Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose

WiSe 2020/21
24.11.2020
Blatt 03

Musterlösungen zur Integrations- und Maßtheorie

Aufgabe 09. Sei λ^* das äußere Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$ und $M \subseteq \mathbb{R}$ eine λ^*-messbare Teilmenge (d.i.: *eine Lebesgue-Menge*). Sei weiter $\varepsilon > 0$ beliebig.

(a) Zeigen Sie, dass es eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}$ gibt mit $U \supseteq M$ und $\lambda^*(U \setminus M) < \varepsilon$. (Hinweis: Betrachte zunächst den Fall $\lambda^*(M) < \infty$ und im Fall $\lambda^*(M) = \infty$ dann die Durchschnitte $M_n = M \cap [-n, n]$ ($n \in \mathbb{N}$). Denken Sie auch immer an den „$2^{-n}\varepsilon$-Trick".)

(b) Zeigen Sie, dass es eine abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ mit $A \subseteq M$ und $\lambda^*(M \setminus A) < \varepsilon$ gibt. (Hinweis: Betrachte M^c und Teil (a).)

Lösungsvorschlag. (a) (i) Sei zunächst $\lambda^*(M) < \infty$. Nach Defnition des äußeren Lebesgue-Maßes auf $\mathbb{R}$ gibt es eine Intervallüberdeckung $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von M mit

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(I_n) < \lambda^*(M) + \frac{\varepsilon}{2},$$

wobei alle Intervalle beschränkt sind (1-dimensionale Quader). Durch eventuelle Hinzunahme der Randpunkte von I_n, die das Maß von I_n nicht verändern, können wir annehmen, dass I_n auch abgeschlossen und damit von der Form $I_n = [a_n, b_n]$ mit $a_n \leq b_n$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir vergrößern nun jedes dieser Intervalle kontrolliert, um es offen zu bekommen und setzen

$$J_n := (a_n - \varepsilon \cdot 2^{-(n+2)}, b_n + \varepsilon \cdot 2^{-(n+2)}).$$

Dann ist $U := \bigcup_n J_n \subseteq \mathbb{R}$ offen, und da $J_n \supseteq I_n$ und $\bigcup_n I_n \supseteq M$ ist, ist auch $U \supseteq M$. Damit ist U Borelsch, also insbesondere λ^*-messbar, und deshalb ist λ^* additiv auf $(U \setminus M) \mathbin{\dot\cup} M = U$:

$$\lambda^*(U) = \lambda^*(U \setminus M) + \lambda^*(M).$$

Da $\lambda^*(M) < \infty$ ist, folgt:

$$\begin{aligned}
\lambda^*(U \setminus M) &= \lambda^*(U) - \lambda^*(M) \leq \lambda^*(\bigcup_n J_n) - \left(\sum_n \lambda(I_n) - \frac{\varepsilon}{2}\right) \\
&\leq \sum_n \lambda(J_n) - \left(\sum_n (b_n - a_n) - \frac{\varepsilon}{2}\right) \\
&= \sum_n \big((b_n + \varepsilon \cdot 2^{-(n+2)}) - (a_n - \varepsilon \cdot 2^{-(n+2)}\big) - \sum_n (b_n - a_n) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \sum_n (b_n - a_n) + 2\varepsilon \sum_n 2^{-(n+2)} - \sum_n (b_n - a_n) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} \sum_n (\frac{1}{2})^n + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

weil mit der geometrischen Reihe $\sum_n (\frac{1}{2})^n = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$ ist.

(ii) Im Fall $\lambda^*(M) = \infty$ setzen wir $M_n := M \cap [-n, n]$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann ist auch M_n λ^*-messbar und

$$\lambda^*(M_n) \leq \lambda([-n, n]) = 2n < \infty.$$

Nach Teil (i) können wir deshalb offene Mengen $U_n \subseteq \mathbb{R}$ mit $U_n \supseteq M_n$ und $\lambda^*(U_n \setminus M_n) < \varepsilon \cdot 2^{-n}$ finden. Wir setzen dann $U := \bigcup_n U_n$. Es folgt, dass U offen ist, dass $U \supseteq M$ ist und dass $U \setminus M = \bigcup_n (U_n \setminus M)$ ist. Schließlich ist

$$\begin{aligned} \lambda^*(U \setminus M) &\leq \sum_n \lambda^*(U_n \setminus M) \leq \sum_n \lambda^*(U_n \setminus M_n) \\ &< \varepsilon \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} = \varepsilon. \end{aligned}$$

(b) Wegen Teil (a) existiert ein offenes $U \subseteq \mathbb{R}$ mit $U \supseteq M^c$ und $\lambda^*(U \setminus M^c) < \varepsilon$. Wir setzen $A := U^c$. Dann ist A abgeschlossen und $A = U^c \subseteq (M^c)^c = M$. Außerdem ist

$$M \setminus A = M \cap A^c = M \cap U = U \setminus M^c,$$

also

$$\lambda^*(M \setminus A) = \lambda^*(U \setminus M^c) < \varepsilon.$$

Aufgabe 10. Sei λ^* das äußere Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$ und λ seine Einschränkung auf die Borelsche σ-Algebra $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R})$.

(a) Zeigen Sie: Für jede Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ gibt es eine Borelsche Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}$ mit $B \supseteq A$ und $\lambda(B) = \lambda^*(A)$. (Hinweis: Wählen Sie eine Minimalfolge $((Q_{nk})_{k \in \mathbb{N}})_{n \in \mathbb{N}}$ von Quaderüberdeckungen für das äußere Maß $\lambda^*(A)$.)

(b) Sei nun $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ *die Lebesguesche σ-Algebra* der λ^*-messbaren Teilmengen von $\mathbb{R}$ und $\hat{\mathfrak{B}}$ die λ^*-Vervollständigung von $\mathfrak{B}$ (siehe Aufgabe 07). Zeigen Sie: $\mathfrak{L} = \hat{\mathfrak{B}}$. (Hinweis: Suche für $M \in \mathfrak{L}$ mit Aufgabe 09 eine Borelmenge $B \subseteq M$ mit $\lambda^*(M \setminus B) = 0$.)

Lösungsvorschlag. (a) Sei also $A \subseteq \mathbb{R}$ beliebig. Nach Defnition des äußeren Lebesgue-Maßes gibt es eine Folge von Intervallüberdeckungen $(\mathfrak{I}_n)$, $\mathfrak{I}_n = (I_{nk})_k$, so dass gilt:

$$\lambda^*(A) = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda(I_{nk}) \right).$$

Wir setzen $B_n := \bigcup_k I_{nk}$ und $B := \bigcap_n B_n$. Dann ist B Borelsch und weil $B_n \supseteq A$ ist, für alle $n \in \mathbb{N}$, ist auch $B \supseteq A$. Wegen $B \subseteq B_n$ ist zunächst $\lambda^*(B) \leq \lambda^*(B_n)$ und daher auch

$$\begin{aligned} \lambda^*(B) &\leq \liminf_{n \to \infty} \lambda^*(B_n) \leq \liminf_{n \to \infty} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda(I_{nk}) \right) \\ &= \lim_{n \to \infty} \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda(I_{nk}) = \lambda^*(A). \end{aligned}$$

Wegen $A \subseteq B$ ist sowieso $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$, also: $\lambda^*(A) = \lambda^*(B)$.

(b) Wir wissen schon, dass $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}$ vollständig ist. Sei

$$\mathfrak{N} = \{N \subseteq \mathbb{R} : \exists M \in \mathfrak{B} : \lambda(M) = 0 \text{ und } N \subseteq M\}.$$

Damit ist also auch $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{L}$. Da $\hat{\mathfrak{B}}$ von $\mathfrak{B} \cup \mathfrak{N}$ erzeugt ist, folgt: $\hat{\mathfrak{B}} \subseteq \mathfrak{L}$. ($\hat{\mathfrak{B}}$ ist die kleinste Vervollständigung, die $\mathfrak{B}$ enthält.)

Um zu zeigen, dass auch $\mathfrak{L} \subseteq \hat{\mathfrak{B}}$ ist, sei $A \in \mathfrak{L}$ beliebig. Es gibt dann für jedes $n \in \mathbb{N}$ nach Aufgabe (9b) eine abgeschlossene Teilmenge $B_n \subseteq A$ mit $\lambda^*(A \setminus B_n) < \frac{1}{n}$. Wir setzen $B := \bigcup B_n$. Dann ist $B \in \mathfrak{B}$ und auch $B \subseteq A$. Außerdem ist wegen $A \setminus B \subseteq A \setminus B_n$:

$$\lambda^*(A \setminus B) \leq \lambda^*(A \setminus B_n) < \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

also $\lambda^*(A \setminus B) = 0$. Nach Teil (a) gibt es weiterhin ein $M \in \mathfrak{B}$ mit $M \supseteq A \setminus B$ und $\lambda^*(M) = \lambda^*(A \setminus B) = 0$, also $A \setminus B \in \mathfrak{N}$. Insgesamt ist also

$$A = B \cup (A \setminus B) \in \hat{\mathfrak{B}}.$$

Aufgabe 11. *Die Cantormenge* $C \subseteq [0,1]$ wird so konstruiert: Im ersten Schritt nimmt man aus $C_0 := [0,1]$ das (offene) mittlere Drittel heraus, $C_1 := C_0 \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Im zweiten Schritt nimmt aus den verbleibenden Intervallen $[0, \frac{1}{3}]$ und $[\frac{2}{3}, 1]$ wiederum das jeweils mittlere Drittel heraus, $C_2 := [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$. Bei jedem weiteren Schritt nimmt man aus den verbleibenden Intervallen jeweils das mittlere Drittel heraus und erhält so im n-ten Schritt $C_n \subseteq [0,1]$. Schließlich setzt man $C := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$.

(a) Zeigen Sie, dass C kompakt (und damit eine Borelmenge) mit $\lambda(C) = 0$ (und λ, wie immer, dem Borel-Lebesgueschen Maß) ist.

(b) Zeigen Sie, dass C gleichmächtig zu $[0,1]$ ist. (Hinweis: Betrachte die Darstellung der Zahlen in C im *ternären System*).

(c) Zeigen Sie, das die Lebesguesche σ-Algebra $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ gleichmächtig zu $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$ ist.

Lösungsvorschlag. (a) $C_0 = [0,1]$ ist abgeschlossen und in jedem Schritt wird von C_n auf C_{n+1} etwas Offenes herausgenommen. Damit ist C_{n+1} der Durchschnitt von C_n mit etwas Abgeschlossenem. Nehmen wir induktiv an, dass C_n abgeschlossen ist, so also auch C_{n+1}. Damit ist C_n abgeschlossen, für alle $n \in \mathbb{N}$, und deshalb auch der Durchschnitt $C = \bigcap_n C_n$. Da $C \subseteq [0,1]$ auch beschränkt ist, ist C also nach Heine-Borel kompakt (und damit insbesondere Borelsch).

Um das (Borel-Lebesguesche) Maß von C zu bestimmen, bestimmen wir das Maß der offenen Menge, die das Komplement von C in $[0,1]$ ist. Im ersten Schritt wird *ein* offenes Intervall der Länge $\frac{1}{3}$ herausgenommen. Aus den verbleibenden zwei Intervallen werden im zweiten Schritt *zwei* offene Intervalle der Länge $\frac{1}{9}$ heraugenommen. Die Anzahl der verbleibenden Intervalle verdoppeln sich von Schritt zu Schritt und die Länge der mittleren Intervalle, die jeweils herausgenommen werden, sind $\frac{1}{3}$ mal so groß wie im Schritt vorher. Im n. Schritt werden daher

$$2^{n-1} \text{ Intervalle der Länge } (\tfrac{1}{3})^n$$

herausgenommen. Wir erhalten damit, dass mit der geometrischen Reihe

$$\lambda(C) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} (\frac{1}{3})^n = 1 - \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2}{3})^{n-1} = 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 0$$

sein muss. (In Teil (b) werden wir sehen, dass beim Herausnehmen all dieser Intervalle trotzdem noch ziemlich viel stehen bleibt.)

(b) Wir überlegen uns, welche Zahlen bei jedem Schritt aus C_n herausgenommen werden und stellen diese Zahlen $x \in [0,1]$ im *Ternärsystem*

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots,$$

mit $a_n \in \{0,1,2\}$ $(n \in \mathbb{N})$, dar. Im ersten Schritt wird das mittlere Drittel herausgenommen. Das sind genau die Zahlen x, bei denen $a_1 = 1$ ist. (Bei den Randpunkten $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$, die zu C_1 gehören, machen wir es so, dass wir $\frac{1}{3}$ mit einem 2-er-Ende schreiben, $\frac{1}{3} = 0,0\overline{2}$, und $\frac{2}{3}$ mit einem 0-er-Ende, $\frac{2}{3} = 0,2$.) Im zweiten Schritt werden dann aus den verbleibenden Zahlen alle $x \in C_1$ herausgenommen, bei denen $a_2 = 1$ ist (mit einer entsprechenden Vereinbarung für die Randpunkte). Auf diese Weise erhält man, dass in C genau die Zahlen $x \in [0,1]$ liegen, die in ihrer Ternärdarstellung *keine Einsen* haben. Und das sind immer noch ziemlich viele. Wir definieren nämlich jetzt eine Abbildung

$$\varphi\colon C \to [0,1],\ x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots \mapsto y = 0, b_1 b_2 b_3 \ldots$$

so: Wir stellen $x \in C$ wie oben im Ternärsystem und $y = \varphi(x) \in [0,1]$ im *Dualsystem* (also $b_n \in \{0,1\}$) dar. Dann setzen wir

$$b_n = \begin{cases} 0, & \text{falls } a_n = 0 \\ 1, & \text{falls } a_n = 2 \end{cases}.$$

Es ist dann klar, dass φ bijektiv ist. (Na ja, *fast* klar, aber wegen der 2-er, 1-er und 0-er-Enden mache ich mir jetzt mal keine Gedanken, da es von denen ohnehin nur abzählbar viele gibt: Die Intervallgrenzen der herausgenommenen Intervalle bilden nur einen abzählbaren Teil von C, C ist aber offenbar viel größer.) C hat also Maß Null, hat aber die Kardinalität von $[0,1]$ und ist damit insbesondere überabzählbar. Das geht.

(c) Die Lebesguesche Algebra muss daher gleichmächtig zu $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$ sein. Wir hatten nämlich schon gesehen, dass $\mathbb{R} \sim [0,1] \sim C$ ist, also auch $\mathfrak{P}(\mathbb{R}) \sim \mathfrak{P}(C)$. Aber weil $\mathfrak{L}$ vollständig und C eine Nullmenge ist, sind alle Teilmengen von C auch in $\mathfrak{L}$. Es folgt: $\mathfrak{L} \sim \mathfrak{P}(C) \sim \mathfrak{P}(\mathbb{R})$, denn mächtiger als $\mathfrak{P}(C)$ kann $\mathfrak{L}$ natürlich auch nicht sein, da ja $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ ist.

Aufgabe 12. Sei λ^* das äußere Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$.

(a) Zeigen Sie, dass λ^* translationsinvariant ist.

(b) Sei $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ die Lebesguesche σ-Algebra der λ^*-messbaren Teilmengen in $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass das Beispiel einer Teilmenge $A \subseteq [0,1]^n$ aus der Vorlesung, das nicht Borelsch ist, auch nicht in $\mathfrak{L}$ liegt.

(c) Zeigen Sie, dass λ^* nicht σ-additiv sein kann.

Lösungsvorschlag. (a) Sei $p \in \mathbb{R}^n$ und $T_p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die Translation um p, $x \mapsto x + p$. Das Borel-Lebesguesche Prämaß λ auf den Elementarfiguren $\mathfrak{E}(\mathbb{R}^n)$ ist translationsinvariant, denn ist $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader, sagen wir

$$Q = \prod_{j=1}^{n} [a_j, b_j]$$

(im Falle, dass Intervallgrenzen nicht dazu gehören, verläuft das Argument genauso), so ist

$$T_pQ = Q + p = \prod_{j=1}^{n} [a_j + p_j, b_j + p_j],$$

also wieder ein Quader, und nach Definition von λ folgt

$$\lambda(T_pQ) = \prod_{j=1}^{n} ((b_j + p_j) - (a_j + p_j)) = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j) = \lambda(Q).$$

Ist dann $E \in \mathfrak{E}(\mathbb{R}^n)$ eine Elementarfigur und $E = Q_1 \dot\cup \cdots \dot\cup Q_r$ eine disjunkte Vereinigung von Quadern Q_i $(i = 1, \ldots, r)$, so ist auch T_pE eine Elementarfigur und

$$T_pE = T_pQ_1 \dot\cup \cdots \dot\cup T_pQ_r$$

ebenfalls eine disjunkte Vereinigung von Quadern. Daher ist auch

$$\lambda(T_pE) = \sum_{i=1}^{r} \lambda(T_pQ_i) = \sum_{i=1}^{r} \lambda(Q_i) = \lambda(E).$$

Ist nun $A \subseteq \mathbb{R}^n$ beliebig, so ist $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Überdeckung von A mit Elementarfiguren, genau wenn $(T_pE_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Überdeckung von T_pA von Elementarfiguren ist. (Man erinnere sich, dass man mit T_{-p} auch wieder zurück kann.) Da aber

$$\sum_k \lambda(T_pE_k) = \sum_k \lambda(E_k)$$

ist, folgt auch

$$\begin{aligned} \lambda^*(T_pA) &= \inf\{\sum_k \lambda(T_pE_k) : (E_k) \text{ ist Überdeckung von } A \text{ mit Elementarfiguren}\} \\ &= \inf\{\sum_k \lambda(E_k) : (E_k) \text{ ist Überdeckung von } A \text{ mit Elementarfiguren}\} = \lambda^*(A). \end{aligned}$$

Es ist also λ^* translationsinvariant.

(b) Die Argumentation für die Nicht-Messbarkeit der Menge $A \subseteq [0,1] =: W$ aus der Vorlesung zeigt auch, dass A nicht in der Lebesgue-Algebra $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ liegen kann. Wir gehen die beiden Ungleichungsketten noch einmal durch. Mit $I = \mathbb{Q}^n \cap W$ und $J = \mathbb{Q}^n \cap [-1,2]^n$ hatten wir die Inklusionen

$$\dot\bigcup_{q\in I} (A+q) \subseteq [0,2]^n \subseteq \dot\bigcup_{q\in J} (A+q).$$

Aus der zweiten Inklusion konnten wir schließen:

$$2^n = \lambda^*([0,2]^n) \leq \lambda^*\left(\dot\bigcup_{q\in J} (A+q)\right) \overset{\text{äuß. Maß}}{\leq} \sum_{q\in J} \lambda^*(A+q) \overset{\text{Tr.-inv.}}{=} \sum_{q\in J} \lambda^*(A).$$

Daraus sieht man, dass $\lambda^*(A) > 0$ sein muss. Das gilt immer, egal, welche Regularität A hat, und da $A \subseteq W$ ist, zeigt das übrigens, dass $\lambda^*(A) \in (0,1]$ ist.

Die erste Ungleichung liefert andererseits

$$\sum_{q\in I} \lambda^*(A) \overset{\text{Tr.-Inv.}}{=} \sum_{q\in I} \lambda^*(A+q) \overset{\text{Maß}}{=} \lambda^*\left(\dot\bigcup_{q\in I} (A+q)\right) \leq \lambda^*([0,2]^n) = 2^n < \infty,$$

und hier geht bei der zweiten Gleichung die Maßeigenschaft von $\lambda^*|\mathfrak{L}$ ein, wenn $A \in \mathfrak{L}$ wäre. Man schließt dann, weil I unendlich ist, dass $\lambda^*(A) = 0$ sein muss, was im Widerspruch zu oben steht. Es kann also A nicht in $\mathfrak{L}$ liegen.

(c) Das Beispiel zeigt auch, dass $\lambda^*\colon \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$ nicht σ-additiv sein kann. Es muss an der obigen Stelle

$$\lambda^*\left(\dot{\bigcup}_q (A+q)\right) < \sum_q \lambda^*(A+q)$$

sein, sonst ließe sich der Widerspruch nicht lösen. (Aber schon aus der Definition der λ^*-Messbarkeit folgt, dass es ein $B \subseteq \mathbb{R}^n$ geben muss mit

$$\lambda^*(B) \neq \lambda^*(B \cap A) + \lambda^*(B \cap A^c).$$

Also ist λ^* definitiv nicht σ-additiv, denn sonst wäre $\mathfrak{L} = \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$.

[Noch eine Anmerkung: Nach dem Eindeutigkeitssatz für Maße wissen wir, dass es nur ein Maß auf der Borelalgebra $\mathfrak{B}$ geben kann, welches auf den Quadern das elemetargeometrische Volumen ergibt. Auch die Fortsetzung auf dei Vervollständigung $\mathfrak{L}$ ist eindeutig bestimmt. Das obige Argument zeigt nun, dass es eine *translationsinvariante* Fortsetzung zu einem Maß auf ganz $\mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ nicht geben kann. Man ist also nicht einfach nur zu einfallslos, um vielleicht eine andere Konstruktion als die von Caratheodory zu finden.]