Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose

WiSe 2020/21
14.12.2020
Blatt 06

Musterlösungen zur Integrations- und Maßtheorie

Aufgabe 21. Seien $(X, \mathfrak{A})$ und $(Y, \mathfrak{B})$ Messräume und $\Phi\colon X \to Y$ messbar. Sei weiter μ ein Maß auf $(X, \mathfrak{A})$. Dann definieren wir $\nu\colon \mathfrak{B} \to [0, \infty]$ durch $\nu(B) = \mu(\Phi^{-1}(B))$.

(a) Zeigen Sie, dass ν ein Maß auf $(Y, \mathfrak{B})$ ist. (Wir nennen ν *das Bildmaß von* μ *unter* Φ und notieren es so: $\nu =: \Phi_*\mu$.)

(b) Sei nun $g\colon Y \to [0, \infty]$ messbar. Zeigen Sie, dass dann auch $f := g \circ \Phi\colon X \to [0, \infty]$ messbar ist und für alle $B \in \mathfrak{B}$ gilt (vgl. Aufgabe 17):

$$\int_B g\, d\nu = \int_{\Phi^{-1}(B)} f\, d\mu.$$

Lösungsvorschlag. **(a)** Es ist

$$\nu(\emptyset) = \mu(\Phi^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$$

und für eine Folge paarweise disjunkter Elemente in $\mathfrak{B}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ist auch $(\Phi^{-1}(B_n))$ $(n \in \mathbb{N})$ eine Folge in $\mathfrak{A}$, die paarweise disjunkt ist. Da μ ein Maß ist, folgt

$$\nu(\dot{\bigcup_n} B_n) = \mu(\Phi^{-1}(\dot{\bigcup_n} B_n)) = \mu(\dot{\bigcup_n} \Phi^{-1}(B_n)) = \sum_n \mu(\Phi^{-1}(B_n)) = \sum_n \nu(B_n).$$

Also ist auch ν ein Maß.

(b) Ist $g\colon Y \to [0, \infty]$ messbar und $f = g \circ \Phi\colon X \to [0, \infty]$, so ist f messbar, denn Verkettungen messbarer Abbildungen sind messbar: Für alle messbaren $C \subseteq [0, \infty]$ ist

$$f^{-1}(C) = \Phi^{-1}(\underbrace{g^{-1}(C)}_{\in\mathfrak{B}}) \in \mathfrak{A}.$$

Sei nun zunächst $g = t$ eine Treppenfunktion auf Y. Es gibt dann also ein $r \in \mathbb{N}_0$, $\beta_j \geq 0$ und $B_j \in \mathfrak{B}$ $(j = 1, \ldots, r)$ mit $t = \sum_j \beta_j \chi_{B_j}$. Dann ist auch

$$s := t \circ \Phi = \sum_j \beta_j \chi_{B_j} \circ \Phi = \sum_j \beta_j \chi_{\Phi^{-1}(B_j)}$$

eine Treppenfunktion, denn für $B \subseteq Y$ ist $\chi_B \circ \Phi = \chi_{\Phi^{-1}(B)}$. Dann ist nach Definition des Integrals über Treppenfunktionen

$$\int t\, d\nu = \sum_j \beta_j \nu(B_j) = \sum_j \beta_j \mu(\Phi^{-1}(B_j)) = \int s\, d\mu.$$

Schließlich fixieren wir $B \in \mathfrak{B}$ und ein messbares $g\colon Y \to [0,\infty]$. Dann wählen wir eine monoton wachsende Folge (t_n) von Treppenfunktionen auf Y mit $(t_n) \nearrow g\chi_B$. Die Folge von Treppenfunktionen (s_n) mit $s_n := t_n \circ \Phi$ konvergiert dann monoton gegen

$$(g\chi_B) \circ \Phi = (g \circ \Phi) \cdot (\chi_B \circ \Phi) = f\chi_{\Phi^{-1}(B)}.$$

Mit Levis Satz erhalten wir deshalb

$$\int_B g\,d\nu = \int g\chi_B\,d\nu = \lim_n \int t_n\,d\nu = \lim_n \int s_n\,d\mu = \int f\chi_{\Phi^{-1}(B)}\,d\mu = \int_{\Phi^{-1}(B)} f\,d\mu.$$

Aufgabe 22. Sei $(X,\mathfrak{A},\mu)$ ein Maßraum und $\hat{\mathfrak{A}}$ die bzgl. μ vervollständigte σ-Algebra von $\mathfrak{A}$ (siehe Aufgabe 07).

(a) Sei $g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathfrak{A}$-messbar und $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion mit $f = g$ μ-fast-überall. Zeigen Sie, dass f dann $\hat{\mathfrak{A}}$-messbar ist.

(b) Sei nun $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\hat{\mathfrak{A}}$-messbar. Zeigen Sie, dass es dann $\mathfrak{A}$-messbare Funktionen $g_1, g_2\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ gibt mit $g_1 = g_2$ μ-fast-überall und $g_1 \le f \le g_2$. (Hinweis: Zeigen Sie das zunächst für $\hat{\mathfrak{A}}$-messbare Treppenfunktionen.)

Lösungsvorschlag. (a) Sei $N := \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$. Nach Voraussetung gibt es ein $M \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(M) = 0$ und $N \subseteq M$. Sei nun $B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Dann ist $f^{-1}(B) \cap M^c = g^{-1}(B) \cap M^c$, denn auf $M^c \subseteq N^c$ stimmen f und g überein. Es folgt

$$f^{-1}(B) = (f^{-1}(B) \cap M^c) \cup (f^{-1}(B) \cap M) = (\underbrace{g^{-1}(B) \cap M^c}_{\in\mathfrak{A}}) \cup (\underbrace{f^{-1}(B) \cap M}_{\subseteq M}) \in \hat{\mathfrak{A}}.$$

Also ist f $\hat{\mathfrak{A}}$-messbar.

(b) (i) Sei $f = s\colon X \to [0,\infty)$ zunächst eine $\hat{\mathfrak{A}}$-Treppenfunktion. Es gibt dann $r \in \mathbb{N}_0$, $\alpha_j \ge 0$ und $A_j \in \hat{\mathfrak{A}}$ $(j = 1,\dots,r)$ mit $s = \sum_j \alpha_j \chi_{A_j}$. Da $A_j \in \hat{\mathfrak{A}}$ ist, gibt es weiterhin $B_j, M_j \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(M_j) = 0$ sowie $N_j \subseteq M_j$ mit $A_j = B_j \cup N_j$ (für $j = 1,\dots,r$). Wir setzen dann $C_j := B_j \cup M_j \in \mathfrak{A}$ $(j = 1,\dots,r)$ und

$$t_1 := \sum_{j=1}^r \alpha_j \chi_{B_j}, \quad t_2 := \sum_{j=1}^r \alpha_j \chi_{C_j}.$$

Dann sind t_1, t_2 $\mathfrak{A}$-Treppenfunktionen und wegen $B_j \subseteq A_j \subseteq C_j$ ist $\chi_{B_j} \le \chi_{A_j} \le \chi_{C_j}$ und damit

$$t_1 = \sum_j \alpha_j \chi_{Bj} \le \sum_j \alpha_j \chi_{A_j} = s \le \sum_j \alpha_j \chi_{C_j} = t_2.$$

Schließlich ist mit $M := \bigcup_j M_j$ sicher $t_1(x) = t_2(x)$ für $x \in M^c$, denn $B_j \cap M^c = C_j \cap M^c$ für $j = 1,\dots,r$. Da $0 \le \mu(M) \le \sum_j \mu(M_j) = \sum_j 0 = 0$ ist, ist M eine Nullmenge und damit gilt: $t_1 = t_2$ f.ü.

(ii) Sei nun $f\colon X \to [0,\infty]$ $\hat{\mathfrak{A}}$-messbar. Dann gibt es eine monoton wachsende Folge (s_n) von $\hat{\mathfrak{A}}$-messbaren Treppenfunktionen mit $(s_n) \nearrow f$. Nach (i) gibt es $\mathfrak{A}$-messbare Treppenfunkionen $t_n^{(1)}, t_n^{(2)}$ mit $t_n^{(1)} \le s_n \le t_n^{(2)}$ und $t_n^{(1)} = t_n^{(2)}$ f.ü. Wir setzen

$$g_1 := \liminf_{n\to\infty} t_n^{(1)}, \quad g_2 := \liminf_{n\to\infty} t_n^{(2)}.$$

Dann sind g_1 und g_2 $\mathfrak{A}$-messbar und es ist

$$g_1 = \liminf_n t_n^{(1)} \leq \liminf_n s_n = \lim_n (s_n) = f \leq \liminf_n t_n^{(2)} = g_2.$$

Setzen wir schließlich $M_n := \{x \in X : t_n^{(1)}(x) \neq t_n^{(2)}(x)\} \in \mathfrak{A}$, so ist das eine Nullmenge und daher auch $M := \bigcup_n M_n$. Für alle $x \in M^c$ ist dann $t_n^{(1)}(x) = t_n^{(2)}(x)$, und daher auch

$$g_1(x) = \liminf_n t_n^{(1)}(x) = \liminf_n t_n^{(2)}(x) = g_2(x).$$

Es ist also $g_1 = g_2$ f.ü.

(iii) Ist nun schließlich $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\hat{\mathfrak{A}}$-messbar, so existieren $h_1, h_2, k_1, k_2: X \to [0, \infty]$ $\mathfrak{A}$-messbar mit $h_1 \leq f_+ \leq h_2$ und $k_1 \leq f_- \leq k_2$ sowie $h_1 = h_2$ f.ü und $k_1 = k_2$ f.ü. Wir setzen $g_1 := h_1 - k_2$ und $g_2 := h_2 - k_1$. Dann sind g_1, g_2 $\mathfrak{A}$-messbar, es ist auch $g_1 = g_2$ f.ü und

$$g_1 = h_1 - k_2 \leq f_+ - f_- = f \leq h_2 - k_1 = g_2.$$

Aufgabe 23. Sei X ein Maßraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f: X \times I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass folgendes gilt:

(i) Für jedes $s \in I$ ist die Funktion $f(\cdot, s): X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x, s)$, integrierbar;

(ii) für jedes $y \in X$ ist die Funktion $f(y, \cdot): I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(y, t)$, differenzierbar.

Zudem existiere eine integrierbare Funktion $g: X \to [0, \infty]$, so dass für alle $x \in X$ und $t \in I$ gilt: $|\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)| \leq g(x)$. Zeigen Sie: Dann ist

(a) die Funktion $\frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t): X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$, für jedes $t \in I$ integrierbar (also insbesondere messbar),

(b) die Funktion $h: I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \int f(\cdot, t)\, d\mu$, differenzierbar, und es gilt für alle $t \in I$:

$$\frac{d}{dt} \int f(\cdot, t)\, d\mu = \int \frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t)\, d\mu.$$

Lösungsvorschlag. (a) Sei $t_0 \in I$ fest und (t_n) eine Folge in I mit $(t_n) \to t_0$ und $t_n \neq t_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir setzen dann $h_n: X \to \mathbb{R}$,

$$h_n(x) := \frac{f(x, t_n) - f(x, t_0)}{t_n - t_0}.$$

Dann ist h_n eine Linearkombination der integrierbaren Funktionen $f(\cdot, t_n)$ und $f(\cdot, t_0)$ und damit auch integrierbar (insbesondere messbar). Für festes $x \in X$ konvergiert $(h_n(x))$ offenbar gegen $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0)$, denn $f(x, \cdot)$ ist differenzierbar in t_0. Wir haben also punktweise Konvergenz von (h_n) gegen $\frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t_0)$. Damit ist auch $\frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t_0)$ messbar und wegen $|\frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t_0)| \leq g$ mit einem integrierbaren g ist $\frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t_0)$ sogar integrierbar.

(ii) Nun sind aber sogar die integrierbaren Funktionen h_n betragsweise alle durch g majorisiert, denn für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $x \in X$ existiert nach dem Mittelwertsatz ein $\xi_{n,x}$ zwischen t_n und t_0 mit

$$h_n(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(x, \xi_{n,x}),$$

also ist auch $|h_n(x)| \leq g(x)$, für alle $x \in X$. Nach Lebesgues Satz ist daher für die Funktion $H\colon I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \int f(\cdot, t)\, d\mu$

$$\begin{aligned}\int \frac{\partial f}{\partial t_0}(\cdot, t_0)\, d\mu &= \lim_n \int h_n\, d\mu = \lim_n \frac{1}{t_n - t_0}\Big(\int f \cdot, t_n)\, d\mu - \int f(\cdot, t_0)\, d\mu\Big) \\ &= \lim_n \frac{H(t_n) - H(t_0)}{t_n - t_0}.\end{aligned}$$

H ist also in t_0 differenzierbar und

$$\frac{dH}{dt}(t_0) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t_0)\, d\mu.$$

Aufgabe 24. Sei $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Einschränkung $f|[0, n]$ Riemann-integrierbar ist.

(a) Zeigen Sie, dass f Lebesgue-messbar ist. (Hinweis: Bitte verwenden Sie die (unbewiesene) Bemerkung aus der Vorlesung, dass (für alle $n \in \mathbb{N}$) $f|[0, n]$ Lebesgue-messbar ist.)

(b) Zeigen Sie nun: Ist $f \geq 0$, so ist f genau dann Lebesgue-integrierbar, wenn das uneigentliche Riemann-Integral $\int_0^\infty f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^n f(x)\, dx$ existiert und dann gilt:

$$\int_{[0,\infty)} f\, d\lambda = \int_0^\infty f(x)\, dx.$$

Lösungsvorschlag. **(a)** Wir benutzen, dass aus der Riemann-Integrierbarkeit von $f|[0, n]$ (mit $n \in \mathbb{N}$) die Lebesgue-Messbarkeit folgt (siehe auch die Anmerkung im Anschluss an diese Aufgabe). Hierbei ist mit der Lebesgue-Algebra auf $[0, n]$ stets die Spuralgebra von $\mathfrak{L} = \hat{\mathfrak{B}}$ auf $[0, n] \subseteq \mathbb{R}$ gemeint (siehe Aufgabe 17). $\mathfrak{B}$ notiert hier wie üblich die Borelsche und $\mathfrak{L}$ die Lebesguesche σ-Algebra auf $\mathbb{R}$. Für jedes (Borel-) messbare $C \subseteq \mathbb{R}$ ist nun

$$(f\chi_{[0,n]})^{-1}(C) = \left((f\chi_{[0,n]})^{-1}(C) \cap [0, n]\right) \cup \left((f\chi_{[0,n]})^{-1}(C) \cap (n, \infty)\right).$$

Die erste Klammer ist gerade $(f|[0, n])^{-1}(C)$ und liegt damit in $\mathfrak{L}$ und die zweite ist leer, falls $0 \notin C$ ist oder (n, ∞), falls $0 \in C$ ist. Damit liegt die Menge rechts vom Gleichheitszeichen in $\mathfrak{L}$, d.h.: $f\chi_{[0,n]}$ ist Lebesgue-messbar. Aber f ist offenbar der punktweise Limes von $(f\chi_{[0,n]})$ und damit auch $\mathfrak{L}$-messbar.

(b) Vorbemerkung: Hier verwenden wir – und das habe ich in der Aufgabenstellung vergessen zu erwähnen (sorry!) – dass ein Riemann-integrierbares $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ (mit einem nicht-leeren, abgeschlossenen und beschränkten Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$) nicht nur Lebesgue-messbar, sondern auch Lebesgue-integrierbar ist und es gilt:

$$\int_{[a,b]} f\, d\lambda = \int_a^b f(x)\, dx.$$

(λ ist hier das Lebesguesche Maß auf der Spuralgebra der Lebesgueschen σ-Algebra $\mathfrak{L}$ von $\mathbb{R}$ auf $[a,b]$.) In der Vorlesung wurde diese Aussage nur für stetige Integranden bewiesen. (Siehe auch die Anmerkung im Anschluss an diese Aufgabe.)

(i) Sei also zunächst f Lebesgue-integrierbar. Dann konvergieren die $\mathfrak{L}$-messbaren Funktion (siehe Teil (a)) $f\chi_{[0,n]}$ $(n \in \mathbb{N})$ punkweise gegen f und $|f\chi_{[0,n]}| \le |f|$. Nach Lebesgues Satz sind dann alle $f\chi_{[0,n]}$ Lebesgue-integrierbar $(n \in \mathbb{N})$ und es gilt:

$$\int_{[0,\infty)} f\,d\lambda = \lim_n \int_{[0,\infty)} f\chi_{[0,n]}\,d\lambda = \lim_n \int_{[0,n]} f\,d\lambda = \lim_n \int_0^n f(x)\,dx.$$

Das zeigt, dass f auch uneigentlich Riemann-integrierbar ist und es gilt:

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \int_{[0,\infty)} f\,d\lambda.$$

[Anmerkung: Diese Richtung gilt auch für Funktionen, die nicht notwendig nicht negativ $(f \ge 0)$ sind. Allerdings muss man hier etwas genauer hinsehen, was die Definition des uneigentlichen Riemann-Integrals betrifft. Die Definition dieses Integrals verlangt ja eigentlich, dass $f|[0,b]$ Riemann-integrierbar ist, für alle $b > 0$, was aber äquivalent dazu ist, dass $f|[0,n]$ Riemann-integrierbar ist, für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann verlangt man, dass der Grenzwert $\lim_{b\to\infty}\int_0^b f(x)\,dx$ existiert. Im Falle, dass $f \ge 0$ ist, ist das wegen der Monotonie der Funktion $b \mapsto \int_0^b f(x)\,dx$ aber äquivalent zur Existenz des Grenzwertes $\lim_{n\to\infty}\int_0^n f(x)\,dx$. Falls nun aber f nicht notwendig nicht-negativ ist, könnte es z.B. sein, dass die Integrale $\int_0^n f(x)\,dx$ „zufällig“ gerade mal Null sind (für $n \in \mathbb{N}$), der Grenzwert für $n \to \infty$ also existiert, während der für $b \to \infty$ (mit $b \in \mathbb{R}_+$) nicht existiert. Die obige Argumentation könnte man dann aber für alle Folgen (b_n) mit $(b_n) \to \infty$ machen und dann ist die Aussage, dass jede Lebesgue-integrierbare Funktion auf $[0,\infty)$, die auf $[0,n]$ Riemann-inegrierbar ist, auch uneigentlich Riemann-integrierbar ist, richtig. (Danke an Jonathan Walz für diesen Hinweis.) Auf dem nächsten Übungsblatt werden wir eine Aufgabe sehen, dass die Umkehrung, wie jetzt gleich unter (b), dann aber i.a. nicht richtig ist.]

(ii) Ist nun $f \ge 0$, so beobachten wir, dass $(f\chi_{[0,n]})$ eine Folge nicht-negativer Lebesgue-messbarer Funktionen ist, die sogar monoton wachsend gegen f konvergiert. Deshalb ist mit Levis Satz

$$\int_{[0,\infty)} f\,d\lambda = \lim_n \int_{[0,\infty)} f\chi_{[0,n]}\,d\lambda = \lim_n \int_{[0,n]} f\,d\lambda = \lim_n \int_0^n f(x)\,dx.$$

Ist daher nun f uneigentlich Riemann-integrierbar, so ist dieser Grenzwert endlich, damit f Lebesgue-integrierbar und es gilt

$$\int_{[0,\infty)} f\,d\lambda = \int_0^\infty f(x)\,dx.$$

[**Anmerkung.** Wir beweisen hier noch den folgenden

Satz. Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so ist f Lebesgue-integrierbar und es gilt:

$$\int_{[a,b]} f\,d\lambda = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Beweis. Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zunächst beschränkt. Unmittelbar aus der Definition des Oberintegrals von f wissen wir, dass wie eine Folge von Riemannschen Treppenfunktionen (ψ_n) mit $\psi_n \geq f$ wählen können, so dass für deren Integrale $d_n := \int_a^b \psi_n(x)\,dx$ gilt: $(d_n) \searrow \int_a^{*b} f(x)\,dx$. Ebenso können wir eine Folge von Riemannschen Treppenfunktionen (φ_n) mit $\varphi_n \leq f$ wählen, so dass mit $c_n := \int_a^b \varphi_n(x)\,dx$ gilt: $(c_n) \nearrow \int_{*a}^b f(x)\,dx$. Ist nun f Riemann-integrierbar, so ist

$$\int_{*a}^{b} f(x)\,dx = \int_a^{*b} f(x)\,dx =: \int_a^b f(x)\,dx.$$

Wegen $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ ist $\psi_n - \varphi_n \geq 0$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir setzen nun

$$Q := \liminf_n (\psi_n - \varphi_n) \geq 0.$$

Da φ_n, ψ_n (für alle $n \in \mathbb{N}$) insbesondere Borel-messbar sind, ist dies auch für Q so und nach Fatous Lemma ist

$$0 \leq \int Q\,d\lambda \leq \liminf_n \int (\psi_n - \varphi_n)\,d\lambda.$$

Nun ist aber das Riemann- und das Lebesgue-Integral auf Riemannschen Treppenfunktionen $s\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gleich, denn ist $\mathfrak{Z} = (x_0, \ldots, x_n)$ eine Zerlegung von $[a,b]$ und ist $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ so, dass $s|(x_{j-1}, x_j) = \alpha_j$ ist $(j = 1, \ldots, n)$, so ist

$$\int_a^b s(x)\,dx = \sum_j \alpha_j (x_j - x_{j-1}) = \sum_j \alpha_j \lambda((x_{j-1}, x_j)) = \int_{[a,b]} s\,d\lambda$$

(wobei man im Lebesgue-Fall eigentlich s noch in Positiv- und Negativteil zerlegen und auch noch die Nullmenge $\{x_0, \ldots, x_n\} \subseteq [a,b]$ diskutieren müsste). Wenden wir diesen Zusammenhang zwischen Riemann- und Lebesgue-Integral an, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int Q\,d\lambda \leq \liminf_n \int (\psi_n - \varphi_n)\,d\lambda = \liminf_n \Big(\int \psi_n\,d\lambda - \int \varphi_n\,d\lambda\Big) \\
&= \liminf_n \Big(\int_a^b \psi_n(x)\,dx - \int_a^b \varphi_n(x)\,dx\Big) = \lim_n (d_n) - \lim_n (c_n) \\
&= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = 0.
\end{aligned}$$

Es folgt, dass $Q = 0$ f.ü ist. Nennen wir nun $M := \{x \in [a,b] : Q(x) \neq 0\}$, so gilt also außerhalb dieser Nullmenge für alle $x \in M^c$:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \liminf_n \psi_n(x) - \limsup_n \varphi_n(x) = \liminf_n \psi_n(x) + \liminf_n (-\varphi_n(x)) \\
&\leq \liminf_n (\psi_n(x) - \varphi_n(x)) = Q(x) = 0.
\end{aligned}$$

Setzen wir nun

$$g := \limsup_n \varphi_n \leq f, \quad h := \liminf_n \psi_n \geq f,$$

so erhalten wir, dass g, h Borel-messbar sind, $g \leq f \leq h$ ist und $g = h$ f.ü. Damit ist auch $g = f$ f.ü und f dann nach Aufgabe 22 tatsächlich Lebesgue-messbar.

Im Folgenden notiere also λ stets das Lebesguesche Maß auf der Lebesgueschen Algebra $\mathfrak{L}$ bzw. ihrer Spuralgebra auf $[a,b]$. Da f beschränkt ist, ist also $|f| \leq M$, für ein $M > 0$, und da die konstante Funktion M auf $[a,b]$ integrierbar ist, ist auch f Lebesgue-integrierbar. Um nun die Gleichheit der beiden Integralbegriffe einzusehen, wenden wir noch zweimal Fatous Lemma an und benutzen, dass die Integrale auf Riemannschen Treppenfunktionen übereinstimmen.

Wegen $f - \varphi_n \geq 0$ ist auch $f - g = f - \limsup_n(\varphi_n) \geq 0$ und

$$0 \leq f - g = f - \limsup_n \varphi_n = f + \liminf_n(-\varphi_n) = \liminf_n(f - \varphi_n).$$

Fatou impliziert daher

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int \liminf_n(f - \varphi_n)\, d\lambda \leq \liminf_n \int (f - \varphi_n)\, d\lambda = \liminf_n(\int f\, d\lambda - \int \varphi_n\, d\lambda) \\
&= \int f\, d\lambda + \liminf_n(-\int \varphi_n\, d\lambda) = \int f\, d\lambda + \liminf_n(-\int_a^b \varphi_n(x)\, dx) \\
&= \int f\, d\lambda + \lim_n(-c_n) = \int f\, d\lambda - \int_a^b f(x)\, dx,
\end{aligned}$$

also

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int f\, d\lambda.$$

Aber ebenso ist auch $\psi_n - f \geq 0$ und damit auch $h - f = \liminf_n(\psi) - f$, also

$$0 \leq h - f = \liminf_n(\psi_n) - f = \liminf_n(\psi_n - f).$$

Zum letzten Mal für heute folgt mit Fatou:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int \liminf_n(\psi_n - f)\, d\lambda \leq \liminf_n \int (\psi_n - f)\, d\lambda = \liminf_n(\int \psi_n\, d\lambda - \int f\, d\lambda) \\
&= \liminf_n(\int \psi_n\, d\lambda) - \int f\, d\lambda = \liminf_n(\int_a^b \psi_n(x)\, dx) - \int f\, d\lambda = \lim_n(d_n) - \int f\, d\lambda \\
&= \int_a^b f(x)\, dx - \int f\, d\lambda,
\end{aligned}$$

also

$$\int f\, d\lambda \leq \int_a^b f(x)\, dx.$$

Insgesamt ist also:

$$\int_{[a,b]} f\, d\lambda = \int_a^b f(x)\, dx.]$$