Musterlösungen zur Integrations- und Maßtheorie

Aufgabe 17. Sei $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $Y \in \mathfrak{A}$.

(a) Wir definieren *die Spuralgebra von* $\mathfrak{A}$ *auf* Y durch

$$\mathfrak{B} := \{A \cap Y \in \mathfrak{P}(Y) : \; A \in \mathfrak{A}\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathfrak{B}$ eine σ-Algebra auf Y ist und $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$.

(b) Nun defnieren wir $\nu: \mathfrak{B} \to [0, \infty]$ durch $\nu := \mu|\mathfrak{B}$. Zeigen Sie, dass ν ein Maß auf $(Y, \mathfrak{B})$ ist.

(c) Sei $f: X \to \bar{\mathbb{R}}$ $\mathfrak{A}$-messbar. Zeigen Sie, dass dann auch $f|Y: Y \to \bar{\mathbb{R}}$ $\mathfrak{B}$-messbar ist. Sei nun zusätzlich $f \geq 0$ und $\chi_Y: X \to \mathbb{R}$ die charakteristische Funktion von Y. Zeigen Sie dann:

$$\int f|Y \, d\nu = \int f \cdot \chi_Y \, d\mu.$$

(Diese Zahl in $[0, \infty]$ wird mit $\int_Y f \, d\mu$ bezeichnet.)

Lösungsvorschlag. (a) Mit $A := X$ folgt $A \cap Y = Y$ also ist $Y \in \mathfrak{B}$. Sei $B \in \mathfrak{B}$. Dann ist also $B = A \cap Y$ mit $A \in \mathfrak{A}$. Es folgt

$$Y \setminus B = Y \setminus (A \cap Y) = Y \setminus A = A^c \cap Y \in \mathfrak{B},$$

da $A^c \in \mathfrak{A}$ ist. Seien $B_n \in \mathfrak{B}$ $(n \in \mathbb{N})$, also $B_n = A_n \cap Y$ mit $A_n \in \mathfrak{A}$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann ist auch $\bigcup_n B_n = (\bigcup_n A_n) \cap Y \in \mathfrak{B}$, da $\bigcup_n A_n \in \mathfrak{A}$ ist. Damit ist $\mathfrak{B}$ also eine σ-Algebra auf Y (und dies ist auch für ein beliebiges $Y \subseteq X$, welches nicht notwendig messbar ist, richtig.) Schließlich ist für jedes $B \in \mathfrak{B}$,weil $B = A \cap Y$ für ein $A \in \mathfrak{A}$ ist (und $Y \in \mathfrak{A}$), auch $B \in \mathfrak{A}$. Es ist also $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$.

(b) Es ist $\nu(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$ und

$$\nu(\dot{\bigcup}_n B_n) = \mu(\dot{\bigcup}_n B_n) = \sum_n \mu(B_n) = \sum_n \nu(B_n),$$

falls $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Teilmengen in $\mathfrak{B}$ ist.

(c) Ist $f: X \to [0, \infty] \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathfrak{A}$-messbar und $C \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ (Borel-) messbar, so ist $(f|Y)^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cap Y \in \mathfrak{B}$, da $f^{-1}(C) \in \mathfrak{A}$ ist. Es ist also $f|Y: Y \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathfrak{B}$-messbar.

Sei nun zunächst $s: X \to [0, \infty)$ eine ($\mathfrak{A}$-) messbare Treppenfunktion. Es gibt dann ein $r \in \mathbb{N}_0$ sowie $\alpha_j \geq 0$ und $A_j \in \mathfrak{A}$ $(j = 1, \ldots r)$ mit $s = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \chi_{A_j}$. Wir nehmen s in ihrer *reduzierten*

Form an, d.h.: $\alpha_j > 0$, für alle $j = 1, \ldots, r$, und $A_i \cap A_j = \emptyset$, für $1 \leq i \neq j \leq r$. Nehmen wir nun weiter an, das $s(x) = 0$ ist, für alle $x \in X \setminus Y$. Dann ist $A_j \subseteq Y$ und daher auch

$$s|Y = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \chi_{A_j}.$$

Es folgt:

$$\int s|Y \, d\nu = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \nu(A_j) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \mu(A_j) = \int s \, d\mu.$$

Sei jetzt $f \geq 0$. Dann ist auch das Produkt $f\chi_Y \geq 0$ (und $\mathfrak{A}$-messbar). Es gibt deshalb eine Folge (s_n) von $\mathfrak{A}$-messbaren Treppenfunktionen mit $(s_n) \nearrow f\chi_Y$. Da $0 \leq s_n(x) \leq f(x)\chi_Y(x) = 0$ für $x \in X \setminus Y$ ist, ist jedes s_n von der obigen Form. Weil nun schließlich auch $(s_n|Y)$ eine Folge von ($\mathfrak{B}$-messbaren) Treppenfunktionen mit $(s_n|Y) \nearrow f|Y$ ist, folgt mit Levis Satz

$$\int f|Y \, d\nu = \lim_{n\to\infty} \int s_n|Y \, d\nu = \lim_{n\to\infty} \int s_n \, d\mu = \int f\chi_Y \, d\mu.$$

Aufgabe 18. Sei $(X, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$ ein Maßraum, $\mathfrak{A}_2 \subseteq \mathfrak{A}_1$ eine σ-Unteralgebra und es sei $\mu_2 := \mu_1|\mathfrak{A}_2$.

(a) Zeigen Sie, dass auch $(X, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$ ein Maßraum ist.

(b) Sei $f\colon X \to [0, \infty]$ $\mathfrak{A}_2$-messbar. Zeigen Sie, dass f dann auch $\mathfrak{A}_1$-messbar ist und es gilt:

$$\int f \, d\mu_1 = \int f \, d\mu_2.$$

Lösungsvorschlag. **(a)** Das ist sehr ähnlich zu Aufgabe 17.b.

(b) Ist $f\colon X \to [0, \infty]$ $\mathfrak{A}_2$-messbar, so gilt für jedes messbare $C \subseteq [0, \infty]$, dass $f^{-1}(C) \in \mathfrak{A}_2 \subseteq \mathfrak{A}_1$ ist, also ist f auch $\mathfrak{A}_1$-messbar.

Sei nun zunächst $s\colon X \to [0, \infty)$ eine $\mathfrak{A}_2$-messbare Treppenfunktion. Dann gibt es $r \in \mathbb{N}_0$, $\alpha_j \geq 0$ und $A_j \in \mathfrak{A}_2$ $(j = 1, \ldots, r)$ mit $s = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \chi_{A_j}$. Es ist dann s auch $\mathfrak{A}_1$-messbar und nach Definition ist

$$\int s \, d\mu_1 = \sum_{k=1}^{r} \alpha_j \mu_1(A_j) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \mu_2(A_j) = \int s \, d\mu_2.$$

Jetzt sei $f\colon X \to [0, \infty]$ $\mathfrak{A}_2$-messbar, aber ansonsten beliebig. Wir können dann eine monotone Folge $\mathfrak{A}_2$-messbarer Treppenfunktionen (s_n) finden mit $(s_n) \nearrow f$. Nach Levis Satz, zweimal angewendet, ist dann

$$\int f \, d\mu_1 = \lim_{n\to\infty} \int s_n \, d\mu_1 = \lim_{n\to\infty} \int s_n \, d\mu_2 = \int f \, d\mu_2.$$

Aufgabe 19. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend. Zeigen Sie, dass f (Borel-) messbar ist.

Lösungsvorschlag. Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig. Für die Messbarkeit von $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ reicht es zu zeigen, dass $B := f^{-1}((-\infty, a])$ messbar ist. Dazu betrachten wir $\sup B \in [-\infty, \infty]$ und unterscheiden die beiden folgenden Fälle:

(i) $\sup B \in B$: Dann ist zunächst sicher $B \subseteq (-\infty, \sup B]$. Andererseits ist auch $(-\infty, \sup B] \subseteq B$, denn ist $x \leq \sup B$, so ist auch $f(x) \leq f(\sup B) \leq a$, also $x \in B$. Es ist also $B = (-\infty, \sup B]$ und damit messbar.

(ii) $\sup B \notin B$: Der Fall $\sup B = -\infty$ ist zunächst mal trivial, weil dann $B = \emptyset$ und damit messbar ist. In jedem Fall ist hier nun $B \subseteq (-\infty, \sup B)$. Aber andererseits ist auch $(-\infty, \sup B) \subseteq B$, denn ist $x < \sup B$, so gibt es ein $y \in B$ mit $x < y$. Aber dann ist $f(x) \leq f(y) \leq a$, also auch $x \in B$. Es folgt $B = (-\infty, \sup B)$ und damit ist auch hier B messbar.

Aufgabe 20. Sei $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $g\colon X \to [0, \infty]$ messbar.

(a) Zeigen Sie, dass durch $\nu\colon \mathfrak{A} \to [0, \infty]$,

$$\nu(A) = \int_A g \, d\mu$$

(vgl. Aufgabe 17) ein Maß auf $(X, \mathfrak{A})$ gegeben wird. (Dieses wird *das mit g gewichtete Maß μ* genannt und manchmal (wegen Teil (b)) auch mit $d\nu = g \cdot d\mu$ bezeichnet.)

(b) Sei $f\colon X \to [0, \infty]$ messbar. Zeigen Sie:

$$\int f \, d\nu = \int f \cdot g \, d\mu.$$

Lösungsvorschlag. (a) Es ist $\chi_\emptyset = 0$ und daher

$$\nu(\emptyset) = \int_\emptyset g \, d\mu = \int g \chi_\emptyset \, d\mu = \int 0 \, d\mu = 0.$$

Sei nun $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von paarweise disjunkten Teilmengen $A_n \in \mathfrak{A}$ $(n \in \mathbb{N})$, $A_m \cap A_n = \emptyset$ für $m \neq n$. Es ist dann für $A := \dot{\bigcup}_n A_n$:

$$\chi_A = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n},$$

wobei für jedes $x \in A$ auf der rechten Seite eigentlich nur ein Summand von Null verschieden ist. Aber trotzdem ist χ_A i.a. keine Treppenfunktion. Allerdings sind die Partialsummen

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} \chi_{A_k}$$

Treppenfunktionen und es gilt $(s_n) \nearrow \chi_A$. Da $g \geq 0$ ist, gilt damit auch $(s_n g) \nearrow \chi_A g$. Wegen der Additivität des Integrals und Levis Satz ist deshalb

$$\begin{aligned}
\nu(A) &= \int_A g \, d\mu = \int g \chi_A \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int s_n g \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int \sum_{k=1}^{n} \chi_{A_k} g \, d\mu \\
&= \lim_{n \to \infty} (\sum_{k=1}^{n} \int g \chi_{A_k} \, d\mu) = \lim_{n \to \infty} (\sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} g \, d\mu) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \nu(A_k) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n).
\end{aligned}$$

Also ist ν ein Maß.

(b) Ist nun $f\colon X \to [0,\infty]$ messbar, so auch $f \cdot g\colon X \to [0,\infty]$. Sei nun (wie üblich) $f = s$ zunächst eine Treppenfunktion, also $s = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \chi_{A_j}$ (mit $r \in \mathbb{N}_0$, $\alpha_j \geq 0$ und $A_j \subseteq X$ wie üblich). Dann ist

$$\int s\, d\nu = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \nu(A_j) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \int g\chi_{A_j}\, d\mu = \int (\sum_{j=1}^{r} \alpha_j \chi_{A_j}) g\, d\mu = \int sg\, d\mu.$$

Ist schließlich nun $f \geq 0$ beliebig (aber messbar), so wählen wir wieder eine Folge von Treppenfunktionen (s_n), die monoton wachsend gegen f konvergiert, $(s_n) \nearrow f$. Wegen $g \geq 0$ gilt dann auch $(s_n g) \nearrow fg$. Mit der zweifachen Anwendung von Beppo Levis Satz erhalten wir dann auch

$$\int f\, d\nu = \lim_{n\to\infty} \int s_n\, d\nu = \lim_{n\to\infty} \int s_n g\, d\mu = \int fg\, d\mu.$$