Musterlösungen zur Integrations- und Maßtheorie

Aufgabe 05. Sei X eine Menge sowie $A, B \in \mathfrak{P}(X)$ und $\mathfrak{M} := \{A, B\} \subseteq \mathfrak{P}(X)$.

(a) Sei mindestens eine von den vier Mengen $A \cap B$, $A \cap B^c$, $A^c \cap B$, $A^c \cap B^c$ leer. Zeigen Sie, dass dann das von $\mathfrak{M}$ erzeugte Dynkin-System $\mathfrak{D}$ mit der von $\mathfrak{M}$ erzeugten σ-Algebra $\mathfrak{A}$ übereinstimmt, $\mathfrak{D} = \mathfrak{A}$. (Hinweis: Suchen Sie einen durchschnittsstabilen Erzeuger für $\mathfrak{D}$.)

(b) Seien nun die Mengen $A \cap B$, $A \cap B^c$, $A^c \cap B$ und $A^c \cap B^c$ allesamt nicht-leer. Zeigen Sie, dass dann das von $\mathfrak{M}$ erzeugte Dynkin-System $\mathfrak{D}$ nicht mit der von $\mathfrak{M}$ erzeugten σ-Algebra $\mathfrak{A}$ übereinstimmt, $\mathfrak{D} \neq \mathfrak{A}$. (Hinweis: $\mathfrak{D}$ ist sehr klein.)

(c) Geben Sie ein Dynkin-System an, welches keine σ-Algebra ist.

Lösungsvorschlag. (a) Da ein Dynkin-System stets $\emptyset$ enthält und mit jedem C auch sein Komplement C^c, stimmen die Dynkin-Systeme, die von den folgenden vier Teilmengen von $\mathfrak{P}(X)$ erzeugt werden, alle mit $\mathfrak{D}$ überein:

$$\mathfrak{E}_1 = \{\emptyset, A, B\}, \mathfrak{E}_2 = \{\emptyset, A, B^c\}, \mathfrak{E}_3 = \{\emptyset, A^c, B\}, \mathfrak{E}_4 = \{\emptyset, A^c, B^c\}.$$

Ist nun eine der vier Teilmengen $A \cap B$, $A \cap B^c$, $A^c \cap B$, $A^c \cap B^c$ leer, so ist auch eine der vier Teilmengen $\mathfrak{E}_1, \ldots, \mathfrak{E}_4$ durchschnittsstabil. Damit hat also $\mathfrak{D}$ einen durchschnittsstabilen Erzeuger und deshalb ist $\mathfrak{D} = \mathfrak{A}$.

(b) Sind nun die Mengen $A \cap B$, $A \cap B^c$, $A^c \cap B$ und $A^c \cap B^c$ allesamt nicht-leer, so behaupten wir zunächst, dass das von $\mathfrak{M}$ erzeugte Dynkin-System aus den folgenden (paarweise verschiedenen) sechs Teilmengen von X besteht:

$$\emptyset, A, B, A^c, B^c, X.$$

Denn für $\mathfrak{D}' := \{\emptyset, A, B, A^c, B^c, X\}$ gilt offenbar, dass $\emptyset \in \mathfrak{D}'$ und mit jedem $C \in \mathfrak{D}'$ auch $C^c \in \mathfrak{D}'$ ist. Nun gibt es nicht viele Möglichkeiten für zwei Teilmengen $C_1, C_2 \in \mathfrak{D}'$, dass $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ ist. Das passiert nur, wenn eine der Mengen C_1, C_2 leer ist oder $C_1 = A, C_2 = A^c$ oder $C_1 = B, C_2 = B^c$ (oder die Rollen von C_1, C_2 vertauscht werden). In all diesen Fällen liegt aber $C_1 \dot\cup C_2$ wieder in $\mathfrak{D}'$. Es ist also $\mathfrak{D}'$ ein Dynkin-System, und sicher das Kleinste, welches $\mathfrak{M}$ enthält, also $\mathfrak{D}' = \mathfrak{D}$.

Die von $\mathfrak{M}$ erzeugte σ-Algebra $\mathfrak{A}$ ist aber echt größer, denn sie enthält z.B. $A \cap B$. Man prüft nämlich leicht nach, dass $A \cap B$ keine von den sechs Teilmengen aus $\mathfrak{D}$ ist.

(c) Wir versuchen X möglichst klein zu machen und zwei Teilmengen $A, B \in \mathfrak{P}(X)$ zu finden, die die Bedingung aus Teil (b) erfüllen. Das gelingt bereits bei einer 4-elementigen Teilmenge $X = \{1, 2, 3, 4\}$ mit den Teilmengen

$$A = \{1, 2\} \text{ und } B = \{2, 3\},$$

was man leicht nachprüft.

Aufgabe 06. Sei X eine Menge und $\mathfrak{P}(X)$ versehen mit ihrer Ringstruktur aus Aufgabe 01. Zeigen Sie: Eine Teilmenge $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ ist genau dann einen Mengenring, wenn sie ein (algebraischer) Unterring von $\mathfrak{P}(X)$ ist.

Lösungsvorschlag. „$\Rightarrow$“: Ist $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ ein Mengenring, so ist also $\emptyset \in \mathfrak{R}$ und mit $R, S \in \mathfrak{R}$ sind auch $R \setminus S$ und $R \cup S$ in $\mathfrak{R}$. Wegen $R \triangle S = (R \setminus S) \cup (S \setminus R)$ ist dann auch $R \triangle S$ in $\mathfrak{R}$, und wegen $R \cap S = R \setminus (R \setminus S)$ auch $R \cap S \in \mathfrak{R}$. Damit ist dann $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ also ein (algebraischer) Unterring von $\mathfrak{P}(X)$. (Eigentlich muss man auch zeigen, dass mit R in $\mathfrak{R}$ auch ihr Negatives $-R$ in $\mathfrak{R}$ ist, aber wegen $A + A = 0$ in diesem Ring (für alle $A \in \mathfrak{P}(X)$, $\mathfrak{P}(X)$ ist ja eine $\mathbb{F}_2$-Algebra) ist $-R = R$.

„$\Leftarrow$“: Ist umgekehrt $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ ein algebraischer Unterring von $\mathfrak{P}(X)$, so ist also $\emptyset \in \mathfrak{R}$ und mit $R, S \in \mathfrak{R}$ sind auch $R \triangle S$ und $R \cap S$ in $\mathfrak{R}$. Wegen $R \setminus S = (R \triangle S) \cap R$ ist dann zunächst auch $R \setminus S \in \mathfrak{R}$. Sind R und S disjunkt, $R \cap S = \emptyset$, so ist wegen $R \mathbin{\dot\cup} S = R \triangle S$ in diesem Fall auch $R \mathbin{\dot\cup} S \in \mathfrak{R}$. Im allgemeinen Fall ist aber

$$R \cup S = (R \triangle S) \mathbin{\dot\cup} (R \cap S)$$

und daher auch $R \cup S \in \mathfrak{R}$. $\mathfrak{R}$ ist damit also auch ein Mengenring.

Ein Maßraum $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ heißt *vollständig*, falls für jedes $M \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(M) = 0$ auch alle Teilmengen $N \subseteq M$ in $\mathfrak{A}$ liegen.

Aufgabe 07. Sei $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum. Wir setzen $\mathfrak{N} := \{N \in \mathfrak{P}(X) : \text{es gibt ein } M \in \mathfrak{A} \text{ mit } N \subseteq M \text{ und } \mu(M) = 0\}$ sowie $\hat{\mathfrak{A}} := \{A \cup N : A \in \mathfrak{A} \text{ und } N \in \mathfrak{N}\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\hat{\mathfrak{A}}$ eine σ-Algebra mit $\mathfrak{A} \subseteq \hat{\mathfrak{A}}$ ist.

(b) Definiere $\hat{\mu}\colon \hat{\mathfrak{A}} \to [0, \infty]$ durch $\hat{\mu}(A \cup N) := \mu(A)$. Zeigen Sie, dass $\hat{\mu}$ ein wohldefiniertes Maß auf $(X, \hat{\mathfrak{A}})$ mit $\hat{\mu}|\mathfrak{A} = \mu$ ist, und dass $(X, \hat{\mathfrak{A}}, \hat{\mu})$ vollständig ist. ($(X, \hat{\mathfrak{A}}, \hat{\mu})$ heißt *die Vervollständigung von* $(X, \mathfrak{A}, \mu)$.)

Lösungsvorschlag. (a) (i) Da $\emptyset \in \mathfrak{A}$ und $\mu(A) = 0$ ist, ist $\emptyset \in \mathfrak{N}$. Damit ist $X = X \cup \emptyset \in \hat{\mathfrak{A}}$.

(ii) Seien nun $A, M \in \mathfrak{A}$, $\mu(M) = 0$ und $N \subseteq M$. Es ist dann $M^c \subseteq N^c$ und daher

$$\begin{aligned}(A \cup N)^c &= A^c \cap N^c = A^c \cap (N^c \cap (M \cup M^c)) = A^c \cap ((N^c \cap M) \cup (\underbrace{N^c \cap M^c}_{=M^c})) \\ &= (\underbrace{A^c \cap M^c}_{\in \mathfrak{A}}) \cup (\underbrace{A^c \cap N^c \cap M}_{\subseteq M}) \in \hat{\mathfrak{A}}.\end{aligned}$$

(iii) Seien $B_n \in \hat{\mathfrak{A}}$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann gibt es also $A_n, M_n \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(M_n) = 0$ und $N_n \subseteq M_n$ mit $B_n = A_n \cup N_n$. Wir setzen

$$A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n, \quad M := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n, \quad N := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n.$$

Dann ist auch $M \in \mathfrak{A}$ und

$$\mu(M) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(M_n) = 0$$

sowie $N \subseteq M$. Außerdem ist $A \in \mathfrak{A}$ und für $B := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ ist

$$B = \bigcup_n (A_n \cup N_n) = \bigcup_n A_n \cup \bigcup_n N_n = A \cup N \in \hat{\mathfrak{A}}.$$

Es ist also $\hat{\mathfrak{A}}$ eine σ-Algebra. Schließlich ist $\emptyset \in \mathfrak{N}$ und $A = A \cup \emptyset$, für jedes $A \in \mathfrak{A}$. Also ist A auch in $\hat{\mathfrak{A}}$ und damit $\mathfrak{A} \subseteq \hat{\mathfrak{A}}$.

(b) (i) $\hat{\mu}$ ist wohldefiniert: Nehmen wir also an, dass $A, A', M, M' \in \mathfrak{A}$ sind, $\mu(M) = \mu(M') = 0$ sowie $N \subseteq M$, $N' \subseteq M'$ mit

$$A \cup N = A' \cup N' =: B.$$

Dann müssen wir zeigen, dass $\mu(A) = \mu(A')$ ist. Mit M und M' ist wegen

$$\mu(M \cup M') \le \mu(M) + \mu(M') = 0 + 0 = 0$$

auch $M \cup M' \in \mathfrak{A}$ eine Nullmenge und daher

$$\mu(A) \le \mu(A \setminus (M \cup M')) + \mu(M \cup M') = \mu(A \setminus (M \cup M')),$$

also wegen der Monotonie und $A \setminus (M \cup M') \subseteq A$ also sogar $\mu(A) = \mu(A \setminus (M \cup M'))$. Nun ist

$$\begin{aligned} A \setminus (M \cup M') &\overset{N \subseteq M}{=} (A \cup N) \setminus (M \cup M') = B \setminus (M \cup M') \\ &= (A' \cup N') \setminus (M \cup M') = A' \setminus (M \cup M'). \end{aligned}$$

Zusammen erhalten wir

$$\mu(A) = \mu(A \setminus (M \cup M')) = \mu(A' \setminus (M \cup M')) = \mu(A').$$

(ii) $\hat{\mu}$ ist ein Maß mit $\hat{\mu}|\mathfrak{A} = \mu$: Da $A = A \cup \emptyset$ und $\emptyset \in \mathfrak{N}$ ist, sieht man, dass $\hat{\mu}(A) = \mu(A)$, für alle $A \in \mathfrak{A}$, ist. Damit ist insbesondere $\hat{\mu}(\emptyset) = 0$.

Seien nun $B_n \in \hat{\mathfrak{A}}$ ($n \in \mathbb{N}$) paarweise disjunkt. Es gibt dann also $A_n, M_n \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(M_n) = 0$ und $N_n \subseteq M_n$, sowie $B_n = A_n \cup N_n$. Mit (B_n) ist dann auch (A_n) paarweise disjunkt. Wir setzen

$$B := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n, \quad A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n, \quad M := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n, \quad N := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n.$$

Es ist dann $\mu(M) \le \sum_n \mu(M_n) = 0$ und $N \subseteq M$. Schließlich ist

$$B = \bigcup_n (A_n \cup N_n) = A \cup N$$

und damit

$$\hat{\mu}(B) = \mu(A) = \sum_n \mu(A_n) = \sum_n \hat{\mu}(B_n).$$

(iii) $(X, \hat{\mathfrak{A}}, \hat{\mu})$ ist vollständig: Sei dazu $B \in \mathfrak{A}$ mit $\hat{\mu}(B) = 0$ und $S \subseteq B$. Es existieren dann $A, M \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(M) = 0$ und $N \subseteq M$ mit $B = A \cup N$. Es folgt

$$S = S \cap B = S \cap (A \cup N) = (S \cap A) \cup (S \cap N).$$

Da $\mathfrak{N} \subseteq \hat{\mathfrak{A}}$ (denn $N = \emptyset \cup N$, für alle $N \in \mathfrak{N}$, und $\emptyset \in \mathfrak{A}$) sowie $\mu(A) = \hat{\mu}(B) = 0$ ist, folgt: $S \cap A \subseteq A$, also $S \cap A \in \mathfrak{N} \subseteq \hat{\mathfrak{A}}$. Außerdem ist $S \cap N \subseteq N$ also auch $S \cap N \in \mathfrak{N} \subseteq \hat{\mathfrak{A}}$, und damit auch $S \in \hat{\mathfrak{A}}$.

$(X, \hat{\mathfrak{A}}, \hat{\mu})$ ist damit vollständig (und nach Konstruktion in jeder vollständigen Erweiterung von $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ enthalten.)

Aufgabe 08. Sei X eine Menge und $\nu\colon \mathfrak{P}(X) \to [0, \infty]$ ein äußeres Maß auf X. Sei weiter $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ die σ-Algebra der ν-messbaren Mengen und $\mu := \nu|\mathfrak{A}$.

(a) Zeigen Sie, dass $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ vollständig ist.

(b) Sei $\mu^*\colon \mathfrak{P}(X) \to [0, \infty]$ das von μ induzierte äußere Maß nach Caratheodory. Zeigen Sie, dass i.A. $\mu^* = \nu$ nicht gilt. (Hinweis: Versuchen Sie es mal mit einem geschickten äußeren Maß ν auf der Menge $X = \{0, 1\}$.)

Lösungsvorschlag. (a) Sei $M \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(M) = 0$ und $N \subseteq M$. Für eine beliebige Teilmenge $S \subseteq X$ ist dann wegen $S \cap N \subseteq N \subseteq M$ zunächst

$$\nu(S \cap N) \leq \nu(M) = \mu(M) = 0.$$

Wegen $S \setminus N \subseteq S$ und der Monotonie von ν erhalten wir dann

$$\nu(S) \geq \nu(S \setminus N) = \nu(S \cap N) + \nu(S \setminus N) = \nu(S \cap N) + \nu(S \cap N^c).$$

Damit ist N also ν-messbar und damit in $\mathfrak{A}$.

(b) Wir definieren $\nu\colon \mathfrak{P}(X) \to [0, \infty]$ mit $X = \{0, 1\}$ durch

$$\nu(\emptyset) = 0, \quad \nu(\{0\}) = \nu(\{1\}) = 2, \quad \nu(X) = 3.$$

Dann sieht man recht schnell, dass ν ein äußeres Maß auf X ist. Die Teilmenge $\{0\} \in \mathfrak{P}(X)$ ist dann nicht ν-messbar, denn

$$\nu(X) = 3 \neq 2 + 2 = \nu(\{0\}) + \nu(\{1\}) = \nu(X \cap \{0\}) + \nu(X \cap \{0\}^c).$$

Deshalb ist auch $\{1\}$ nicht messbar, denn die ν-messbaren Mengen sind ja komplementstabil. Es folgt, dass $\mathfrak{A} = \{\emptyset, X\}$ ist. Ist nun $\mu^*\colon \mathfrak{P}(X) \to [0, \infty]$ das von $\mu = \nu|\mathfrak{A}$ induzierte äußere Maß (nach Caratheodory) auf X, so ist z.B.

$$\mu^*(\{0\}) = 3 \neq 2 = \nu(\{0\}),$$

also $\mu^* \neq \nu$.