frank Loose — Blatt 01

Musterlösungen zur Integrations- und Maßtheorie

Aufgabe 01. Sei K ein Körper. Ein 4-Tupel $(A, +, *, \cdot)$ heißt *eine (assoziative) K-Algebra*, wenn $+, *$ innere Verknüpfungen auf A sind, also $+, *\colon A \times A \to A$, und $\cdot$ eine äußere Verknüpfung auf A ist, also $\cdot\colon K \times A \to A$, so dass gilt: (i) $(A, +, *)$ ist ein Ring; (ii) $(A, +, \cdot)$ ist ein K-Vektorraum; (iii) $\lambda \cdot (x * y) = (\lambda \cdot x) * y = x * (\lambda \cdot y)$, für alle $\lambda \in K$, $x, y \in A$.

(a) Sei $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ der Körper mit zwei Elementen und X eine beliebige Menge. Definieren Sie auf allen Abbildungen von X nach $\mathbb{F}_2$, $A := \mathrm{Abb}(X, \mathbb{F}_2)$, in naheliegender Weise Verknüpfungen $(+, *, \cdot)$, mit denen $(A, +, *, \cdot)$ zu einer $\mathbb{F}_2$-Algebra (mit Einselement) wird.

(b) Wir definieren nun für jede Teilmenge $Y \subseteq X$ ihre *charakteristische Funktion* $\chi_Y\colon X \to \mathbb{F}_2$ durch $\chi_Y(x) = 1$, falls $x \in Y$ ist, und $\chi_Y(x) = 0$, falls $x \notin Y$ ist. Zeigen Sie, dass die Zuordnung $\Phi\colon \mathfrak{P}(X) \to \mathrm{Abb}(X, \mathbb{F}_2)$, $Y \mapsto \chi_Y$, bijektiv ist.

(c) Welchen mengentheoretischen Verknüpfungen auf $\mathfrak{P}(X)$ entsprechen nun via Φ den inneren Verknüpfungen $+$ und $*$ von $\mathrm{Abb}(X, \mathbb{F}_2)$ auf $\mathfrak{P}(X)$? Zeigen Sie: Eine Teilmenge $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ ist bezüglich der induzierten Strukturen $(+, *, \cdot)$ via Φ genau dann eine $\mathbb{F}_2$-*Unteralgebra mit Eins*, wenn gilt: (i) $X \in \mathfrak{A}$; (ii) $\forall Y \in \mathfrak{A} : Y^c \in \mathfrak{A}$; (iii) $\forall Y_1, Y_2 \in \mathfrak{A}$: $Y_1 \cup Y_2 \in \mathfrak{A}$.

Lösungsvorschlag. (a) Die Verknüpfungen $+$, $*$ und $\cdot$ auf $A = \mathrm{Abb}(X, \mathbb{F}_2)$ werden natürlich *punktweise* definiert:

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad (f * g)(x) := f(x)g(x), \quad (\lambda \cdot f)(x) := \lambda f(x),$$

für alle $x \in X$, $\lambda \in K$ und $f, g \in A$. Da $\mathbb{F}_2$ ein Körper ist, folgt leicht, dass $(A, +, *, \cdot)$ eine $\mathbb{F}_2$-Algebra mit Eins ist. Das Einselement wird offenbar durch die konstante Funktion $c_1\colon X \to \mathbb{F}_2$, $c_1(x) = 1$, gegeben. [*Anmerkung*: Man beachte, dass für eine Menge X mit mindestens 2 Elementen A selbst kein Körper ist, da Elemente ungleich Null, die aber Nullstellen haben, offenbar nicht invertierbar sind.]

(b) Für jedes $f \in \mathrm{Abb}(X, \mathbb{F}_2)$ setzen wir

$$Y_f := \{x \in X : f(x) = 1\}.$$

Dann ist $\Psi\colon \mathrm{Abb}(X, \mathbb{F}_2) \to \mathfrak{P}(X)$, $f \mapsto Y_f$, invers zu Φ, denn

$$\Psi \circ \Phi(Y) = \Psi(\chi_Y) = \{x \in X : \chi_Y(x) = 1\} = Y$$

für alle $Y \in \mathfrak{P}(X)$ und für alle $f \in \mathrm{Abb}(X, \mathbb{F}_2)$ ist

$$\Phi \circ \Psi(f) = \Phi(Y_f) = \chi_{Y_f} = f,$$

denn da χ_{Y_f} auf Y_f gerade 1 und sonst 0 ist, stimmt χ_{Y_f} also mit f überein. (Beachte, dass f ja nur die Werte 0 und 1 annehmen kann.) Φ ist damit bijektiv.

(c) Wir setzen also die Verknüpfungen $+, *\colon \mathfrak{P}(X) \times \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(X)$ so fest:

$$Y_1 + Y_2 := \Phi^{-1}(\Phi(Y_1) + \Phi(Y_2)), \quad Y_1 * Y_2 := \Phi^{-1}(\Phi(Y_1) * \Phi(Y_2)).$$

Da

$$\chi_{Y_1} * \chi_{Y_2} = \chi_{Y_1 \cap Y_2}$$

ist, denn $\chi_{Y_1}\chi_{Y_2}(x) = 1$, genau wenn $\chi_{Y_1}(x) = 1$ und $\chi_{Y_2}(x) = 1$ ist, folgt: $Y_1 * Y_2 = Y_1 \cap Y_2$. Bei der Summe müssen wir etwas aufpassen. Da für $\lambda, \mu \in \mathbb{F}_2$

$$\lambda + \mu = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad (\lambda = 1, \mu = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda = 0, \mu = 1)$$

ist, denn $1 + 1 = 0$ in $\mathbb{F}_2$, gilt:

$$\chi_{Y_1} + \chi_{Y_2} = \chi_W,$$

genau für $W = Y_1 \setminus Y_2 \cup Y_2 \setminus Y_1$. Wir nennen

$$Y_1 \triangle Y_2 := Y_1 \setminus Y_2 \cup Y_2 \setminus Y_1$$

die *symmetrische Differenz von* Y_1 *und* Y_2 und stellen also fest, dass $Y_1 + Y_2 = Y_1 \triangle Y_2$ ist. (Natürlich ist die äußere Multiplikation $\cdot\colon \mathbb{F}_2 \times \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(X)$ via Φ gegeben durch

$$0 \cdot Y = \emptyset, \quad 1 \cdot Y = Y,$$

für alle $Y \in \mathfrak{P}(X)$, denn das Nullelement (bzgl. $+ = \triangle$) auf $\mathfrak{P}(X)$ ist offenbar die leere Teilmenge (und das Einselement die volle Teilmenge von X)).

Eine K-Unteralgebra B einer K-Algebra A ist eine nicht-leere Teilmenge $B \subseteq A$, für die gilt

(i) $\lambda b \in B$, $\forall \lambda \in K$, $\forall b \in B$;

(ii) $b_1 + b_2 \in B$, $\forall b_1, b_2 \in B$;

(iii) $b_1 b_2 \in B$, $\forall b_1, b_2 \in B$.

(Man unterdrückt häufig die Symbole $*$ und $\cdot$.) Im Falle unserer $\mathbb{F}_2$-Algebra $\mathfrak{P}(X)$ bedeutet (i) nur, dass $\emptyset = 0 \cdot Y$ (für ein $Y \in \mathfrak{A}$) in $\mathfrak{A}$ liegen muss. (ii) bedeutet demnach, dass mit $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{A}$ auch $Y_1 \triangle Y_2 \in \mathfrak{A}$ liegt, und (iii), dass mit $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{A}$ auch $Y_1 \cap Y_2 \in \mathfrak{A}$ ist. Ist nun $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ eine $\mathbb{F}_2$-Unterlagebra mit Eins, so folgt dann für jedes $Y \in \mathfrak{A}$, dass wegen $1 = X \in \mathfrak{A}$ auch

$$Y^c = X \setminus Y \cup \emptyset = X \setminus Y \cup Y \setminus X = X \triangle Y$$

in $\mathfrak{A}$ ist. Weiterhin ist dann wegen

$$Y_1 \cup Y_2 = (Y_1^c \cap Y_2^c)^c$$

mit $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{A}$ auch $Y_1 \cup Y_2 \in \mathfrak{A}$. Eine Unterlagebra $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ mit Eins erfüllt also auch die Axiome

(i') $X \in \mathfrak{A}$;

(ii') $Y^c \in \mathfrak{A}$, $\forall Y \in \mathfrak{A}$;

(iii') $Y_1 \cup Y_2 \in \mathfrak{A}$, $\forall Y_1, Y_2 \in \mathfrak{A}$.

Umgekehrt gelten für eine Teilmenge $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(X)$, die (i')-(iii') erfüllt, auch die Axiome (i)-(iii) zusammen mit $X \in \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}$ ist also eine $\mathbb{F}_2$-Unteralgebra mit Eins. Den Nachweis überlassen wir dem Leser.

Anmerkung: Der Buchstabe σ (Klein-Sigma) steht in der Maßtheorie meist für „abzählbare Summe". Mit „Summe" von zwei Mengen wurde früher auch oft die Vereinigung dieser gemeint. Deshalb ist eine σ-Algebra auf einer Menge X eine Unteralgebra $\mathfrak{A}$ der *Mengenalgebra* $\mathfrak{P}(X)$ mit Eins, wo für eine abzählbare Familie von Mitgliedern in $\mathfrak{A}$ auch ihre Vereinigung wieder in $\mathfrak{A}$ ist (σ-(iii')).

Aufgabe 02. (a) Recherchieren Sie zunächst den sogenannten *Großen Umordnungssatz* für absolut kovergente Reihen, formulieren und erläutern Sie ihn.

(b) Sei nun X eine abzählbare Menge (endlich oder unendlich) und $\varphi\colon X \to [0, \infty]$ eine beliebige Funktion (die wir als *Gewichtsfunktion* interpretieren). Zeigen Sie, dass durch $\mu_\varphi\colon \mathfrak{P}(X) \to [0, \infty]$,

$$\mu_\varphi(A) = \sum_{x \in A} \varphi(x),$$

ein Maß auf $(X, \mathfrak{P}(X))$ definiert wird.

(c) Sei X wieder abzählbar. Zeigen Sie, dass jedes Maß μ auf $(X, \mathfrak{P}(X))$ wie unter (b) zu Stande kommt und dass $\varphi\colon X \to [0, \infty]$ mit $\mu = \mu_\varphi$ eindeutig bestimmt ist.

Lösungsvorschlag. (a) *Der große Umordnungssatz* für absolut konvergente Reihen: Gegeben sei eine „Doppelreihe" reeller Zahlen

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$$

und weiterhin eine Bijektion $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Wir setzen dann $b_\nu := a_{\varphi(\nu)} \in \mathbb{R}$ ($\nu \in \mathbb{N}$). Jetzt fordern wir, dass die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu$ absolut konvergent ist und ihr Grenzwert sei $b \in \mathbb{R}$. Dann besagt der Große Umordnungssatz:

(i) Jede *Zeilenreihe* $Z_m := \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}$ ($m \in \mathbb{N}$) ist absolut konvergent;

(ii) jede *Spaltenreihe* $S_n := \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}$ ($n \in \mathbb{N}$) ist absolut konvergent;

(iii) die Reihen $\sum_{m=1}^{\infty} Z_m$ und $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ sind absolut konvergent und es gilt:

$$\sum_{m=1}^{\infty} Z_m = \sum_{m=1}^{\infty}(\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}) = \sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n = b.$$

Man kann also bei absolut konvergenten Reihen nicht nur die Summanden beliebig umordnen (vertauschen), ohne die absolute Konvergenz gegen den gleichen Grenzwert zu verlieren, sondern man kann auch die natürlichen Zahlen in (abzählbar viele) größere (als nur einelementige oder endliche) Teilmengen $M_k \subseteq \mathbb{N}$ ($k \in \mathbb{N}$) partionieren,

$$\mathbb{N} = M_1 \,\dot{\cup}\, M_2 \,\dot{\cup} \cdots,$$

dann zunächst nur über die Glieder, deren Indizes aus einem M_k ($k \in \mathbb{N}$) kommen, (in irgendeiner Reihenfolge) summieren, und die Grenzwerte dieser dann noch einmal. Mit dem gleichen Ergebnis (und alle Konvergenzen sind absolut).

Anmerkung: Wir werden diesen Satz später in der Vorlesung als einen Spezialfall unseres *Satzes von Fubini* beweisen.

(b) Sei nun $\varphi\colon X \to [0,\infty]$ und $\mu = \mu_\varphi\colon \mathfrak{P}(X) \to [0,\infty]$ wie in der Aufgabenstellung. Dann ist zunächst

$$\mu(\emptyset) = \sum_{x\in\emptyset} \varphi(x) = 0,$$

und dies nach unserer Definition (aus Analysis 1), dass eine leere Summe (reeller Zahlen) stets Null sein soll. Seien nun $A_k \subseteq X$ ($k \in \mathbb{N}$) beliebig, allerdings paarweise disjunkt, sowie $A := \bigcup_k A_k$. Im Fall, dass $\mu(A) < \infty$ ist, liefert nun der Große Umordnungssatz

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k) = \sum_{k\in\mathbb{N}}(\sum_{x\in A_k} \varphi(x)) = \sum_{x\in A} \varphi(x) = \mu(A).$$

(Wer eine Doppelreihe sehen möchte, zähle jedes A_k mit einem $\iota_k\colon \mathbb{N} \to A_k$ ab (falls A_k unendlich ist) und setze dann $a_{kl} = \varphi(\iota_k(l))$ (und fülle mit Nullen auf, falls A_k endlich ist).)

Der Fall $\mu(A) = \infty$ ist einfacher. Ist nämlich $C > 0$ beliebig, so gibt es Elemente $x_1, \ldots, x_n \in A$ mit $\sum_{j=1}^n \varphi(x_j) \geq C$. Sei $x_j \in A_{k_j}$. Die k_j's müssen nicht alle paarweise verschieden sein. Setzen wir daher $\{k_1, \ldots, k_n\} =: \{l_1, \ldots, l_m\}$ mit nun paarweise verschiedenen l_i's (und $m \leq n$). Dann ist

$$\sum_{i=1}^m \mu(A_{l_i}) \geq \sum_{j=1}^n \varphi(x_j) \geq C$$

und damit ist auch $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k) = \infty$.

(c) Sei Maße(X) die Menge aller Maße auf $(X, \mathfrak{P}(X)$ und $\mu \in$ Maße(X). Dann setzen wir $\varphi_\mu\colon X \to [0,\infty]$,

$$\varphi_\mu(x) := \mu(\{x\}).$$

Wir behaupten, dass die Abbildungen $\Phi\colon \mathrm{Abb}(X,[0,\infty]) \to$ Maße(X), $\varphi \mapsto \mu_\varphi$ und $\Psi\colon$ Maße$(X) \to \mathrm{Abb}(X,[0,\infty])$, $\mu \mapsto \varphi_\mu$, invers zueinander sind. Denn

$$\mu_{\varphi_\mu}(A) = \sum_{x\in A} \varphi_\mu(x) = \sum_{x\in A} \mu(\{x\}) = \mu(\dot{\bigcup}_{x\in A} \{x\}) = \mu(A),$$

für alle $A \in \mathfrak{P}(X)$, und

$$\varphi_{\mu_\varphi}(x) = \mu_\varphi(\{x\}) = \varphi(x),$$

für alle $x \in X$. Es gibt also zu jedem Maß μ auf $(X, \mathfrak{P}(X))$ genau ein $\varphi\colon X \to [0,\infty]$ mit $\mu = \mu_\varphi$.

Aufgabe 03 (Schrumpfungsformel). **(a)** Sei $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra auf einer Menge X und μ ein Maß auf $(X, \mathfrak{A})$. Zeigen Sie: Sind $A_k \in \mathfrak{A}$ ($k \in \mathbb{N}$) mit $A_k \supseteq A_{k+1}$, für alle $k \in \mathbb{N}$, und ist $\mu(A_1) < \infty$, so gilt für $A := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k$:

$$\mu(A) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).$$

(b) Sei μ das Zählmaß auf $\mathbb{N}$ sowie $A_k := \{n \in \mathbb{N} : n \geq k\}$ $(k \in \mathbb{N})$. Zeigen Sie, dass die Schrumpfungsformel (a) für (A_k) nicht gilt.

Lösungsvorschlag. (a) Da $\mu(A_1) < \infty$ ist, und damit wegen der Monotonie des Maßes und $A_k \subseteq A_1$, für alle $k \in \mathbb{N}$, sowie $A \subseteq A_1$, sind alle Maßzahlen in der folgenden Rechnung endlich und es darf deshalb subtrahiert werden. Sind alle $\mu(A_k) = \infty$ $(k \in \mathbb{N})$, so bricht die Argumentation zusammen und die Aussage wird auch falsch (siehe Teil (b)). [*Anmerkung:* Ist dagegen $\mu(A_{k_0}) < \infty$, für ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so bleibt die Aussage richtig, da man dann die Familie $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ einfach durch $(A_k)_{k\geq k_0}$ ersetzen kann, denn weder A ändert sich dann noch $\lim_{k\to\infty} \mu(A_k)$.]

Wir beobachten nun zunächst, dass wegen der Schachtelung ineinander und der Monotonie des Maßes die Folge $(\mu(A_k))$ monoton fallend und nach unten durch 0 beschränkt ist und damit also konvergieren muss. Das zeigt also bereits die Existenz von $\lim \mu(A_k)$. Dann ist die Folge (B_k) mit $B_k := A_1 \setminus A_k$ aufsteigend, denn wegen $A_k \supseteq A_{k+1}$ ist

$$B_k = A_1 \setminus A_k \subseteq A_1 \setminus A_{k+1} = B_{k+1},$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Außerdem ist

$$\bigcup_k (A_1 \setminus A_k) = A_1 \setminus \bigcap_k A_k = A_1 \setminus A.$$

Wir schreiben: $(A_1 \setminus A_k) \nearrow (A_1 \setminus A)$. Nach der Ausschöpfungsformel ist deshalb:

$$\begin{aligned} \mu(A_1) - \mu(A) &= \mu(A_1 \setminus A) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_1 \setminus A_k) = \lim_{k\to\infty} (\mu(A_1) - \mu(A_k)) \\ &= \mu(A_1) - \lim_{k\to\infty} \mu(A_k), \end{aligned}$$

und damit nach Subtraktion von $\mu(A_1)$:

$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu(A).$$

(b) Das *Zählmaß* auf einer abzählbaren Menge X ist das Maß μ zur Gewichtsfunktion $\varphi \equiv 1$ auf X (vgl. Aufgabe 02). Es ist also für $A \subseteq X$ durch

$$\mu(A) = \sharp(A) (= \text{Anzahl der Elemente von } A)$$

(und diese Formel macht auch Sinn für beliebige Mengen X) gegeben. Für $X = \mathbb{N}$ und $A_k = \{n \in \mathbb{N} : n \geq k\}$ folgt: $\mu(A_k) = \infty$, da A_k offenbar unendlich ist, und es ist auch $A_k \supseteq A_{k+1}$, für alle $k \in \mathbb{N}$. Aber $A := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k = \emptyset$ und deshalb ist

$$\mu(A) = 0 \neq \infty = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).$$

[Nach der Anmerkung unter (a) gilt also immer „$\leq$", da nur im Falle $\mu(A_k) = \infty$, für alle $k \in \mathbb{N}$, etwas schief gehen kann, in welchem Fall aber die rechte Seite ∞ ist und damit $\mu(A) \leq \infty$ stets richtig ist.]

Aufgabe 04. (a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}$ und $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ gleichmächtig sind. (Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\mathbb{R}$ und $[0, 1)$ gleichmächtig sind und drücken Sie dann jedes $x \in [0, 1)$ durch seinen *Dualbruch* $0, a_1a_2 \ldots$ (mit $a_k \in \mathbb{F}_2$, $k \in \mathbb{N}$) aus.)

(b)* Sei $\mathfrak{B}_n \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ die Borel-Algebra ($n \in \mathbb{N}$). Zeigen Sie, dass $\mathfrak{B}_n$ gleichmächtig zu $\mathbb{R}$ ist und damit, dass $\mathfrak{B}_n \neq \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ sein muss.

Hinweis: Benutzen Sie die Sätze von *Schröder-Bernstein* und *Cantor* aus der Analysis-I.

Lösungsvorschlag. (a) Um zu zeigen, dass $\mathbb{R}$ und $[0,1)$ gleichmächtig sind, reicht es, eine Injektion $\iota\colon \mathbb{R} \to [0,1)$ anzugeben. Da die Inklusion $[0,1) \hookrightarrow \mathbb{R}$ auch injektiv ist, gibt es nach dem *Satz von Schröder-Bernstein* auch eine Bijektion zwischen $\mathbb{R}$ und $[0,1)$. Das schaffen wir sogar in stetiger Weise z.B. durch

$$x \mapsto \frac{1}{\pi}\arctan(x) + \frac{1}{2},$$

denn bekanntlich bildet arctan die reellen Zahlen bijektiv auf das Intervall $(-\pi/2, \pi/2)$ ab.

Nun zeigen wir, dass $[0,1)$ und $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ gleichmächtig sind. Dazu schreiben wir jedes $x \in [0,1)$ eindeutig ohne Einerenden als

$$x = 0, a_1 a_2 \cdots$$

mit $a_n \in \{0,1\}$ ($n \in \mathbb{N}$). Dann setzen wir $\iota\colon [0,1) \to \mathfrak{P}(\mathbb{N})$,

$$\iota(x) = \{n \in \mathbb{N} : a_n = 1\},$$

Dann ist ι injektiv und „fast“ surjektiv. Das Komplement M des Bildes besteht nur aus den Teilmengen von $\mathbb{N}$, für die es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, ab dem alle Elemente in der Teilmenge liegen (Einerenden). Davon gibt es aber nur abzählbar viele. Es folgt, dass Bild(ι) die gleiche Mächtigkeit wie $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ hat. Wähle dazu etwa eine Kopie N von $\mathbb{N}$ in $[0,1)$, z.B. die Hauptbrüche $1/n$ ($n \in \mathbb{N}$). Bilde diese dann bijektiv auf $\iota(N) \cup M$ ab und das Komplement wie vorher. Das so variierte ι ist dann bijektiv.

Wegen der Transitivität der Gleichmächtigkeit ist damit $\mathbb{R}$ gleichmächtig zu $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$.

(b)* Das ist schwer. (Deshalb steht ein * daran.) Wir geben nur eine Beweisskizze.

Zunächst mal hat die Teilmenge $\mathfrak{U} := \mathfrak{U}_n$ aller offenen Mengen in $\mathbb{R}^n$ die Kardinalität von $\mathbb{R}$ bzw. $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$. Man nennt sie üblicherweise $2^{\aleph_0} := \operatorname{card}(\mathbb{R})$ ($\aleph_0 := \operatorname{card}(\mathbb{N})$). Das liegt daran, dass jede offene Menge Vereinigung von offenen Quadern mit rationalen Eckpunkten ist, wovon es nur abzählbar viele gibt. Durch die Vereinigung erhält man daher eine Surjektion von $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ auf $\mathfrak{U}$, also $\operatorname{card}(\mathfrak{U}) \leq 2^{\aleph_0}$. Da man $\mathbb{R}$ auch in $\mathfrak{U}$ injektiv abbilden kann, etwa durch $x \mapsto (0,x) \times \mathbb{R}^{n-1}$, ist auch $2^{\aleph_0} \leq \operatorname{card}(\mathfrak{U})$, nach Schröder-Bernstein also $\operatorname{card}(\mathfrak{U}) = 2^{\aleph_0}$.

Ebenso hat die Teilmenge $\mathfrak{A} := \mathfrak{A}_n \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ aller abgeschlossenen Mengen die Kardinalität des Kontinuums $\mathbb{R}$, denn die Komplementbildung ist eine Bijektion von $\mathfrak{U}$ auf $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{U} \cup \mathfrak{A}$ ist also abgeschlossen gegen Komplementbildung und auch gegenüber endlichen Durchschnitten und endlichen Vereinigungen, $\mathfrak{A}$ auch gegenüber abzählbar vielen (sogar beliebig vielen) Durchschnitten, nicht allerdings $\mathfrak{U}$.

Man definiert nun eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ als eine *G_δ-Menge* („δ“ für abzählbare Durchschnitte), wenn sie Durchschnitt von abzählbar vielen offenen Mengen ist. Diese liegen offenbar in der Borelalgebra $\mathfrak{B} := \mathfrak{B}_n$. Die Komplemente von diesen, also Vereinigung von abzählbar vielen abgeschlossenen Mengen, nennt man eine *F_σ-Menge* („σ“ für abzählbare Vereinigungen). Auch diese gehören zu $\mathfrak{B}$. Auch die G_δ- und F_σ-Mengen haben die Kardinalität des Kontinuums, wie ein gängiges Diagonalargument zeigt. Leider sind dies immer noch nicht alle Borelmengen. Denn G_δ-Mengen sind nun zwar abgeschlossen gegenüber abzählbaren Durchschnitten, aber nicht gegenüber abzählbaren Vereinigungen, und entsprechend ihre Komplemente, die F_σ-Mengen nicht gegenüber abzählbaren Durchschnitten.

Deshalb bildet man jetzt die sogenannten $G_{\delta\sigma}$- und $F_{\sigma\delta}$-*Mengen*. Eine $G_{\delta\sigma}$-Menge ist Vereinigung von abählbar vielen G_δ-Mengen, eine $F_{\sigma\delta}$-Menge Durchschnitt von abzählbar vielen F_σ-Mengen. Auch diese haben die Kardinalität des Kontinuums.

Nun ist klar, wie man weitermacht. Aber leider haben zwar die $G_{(\delta\sigma)^n}$- und $F_{(\sigma\delta)^n}$-Mengen für jedes $n \in \mathbb{N}$ (n Kopien $(\delta\sigma)$ bzw. $(\sigma\delta)$ im Index) immer noch die Kardinalität von $\mathbb{R}$, sind aber immer noch nicht abgeschlossen gegenüber abzählbaren Vereinigungen und Durchschnitten. Deshalb bildet man nun

$$G_\omega := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_{(\delta\sigma)^n}, \quad F_\omega := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_{(\sigma\delta)^n},$$

wobei man hier unter ω die natürlichen Zahlen mit ihrer natürlichen Ordnungsstruktur „$\leq$" meint, $\omega = (\mathbb{N}, \leq)$, einer sogenannten „Ordinalzahl". Ordinalzahlen sind Verallgemeinerungen von natürlichen Zahlen, die einem – grob gesprochen – auch das Weiterzählen bei unendlichen Mengen gestatten. Die erste *transfinite Ordinalzahl* ist ω.

Aber leider ist nun auch bei $G_\omega \cup F_\omega$ noch immer nicht Schluss. $\mathfrak{B}$ ist immer noch größer. Man muss jetzt noch „weiterzählen" bis zur ersten überabzählbaren Ordinalzahl Ω (eine gewisse wohlgeordnete Menge, siehe Exkurs) deren Kardinalität man mit $\aleph_1$ bezeichnet. (Es ist also $\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}$.) Und dann zeigt man, dass $G_\Omega \cup F_\Omega$ immer noch die Kardinalität von $\mathbb{R}$ hat, dass sie aber zudem abgeschlossen unter Komplementbildung und gegenüber abzählbaren Vereinigungen (und Durchschnitten) ist und deshalb die Borelalgebra $\mathfrak{B}$ sein muss.

Nach dem Satz von Cantor ist $\mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ echt mächtiger als $\mathbb{R}^n$ (und $\mathbb{R}^n$ ist mächtiger als $\mathbb{R}$ (sogar gleichmächtig)). Es folgt, dass $\mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ echt mächtiger als $\mathfrak{B}_n$ und damit verschieden von $\mathfrak{B}_n$ ist.

Exkurs: Eine *Ordinalzahl* soll eigentlich so etwas wie eine Äquivalenzklasse von *wohlgeordneten Mengen* $(X, \leq)$ sein (unter ordnungserhaltenden Bijektionen). Alle diese bilden aber keine Menge. Es gibt einfach zu viele „Kopien". Hier hilft man sich mit einem Trick. Man wählt aus jeder Äquivalenzklasse eine besondere wohlgeordnete Menge aus, in dem man insbesondere verlangt, dass die Ordnungsrelation durch die Elementbeziehung zustande kommt. Eine *Wohlordnung* $\leq$ *auf einer Menge* ist eine lineare Ordnung $\leq$, bei der jede Teilmenge ein (dann eindeutig bestimmtes) kleinstes Element hat. So werden die natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ nach *J. von Neumann* etwa durch $0 = \emptyset$ und dann rekursiv durch $n + 1 = n \cup \{n\}$, also z.B. $5 = \{1, 2, 3, 4\}$, gegeben, und die natürliche Ordnung durch $k < n$, wenn $k \in n$ ist. Und so macht man es allgemein mit Ordinalzahlen $(X, \leq)$: Man verlangt, dass für alle $x \in X$ gilt:

$$x = \{y \in X : y < x\}.$$

Z.B. ist neben $n \in \mathbb{N}$ (für jedes n) auch $\mathbb{N}$ selbst eine Ordinalzahl, die man mit ω bezeichnet. Die nächste ist dann

$$\omega + 1 := \omega \cup \{\omega\} = \{1, 2, 3, \dots; \omega\},$$

mit der naheliegenden Ordnung. Ordinalzahlen sind immer miteinander durch die Inklusion vergleichbar, und betrachtet man jene, die kleiner oder gleich einer gegebenen γ sind, so ist dies eine Menge, die selbst wohlgeordnet sind. (Alle Ordinalzahlen bilden keine Menge. Zu viele.) Die Menge

$$\{\alpha : \alpha \text{ ist Ordinalzahl mit } \alpha \leq \gamma \text{ und } \alpha \text{ ist überabzählbar}\}$$

(für ein überabzählbares γ) hat daher ein kleinstes Element, welches mit Ω (unabhängig von γ) bezeichnet wird.

Kardinalzahlen sind spezielle Ordinalzahlen, nämlich jeweils die kleinsten aller Ordinalzahlen mit der gleichen Mächtigkeit. Jede Menge X ist zu genau einer Kardinalzahl gleichmächtig, die dann mit $\mathrm{card}(X)$ bezeichnet wird. Das liegt daran, dass man wegen des *Auswahlaxioms* auf jeder Menge eine Wohlordnung finden kann. Ähnlich wie bei den Ordinalzahlen kann man auch hier nicht die Äquivalenzklasse aller Mengen nehmen, die untereinander gleichmächtig sind. Das ist zu viel. Durch die Ordinalzahlen kann man hier jeweils einen besonderen Repräsentanten auswählen. Auch Kardinalzahlen sind Verallgemeinerungen der natürlichen Zahlen. Man kann mit ihnen in gewisser Weise rechnen, indem man Addition durch Vereinigung, Multiplikation durch cartesisches Produkt und Potenz durch Abbildungen definiert. Ist z.B. $a = \mathrm{card}(A)$, $b = \mathrm{card}(B)$, so setzt man $a^b := \mathrm{card}(\mathrm{Abb}(b, a))$. Die ersten transfiniten Kardinalzahlen werden mit $\aleph_0 = \mathrm{card}(\omega)$, $\aleph_1 := \mathrm{card}(\Omega)$, $\aleph_2, \aleph_3, \ldots$ bezeichnet. Die berühmte *Kontinuumshypothese* besteht in der Aussage „$\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$“. Die spektakuläre Antwort darauf von *Gödel* und *Cohen* überlasse ich Ihnen zum Nachschlagen. (Siehe z.B. in *P. Halmos:* Naive Mengenlehre)