Musterlösungen zur Integrations- und Maßtheorie

Aufgabe 13. (a) Sei λ das Borel-Lebesguesche Maß auf $\mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. Geben Sie eine *offene* Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}$ an mit $U \supset \mathbb{Q}$ und $\lambda(U) < \varepsilon$ und begründen Sie das. (Hint: Benutzen Sie eine Abzählung von $\mathbb{Q}$.)

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$, λ das Borel-Lebesguesche Maß auf $\mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$. Sei weiter $H \subseteq \mathbb{R}^n$ die Hyperebene $H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$. Geben Sie eine *offene* Quaderüberdeckung $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von H an mit $\sum_k \lambda(Q_k) < \varepsilon$ und begründen Sie.

Lösungsvorschlag. (a) Wir benutzen eine Abzählung der rationalen Zahlen $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und setzen:

$$U := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (q_n - 2^{-(n+2)}\varepsilon, q_n + 2^{-(n+2)}\varepsilon).$$

Da $q_n \in U$ ist, für alle $n \in \mathbb{N}$, ist $\mathbb{Q} \subseteq U$. U ist als Vereinigung von offenen Intervallen auch offen. Die beteiligten Intervalle mögen überlappen, aber in jedem Fall gilt:

$$\lambda(U) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda((q_n - 2^{-(n+2)}\varepsilon, q_n + 2^{-(n+2}\varepsilon)) = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot 2^{-(n+2)}\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\right)\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon.$$

(b) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ betrachten wir den offenen Quader

$$Q_k := (-k, k)^{n-1} \times (-\frac{1}{(2k)^{n-1}} 2^{-(k+2)}\varepsilon, \frac{1}{(2k)^{n-1}} 2^{-(k+2)}\varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^n,$$

(wobei der erste Faktor nicht da sei bei $n = 1$). Dann ist $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Überdeckung von H, denn ist $x = (x_1, \ldots, x_n) \in H$ und $r := \|x\|_1 = \max([x_1|, \ldots, |x_n|)$, so ist $x \in Q_k$ für $k = [r] + 1$. Schließlich ist

$$\lambda(Q_k) = (2k)^{n-1} \cdot (2 \cdot \frac{1}{(2k)^{n-1}} 2^{-(k+2)}\varepsilon) = 2^{-(k+1)}\varepsilon$$

und damit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(Q_k) \leq \frac{1}{2}(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}) = \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon.$$

Aufgabe 14. Wir betrachten die *Elementarmatrizen*

$$u(b) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad v(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix},$$

für jedes $b \in \mathbb{R}$, und setzen $M = \{u(b) \in \mathrm{SL}_2\mathbb{R} : b \in \mathbb{R}\} \cup \{v(b) \in \mathrm{SL}_2\mathbb{R} : b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathrm{SL}_2\mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ von M erzeugt wird. (Hint: Elementare Zeilenoperationen)

(b) Zeigen Sie, dass mit $s = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2}^{-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ und jedem $b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$u(b) = s \cdot u(b) \cdot s^{-1} \cdot u(-b).$$

(c) Zeigen Sie nun, dass $\mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ gleich seiner Kommutatoruntergruppe ist.

Lösungsvorschlag. **(a)** Sei $A \in \mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ beliebig. Wir wollen zeigen, dass es endlich viele $F_1, \ldots, F_k \in M$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ mit $A = F_1 \cdots F_k$ gibt. Beachte, dass wir die Inversen von $F \in M$ nicht berücksichtigen brauchen, weil mit $B \in M$ auch $B^{-1} \in M$ ist. Das kann man direkt ausrechnen oder aber auch daran sehen, dass die Multiplikation mit $B \in M$ von links an A *eine elementare Zeilenoperation* (im Sinne das Gaußschen Algorithmus') ist:

- Multiplikation von links mit $u(b)$: Addiere das b-Fache der 2. Zeile zur 1. Zeile hinzu und schreibe das Ergebnis in die 1. Zeile.
- Multiplikation von links mit $v(b)$: Addiere das b-Fache der 1. Zeile zur 2. Zeile hinzu und schreibe das Ergebnis in die 2. Zeile.

Man beachte, dass $u(b), v(b) \in \mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ sind, für alle $b \in \mathbb{R}$. Die anderen elementaren Zeilenoperationen, nämlich die Multiplikation einer Zeile mit einem Faktor ungleich Null und das Vertauschen von zwei Zeilen, entspricht der Multiplikation mit Elementarmatrizen, die i.a. *nicht* in $\mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ liegen (und damit aus der Gruppe $\mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ herausführen). Diese wollen wir daher nicht benutzen, um A in die Einheitsmatrix $\mathbf{1}$ zu überführen.

Es ist nun auch klar, dass

$$u(-b) = u(b)^{-1}, \quad v(-b) = v(b)^{-1},$$

für alle $b \in \mathbb{R}$, ist.

(i) Wir produzieren zunächst ein Element ungleich Null unten links. Ist schon $a_{21} \neq 0$, so machen wir nichts, d.h. wir setzen $E_1 := \mathbf{1}$. Im Falle $a_{21} = 0$ muss $a_{11} \neq 0$ sein. weil $\det A \neq 0$ ist. Wir setzen dann $E_1 := v(1)$ und (in beiden Fällen) $B := E_1 A$, was für b_{21} bedeutet:

$$b_{21} = a_{11} + a_{21} = a_{11} \neq 0.$$

(ii) Nun produzieren wir eine 1 oben links. Wir setzen dazu $E_2 := u((1 - b_{11})/b_{21})$ und $C := E_2 B$. Das produziert für c_{11}:

$$c_{11} = b_{11} + \frac{1}{b_{21}}(b_{11} - 1) \cdot b_{21} = 1,$$

wie gewünscht.

(iii) Damit können wir nun in der bekannten Weise unten links eine Null produzieren (und oben links die Eins beibehalten). Wir setzen $E_3 := v(-c_{21})$ und $D := E_3C$. Dann folgt tatsächlich: $d_{21} = c_{21} + (-c_{21}) \cdot 1 = 0$ und $d_{11} = 1$. Wir sind nun also bei

$$D = \begin{pmatrix} 1 & d_{12} \\ 0 & d_{22} \end{pmatrix}.$$

Da wir die ganze Zeit in $\mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ operieren, ist $\det D = 1$, woraus $d_{22} = 1$ folgt.

(iv) Im letzten Schritt produzieren wir in der üblichen Weise eine Null oben rechts (und lassen den Rest unverändert). Setze $E_4 := u(-d_{12})$ und $E := E_4D$. Dann ist tatsächlich $e_{12} = d_{12} + (-d_{12}) \cdot 1 = 0$ und die anderen Einträge von D ändern sich nicht, es ist also $E = \mathbf{1}$.

Insgesamt ist also $E_4E_3E_2E_1 \cdot A = \mathbf{1}$ und daraus

$$A = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}E_4^{-1} \in \langle M \rangle,$$

da, wie oben gesehen, auch $F_1 := E_1^{-1}, \ldots, F_4 := E_4^{-1} \in M$ liegen.

(b) Ausmultiplizieren liefert tatsächlich für alle $b \in \mathbb{R}$:

$$u(b) = s \cdot u(b) \cdot s^{-1} \cdot u(-b).$$

Da nach Teil (a) $u(-b) = u(b)^{-1}$ ist, sieht man hier schon, dass $u(b)$ ein *Kommutator* ist, nämlich $u(b) = [s, u(b)]$. Transponiert man obige Gleichung und benutzt $v(b) = u(b)^T$, so sieht man, dass

$$v(b) = u(b)^T = u(-b)^T(s^{-1})^Tu(b)^Ts^T = v(-b)s^{-1}v(b)s,$$

also auch (für alle $b \in \mathbb{R}$) ein Kommutator ist.

(c) Kommutatoren in einer Gruppe G sind Elemente der Bauart

$$[a, b] := aba^{-1}b^{-1},$$

für $a, b \in G$. In abelschen Gruppen ist nur das neutrale Element 1 ein Kommutator. Das Inverse eines Kommutators $[a, b]$ ist wieder ein Kommutator, nämlich $[b, a]$, wie man durch Multiplikation von links und rechts an $[a, b]$ sofort sieht,

$$[b, a] \cdot [a, b] = [a, b] \cdot [b, a] = 1.$$

Die von den Kommutatoren erzeugte Untergruppe $K \subseteq G$ enthält daher gerade alle endlichen Produkte von Kommutatoren, also Elemente $g \in G$ der Form

$$g = [a_1, b_1] \cdots [a_k, b_k],$$

mit $k \in \mathbb{N}_0$, $a_1, b_1, \ldots, a_k, b_k \in G$. *Diese Kommutatoruntergruppe* $K \subseteq G$, manchmal auch mit $K =: [G, G]$ bezeichnet, misst in gewisser Weise, wie „nicht-abelsch“ die Gruppe G ist. Aufgabe (c) behauptet in dieser Schreibweise:

$$[\mathrm{SL}_2\mathbb{R}, \mathrm{SL}_2\mathbb{R}] = \mathrm{SL}_2\mathbb{R}.$$

Na ja: Aber das folgt aus den Teilen (a) und (b). Denn ist $A \in \mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ beliebig, so gibt es, wie gesehen, $F_1, \dots, F_4 \in M$ mit

$$A = F_1 \cdots F_4.$$

Aber jedes der $F_i \in M$ $(i = 1, \dots, 4)$ ist nach Teil (b) ein Kommutator. Also ist $A \in K = [\mathrm{SL}_2\mathbb{R}, \mathrm{SL}_2\mathbb{R}]$.

[Anmerkung: Ähnlich sieht man auch für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $\mathrm{SL}_n\mathbb{R} = [\mathrm{SL}_n\mathbb{R}, \mathrm{SL}_n\mathbb{R}]$ ist.]

Aufgabe 15. Sei $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ die Lebesgue-Algebra auf $\mathbb{R}^n$ und $\lambda\colon \mathfrak{L} \to [0, \infty]$ das Lebesguesche Maß auf ihr (vgl. Aufgabe 10).

(a) Zeigen Sie die Transformationsformel für Isomorphismen $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ auch für alle $A \in \mathfrak{L}$: $TA \in \mathfrak{L}$ und $\lambda(TA) = |\det T|\lambda(A)$.

(b) Zeigen Sie nun, dass die Transformationsformel für alle $A \in \mathfrak{L}$ sogar für alle linearen Abbildungen $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gilt (wobei „$0 \cdot \infty := 0$“ gesetzt wird).

Lösungsvorschlag. (a) Sei also $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Isomorphismus und $A \in \mathfrak{L}$. Dann gibt es Teilmengen $B, M \in \mathfrak{B}$ mit $\lambda(M) = 0$ und $N \subseteq M$, so dass $A = B \cup N$ ist, denn $\mathfrak{L}$ ist die Vervollständigung der Borel-Algebra $\mathfrak{B}$ (siehe Aufgabe 10). Dann ist $TA = TB \cup TN$. Nun ist $TB \in \mathfrak{B}$ (da T^{-1} stetig, damit Borel-messbar und $TB = (T^{-1})^{-1}(B)$ ist). Ebenso ist $TM \in \mathfrak{B}$ und $TN \subseteq TM$. Nach der Transformationsformel für $\mathfrak{B}$ ist außerdem $\lambda(TM) = |\det T|\cdot\lambda(M) = 0$. Daran sieht man, dass auch $TA \in \mathfrak{L}$ ist. Schließlich ist nach Definition des vervollständigten Maßes sowie der Transformationsformel für $\mathfrak{B}$:

$$\lambda(TA) = \lambda(TB) = |\det T| \cdot \lambda(B) = |\det T| \cdot \lambda(A).$$

(b) Nach Aufgabe 13 gilt für die Koordinatenhyperebene $H \subseteq \mathbb{R}^n$, dass $H \in \mathfrak{B}$ und $\lambda(H) = 0$ ist. Das gilt dann auch für jede andere Hyperebene $V \subseteq \mathbb{R}^n$, d.h.: $\dim V = n - 1$. Ist nämlich $(v_1, \dots, v_{n-1})$ eine Basis von V, so kann man diese zu einer Basis $(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$ von $\mathbb{R}^n$ ergänzen. Ist $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dann der Isomorphismus, der die kanonische Basis $(e_1, \dots, e_n)$ nach $(v_1 \dots, v_n)$ abbildet, so ist $TH = V$. Die Transformationsfomel liefert dann

$$\lambda(V) = \lambda(TH) = |\det T| \cdot \lambda(H) = 0.$$

Ist nun $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine beliebige lineare Abbildung, so können wir $\mathrm{rg}(T) < n$ annehmen, denn für Isomorphismen haben wir die Transformationsformel schon bewiesen. Dann gibt es also eine Hyperebene $V \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $T\mathbb{R}^n \subseteq V$. Ist nun $A \in \mathfrak{L}$ beliebig, so ist $TA \subseteq V$ und da $\lambda(V) = 0$ ist, folgt $TA \in \mathfrak{L}$. Wegen $TA = \emptyset \cup TA$ ist schließlich nach Definition des vervollständigten Maßes

$$\lambda(TA) = \lambda(\emptyset) = 0 = 0 \cdot \lambda(A) = |\det T| \cdot \lambda(A),$$

denn wegen $\mathrm{rg}(T) < n$ ist $\det T = 0$.

Aufgabe 16. Seien $\mathrm{SL}_n\mathbb{R} \subseteq \mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ die *spezielle lineare Gruppe* und $\mathrm{SO}_n\mathbb{R} \subseteq \mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ die *spezielle orthogonale Gruppe*.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{SL}_n\mathbb{R}$ und $\mathrm{SO}_n\mathbb{R}$ Untergruppen von $\mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ sind.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{SO}_2\mathbb{R}$ genau aus den *Drehmatrizen*

$$u(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

mit $\theta \in [0, 2\pi]$ besteht. (Hint: In den Spalten einer speziellen orthogonalen Matrix steht eine positiv orientierte Orthonormalbasis.)

(c) Sei $S \in \mathrm{SO}_3\mathbb{R} \setminus \{\mathbf{1}\}$. Zeigen Sie, dass es einen 1-dimensionalen Unterraum $L \subseteq \mathbb{R}^3$ gibt mit $Sx = x$, für alle $x \in L$ (eine so genannte *Fixgerade*), und dass S das senkrechte Komplement $E = L^\perp$ von L in sich abbildet und dort eine Drehung um einen Winkel $\theta \in (0, 2\pi)$ (bzgl. einer gewählten Orientierung von E) ist. (Hint: Zeigen Sie, dass $\lambda = 1$ ein Eigenwert von S ist.)

Lösungsvorschlag. (a) Ist G eine Gruppe, so ist eine nicht-leere Teilmenge $H \subseteq G$ eine Untergruppe von G, wenn mit $g, h \in G$ auch $gh \in G$ ist, und wenn mit $g \in G$ auch $g^{-1} \in G$ ist.

(i) Bei $G = \mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ und $H = \mathrm{SL}_n\mathbb{R}$ haben wir das in Aufgabe 14 schon ausgiebig benutzt. Nach dem Determinanten-Multiplikationssatz gilt nämlich für $S, T \in \mathrm{SL}_n\mathbb{R}$, dass

$$\det(S \cdot T) = \det(S) \cdot \det(T) = 1 \cdot 1 = 1$$

ist. Ebenso gilt für $U \in \mathrm{SL}_n\mathbb{R}$, dass auch

$$\det(U^{-1}) = (\det(U))^{-1} = 1^{-1} = 1$$

ist und damit auch $ST \in \mathrm{SL}_n\mathbb{R}$ sowie $U^{-1} \in \mathrm{SL}_n\mathbb{R}$. Da auch $\mathbf{1} \in \mathrm{SL}_n\mathbb{R}$ (und damit $\mathrm{SL}_n\mathbb{R} \neq \emptyset$) ist, ist also $\mathrm{SL}_n\mathbb{R}$ eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n\mathbb{R}$.

(ii) Die orthogonalen Matrizen $\mathrm{O}_n\mathbb{R} \subseteq \mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ sind durch die Bedingung

$$A^T \cdot A = \mathbf{1}$$

definiert. Das bedeutet, dass in ihren Spalten (und auch ihren Zeilen) eine Orthonormalbasis (ON-Basis) des $\mathbb{R}^n$ (bzgl. seines kanonischen Skalarproduktes) steht. Sind nun $A, B \in \mathrm{O}_n\mathbb{R}$, so ist

$$(AB)^T \cdot (AB) = (B^T A^T) \cdot (AB) = B^T \cdot \mathbf{1} \cdot B = \mathbf{1},$$

also auch $AB \in \mathrm{O}_n\mathbb{R}$. Ist $C \in \mathrm{O}_n\mathbb{R}$, so ist nach Multiplikation mit C^{-1} an $C^T C = \mathbf{1}$ von rechts: $C^T = C^{-1}$. Deshalb ist auch

$$(C^{-1})^T \cdot (C^{-1}) = (C^T)^T \cdot C^{-1} = C \cdot C^{-1} = \mathbf{1},$$

und damit auch $C^{-1} \in \mathrm{O}_n\mathbb{R}$. Da auch $\mathbf{1} \in \mathrm{O}_n\mathbb{R}$ ist, ist also $\mathrm{O}_n\mathbb{R}$ eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n\mathbb{R}$.

Der Durchschnitt $H_1 \cap H_2$ zweier Untergruppen $H_1, H_2 \subseteq G$ einer Gruppe G ist wieder eine Untergruppe, wie man unmittelbar sieht. Es folgt, dass auch $\mathrm{SO}_n\mathbb{R} = \mathrm{O}_n\mathbb{R} \cap \mathrm{SL}_n\mathbb{R}$ eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ ist.

(b) Ist

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2\mathbb{R},$$

so ist also mit $u_1 := \binom{u_{11}}{u_{21}}$ und $u_2 = \binom{u_{12}}{u_{22}}$ das Paar (u_1, u_2) eine ON-Basis von $\mathbb{R}^2$. Insbesondere ist damit

$$u_1 \in \mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ \|x\| = 1\}.$$

Es gibt daher ein $\theta \in [0, 2\pi)$, so dass

$$u_{11} = \cos\theta, \quad u_{21} = \sin\theta$$

ist. (θ ist der positiv orientierte Winkel zwischen den Strahlen $\mathbb{R}_{\geq 0}e_1$ und $\mathbb{R}_{\geq 0}u_1$.) Nun hat auch u_2 Länge 1 und er steht senkrecht auf u_1. Daher gibt es für u_2 nur zwei Möglichkeiten:

$$u_2 = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad u_2 = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Im ersten Fall ist (u_1, u_2) *positiv orientiert*, wie man sagt, d.h.

$$\det(U) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = +1.$$

Es ist dann also $U = u(\theta)$. Im zweiten Fall ist $U = v(\theta)$, wenn wir

$$v(\theta) := \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

setzen. Diese ist *negativ orientiert*, d.h.

$$\det v(\theta) = -\cos^2\theta - \sin^2\theta = -1.$$

Die Matrizen in $\mathrm{SO}_2\mathbb{R}$ sind also gerade die Drehmatrizen $u(\theta)$, für $\theta \in [0, 2\pi)$, und da $u(\theta+2\pi) = u(\theta)$ ist, für alle $\theta \in \mathbb{R}$, können wir auch $\theta \in \mathbb{R}$ zu nehmen.

[Anmerkung 1: $u(\theta)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dreht dann tatsächlich um den Winkel θ in positive Richtung, denn nach den Additionstheoremen für cos und sin gilt für $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ in Polardarstellung:

$$x = r \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

(mit $r > 0$ und $\varphi \in \mathbb{R}$). Es ist dann

$$\begin{aligned} u(\theta) \cdot x &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot r \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \\ &= r \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos(\varphi+\theta) \\ \sin(\varphi+\theta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Norm $r = \|x\|$ wird also beibehalten und der Winkel $\varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ geht in $\varphi + \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ über.]

[Anmerkung 2: $\mathrm{GL}_2\mathbb{R} \subseteq \mathrm{Mat}_2\mathbb{R} = \mathbb{R}^4$ ist eine offene (und dichte) Teilmenge in $\mathbb{R}^4$. Ihr Komplement wird durch die Gleichung $\det(S) = s_{11}s_{22} - s_{12}s_{21} = 0$ beschrieben, dem Nullstellengebilde eines Polynoms vom Grad 2 (ein gewisser Doppelkegel in $\mathbb{R}^4$). Innerhalb dieser 4-dimensionalen offenen Menge liegt die $\mathrm{SO}_2\mathbb{R} \subseteq \mathrm{GL}_2\mathbb{R}$ also als *eine* 1*-dimensionale Kreislinie* durch $\mathbf{1} \in \mathrm{GL}_2\mathbb{R}$.]

(c) Bevor wir uns mit den Elementen in $\mathrm{SO}_3\mathbb{R} \subseteq \mathrm{GL}_3\mathbb{R}$ beschäftigen (also einer gewissen Teilmenge in dem offenen und dichten $\mathrm{GL}_3\mathbb{R} \subseteq \mathrm{Mat}_3\mathbb{R} = \mathbb{R}^9$), untersuchen wir noch die Matrizen $S \in \mathrm{SO}_2\mathbb{R}$ mit $\det S = -1$. (Vorsicht: Diese bilden keine Untergruppe, da beipsielsweise $\mathbf{1}$ nicht enthalten ist.) Setzt man z.B.

$$S_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

das ist dann die Spiegelung an der x_1-Achse, so sieht man wegen des Determinantensatzes, dass

$$M = \{S \in \mathrm{O}_2\mathbb{R} : \ \det S = -1\}$$

nur *eine Verschiebung* von $\mathrm{SO}_2\mathbb{R}$ um S_0 im Sinne von

$$M = \mathrm{SO}_2\mathbb{R} \cdot S_0$$

ist, also wieder eine Kreislinie in $\mathrm{GL}_2\mathbb{R}$ (dieses Mal durch S_0). (Die $\mathrm{O}_2\mathbb{R}$ besteht daher aus zwei (disjunkten) Kreislinien in diesem 4-dimensionalen Raum.) Jedes $T \in M$ ist nämlich von der Form $T = S \cdot S_0$ mit einem eindeutig bestimmten $S \in \mathrm{SO}_2\mathbb{R}$ und umgekehrt ist für jedes $S \in \mathrm{SO}_2\mathbb{R}$ die Matrix $T = S \cdot S_0$ in M. (Multiplikation mit S_0 überführt gerade $u(\theta) \in \mathrm{SO}_2\mathbb{R}$ in $v(\theta) \in M$.)

Während man die Drehmatrizen $u(\theta) \in \mathrm{SO}_2\mathbb{R}$ nicht diagonalisieren kann (für $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$), da $u(\theta)$ Vektoren dreht und damit keine Vektoren streckt bzw. staucht und deshalb keinen Eigenwert haben kann, ist das bei den Matrizen $v(\theta) \in M$ anders. Das charakteristische Polynom $\chi_{v(\theta)}$ von $v(\theta)$ zerfällt nämlich hier:

$$\begin{aligned} \chi_{v(\theta)}(t) &= \det \begin{pmatrix} \cos\theta - t & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta - t \end{pmatrix} \\ &= (\cos\theta - t)(-1)(\cos\theta + t) - \sin^2\theta \\ &= -(\cos^2\theta - t^2) - \sin^2\theta = t^2 - 1 = (t-1)(t+1). \end{aligned}$$

Eigenvektoren v_1 bzw. v_2 in $\mathbb{R}^2$ bzgl. der Eigenwerte $+1$ und -1 berechnet man schnell mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ 1 - \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v(\theta) \cdot v_1 = v_1$$

und

$$v_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta - 1 \\ \sin\theta \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v(\theta) \cdot v_2 = -v_2.$$

Außerdem stehen (u, v) senkrecht aufeinander (was bei Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten von orthogonalen Matrizen immer so ist). Es ist also $v(\theta)$ die Spiegelung an der Geraden $L = \mathbb{R}v_1$ und $v(\theta)$ ein Konjugertes von S_0,

$$v(\theta) = T \cdot S_0 \cdot T^{-1},$$

mit einem $T \in \mathrm{SO}_2\mathbb{R}$ (wenn man die Eigenvektoren v_1, v_2 noch auf 1 ablängt und evtl. bei einem noch zum Negativen übergeht, so dass daraus eine positiv orientierte ON-Basis wird, die man spaltenweise in T hineinschreibt). In $\mathrm{SO}_2\mathbb{R}$ liegen also die Drehungen (um den Nullpunkt) und in M die Spiegelungen (an die Geraden durch den Nullpunkt).

Nun endlich zu Teil (c): Ist $S \in \mathrm{O}_3\mathbb{R}$, so sind die einzigen möglichen Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{R}$ von S die Zahlen $\lambda = \pm 1$. Denn weil S das kanonische Skalarprodukt erhält, erhält es auch die Längen von Vektoren. Ist dann $Sx = \lambda x$, für ein $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, ist

$$\lambda^2 \cdot \|x\|^2 = \|\lambda x\|^2 = \|Sx\|^2 = \|x\|^2,$$

also $\lambda^2 = 1$. Wir arbeiten beide Fälle ab.

(i) Ist $\lambda = 1$ ein Eigenwert und $x_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor dazu, so ist damit $L := \mathbb{R}x_0$ *eine Fixgerade* für S, d.h.: $Sx = x$, für alle $x \in L$. Sei $E = L^\perp$ das senkrechte Komplement zu L. Dann ist $S(E) \subseteq E$, weil aus $\langle y, x_0 \rangle = 0$ auch

$$\langle Sy, x_0 \rangle = \langle Sy, Sx_0 \rangle = \langle y, x_0 \rangle = 0$$

folgt. Nehmen wir nun an, dass $S \in \mathrm{SO}_3\mathbb{R} \setminus \{\mathbf{1}\}$ ist. Da $\dim E = 2$ und $S|E \colon E \to E$ speziell orthogonal ist, folgt mit Teil (b), dass $S|E \colon E \to E$ eine Drehung um den Nullpunkt und damit $S \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine Drehung um die Achse L ist. (Zerlege jeden Vektor eindeutig in eine Summe von Vektoren in L und E, $\mathbb{R}^3 = L \oplus E$.)

(ii) Im Falle $\lambda = -1$ und einem Eigenvektor $x_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ gilt für das senkrechte Komplement E von $L = \mathbb{R}x_0$ auch, dass S die Ebene E in sich überführt. Aber dieses Mal muss $S|E \colon E \to E$ eine Spiegelung sein, wenn $S \in \mathrm{SO}_3\mathbb{R}$ ist, denn

$$1 = \det S = (-1) \cdot \det(S|E), \text{ also } \det(S|E) = -1.$$

Aber dann hat $S|E$ auch eine Fixgerade L', nämlich die Spiegelungsachse in E. Wie oben sieht man dann, das S eine Drehung um L' sei muss.

Und jetzt fehlt uns noch ein Grund, warum S überhaupt einen Eigenwert haben muss (der dann, wie gesehen, $+1$ oder -1 sein muss). Na ja: Das charakteristische Polynom $\chi_S \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von S ist ein Polynom jetzt vom Grad 3 mit führendeM Koeffizienten $(-1)^3 = -1$, und erfüllt damit

$$\lim_{t \to -\infty} \chi_S(t) = +\infty, \quad \lim_{t \to \infty} \chi_S(t) = -\infty.$$

Nach dem Zwischenwertsatz hat χ_S deshalb eine Nullstelle, also S einen Eigenwert. Damit ist klar, dass S tatsächlich eine Drehung um eine Achse sein muss. Nach Konjugation mit einem geeigneten Element $T \in \mathrm{SO}_3\mathbb{R}$ sieht also S so aus:

$$TST^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[Anmerkung: Wir werden später in der Vorlesung sehen, dass $\mathrm{SO}_3\mathbb{R}$ eine kompakte 3-*dimensionale Untermannigfaltigkeit* von $\mathrm{Mat}_3\mathbb{R} = \mathbb{R}^9$ ist.]

[Wie die Elemente $S \in \mathrm{O}_3\mathbb{R}$ mit $\det S = -1$ aussehen, erspare ich Ihnen jetzt.]