

Musterlösungen zur Integrations- und Maßtheorie

Aufgabe 25. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Zeigen Sie:

(a) Ist $f''(x) \leq 0$, für alle $x \in I$, so ist f konkav.

(b) Ist f konkav, so ist $f''(x) \leq 0$, für alle $x \in I$.

(Hinweis: Zu (a): Ist $x_1 < x_2$ und $x = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2$ mit $\lambda \in (0, 1)$, so wende man den Mittelwertsatz auf $f|_{[x_1, x]}$ und $f|_{[x, x_2]}$ an. Zu (b): Sei $f''(x_0) > 0$ (für ein $x_0 \in I$). Betrachten Sie dann die Hilfsfunktion $I \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) - f'(x_0)(x - x_0)$.)

Lösungsvorschlag. (a) Seien $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ und $x \in (x_1, x_2)$, also $x = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2$ mit einem $\lambda \in (0, 1)$. Wir wollen zeigen:

$$f(x) \geq (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2).$$

Den Mittelwertsatz auf $f|_{[x_1, x]}$ und $f|_{[x, x_2]}$ angewendet, liefert Zwischenstellen $\xi_1 \in (x_1, x)$ und $\xi_2 \in (x, x_2)$ mit

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}, \quad f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Da $f'' \leq 0$ ist, ist f' monoton fallend. Wegen $\xi_1 < x < \xi_2$ ist deshalb $f'(\xi_2) \leq f'(\xi_1)$. Wegen

$$\begin{aligned} x_2 - x &= x_2 - (1 - \lambda)x_1 - \lambda x_2 = (1 - \lambda)(x_2 - x_1) \\ x - x_1 &= (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2 - x_1 = \lambda(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

erhalten wir

$$\frac{f(x_2) - f(x)}{(1 - \lambda)(x_2 - x_1)} \leq \frac{f(x) - f(x_1)}{\lambda(x_2 - x_1)}$$

und daraus

$$\lambda(f(x_2) - f(x)) \leq (1 - \lambda)(f(x) - f(x_1)).$$

Ausmultiplizieren und Sortieren liefert dann tatsächlich

$$(1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) \leq f(x).$$

(b) Angenommen $f''(x_0) > 0$ für ein $x_0 \in I$. Wir zeigen, dass es dann ein $h > 0$ gibt mit $x_0 - h, x_0 + h \in I$ und

$$f(x_0) < \frac{1}{2}f(x_0 - h) + \frac{1}{2}f(x_0 + h).$$

Mit $x_1 = x_0 - h$, $x_2 = x_0 + h$ (und $\lambda = \frac{1}{2}$) zeigt das dann, dass f nicht konkav sein kann.

Dazu transformieren wir f zunächst so, dass die Tangente an den Graphen von f horizontal ist. Sei nämlich $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\varphi(x) = f(x) - f'(x_0)(x - x_0).$$

(Wir ziehen von f ihr Taylorpolynom in x_0 vom Grad 1 ab und ignorieren den konstanten Anteil.) Dann ist auch φ zweimal differenzierbar und es gilt:

$$\varphi(x_0) = f(x_0), \quad \varphi'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0, \quad \varphi''(x_0) = f''(x_0) > 0.$$

Es hat φ deshalb in x_0 ein striktes lokales Minimum (siehe auch die Anmerkung im Anschluss der Aufgabe). Wir finden deshalb ein $h > 0$, so dass $x_0 - h$ und $x_0 + h$ in I sind und gilt:

$$\varphi(x_0 - h) > \varphi(x_0), \quad \varphi(x_0 + h) > \varphi(x_0).$$

Deshalb ist

$$\begin{aligned} & f(x_0 - h) + f(x_0 + h) \\ &= [\varphi(x_0 - h) + f'(x_0)((x_0 - h) - x_0)] + [\varphi(x_0 + h) + f'(x_0)((x_0 + h) - x_0)] \\ &= \varphi(x_0 - h) + \varphi(x_0 + h) > 2\varphi(x_0) = 2f(x_0). \end{aligned}$$

[Anmerkung. Es gibt hier eine Feinheit, die Ihnen vielleicht aufgefallen ist. Wir hatten in Analysis-I den Satz, dass eine Funktion $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $\varphi'(x_0) = 0$ und $\varphi''(x_0) > 0$, für ein $x_0 \in I$, in x_0 ein striktes lokales Minimum hat, nur für zweimal *stetig* differenzierbare Funktionen bewiesen (und auch die Striktheit des Minimums nicht formuliert, obwohl sie der Beweis lieferte). Das lag daran, dass wir die Aussage im Anschluss an den Satz von Taylor bewiesen haben, für den wir die *stetige* Differenzierbarkeit bis zu einer gewissen Stufe brauchten. Ich hätte in dieser Aufgabe deshalb gleich auch die Stetigkeit der 2. Ableitung verlangen sollen. Sorry. Nun ist es aber tatsächlich so, dass die Aussage auch für Funktionen gilt, die nur zweimal differenzierbar sind, ohne also die Stetigkeit ihrer 2. Ableitung zu verlangen. Der Beweis dafür ist elementar und beruht im Wesentlichen auf dem Mittelwertsatz. Wir fügen ihn hier interessehalber hinzu.

Aus $\varphi''(x_0) > 0$ folgt aus der Definition des Grenzwertes des Differenzenquotienten unmittelbar, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq I$ und

$$\frac{\varphi'(x) - \varphi'(x_0)}{x - x_0} > 0$$

ist, für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Weil aber $\varphi'(x_0) = 0$ ist, bedeutet das:

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &< 0 & \text{für } x \in (x_0 - \delta, x_0), \\ \varphi'(x) &> 0 & \text{für } x \in (x_0, x_0 + \delta). \end{aligned}$$

Aber dann ist $\varphi|_{(x_0 - \delta, x_0]}$ streng monoton fallend und $\varphi|_{[x_0, x_0 + \delta)}$ streng monoton wachsend. Daher ist x_0 ein striktes Minimum von $\varphi|_{(x_0 - \delta, x_0 + \delta)}$.

Aufgabe 26. Wir betrachten die Funktion $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, die durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{für } x > 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

gegeben ist.

(a) Sei $g: [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ uneigentlich Riemann-integrierbar und $h: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit $|h| \leq g$ und so, dass $h|_{[1, a]}$ für alle $a \in (1, \infty)$ Riemann-integrierbar ist. Zeigen Sie, dass h dann auch uneigentlich Riemann-integrierbar ist. (Hinweis: Aufgabe 24 und der Satz von Lebesgue)

(b) Zeigen Sie nun mit Hilfe von Teil (a), dass f uneigentlich Riemann-integrierbar ist. (Hinweis: Machen Sie, bevor Sie (a) anwenden, noch eine partielle Integration.)

(c) Zeigen Sie schließlich, dass f nicht Lebesgue-integrierbar ist. (Hinweis: Integrieren Sie $|f|$ jeweils von $k\pi$ bis $(k+1)\pi$ (für $k \in \mathbb{N}$) und schätzen Sie dann $\int |f| d\lambda$ nach unten durch die harmonische Reihe ab.)

Lösungsvorschlag. (a) Erinnerung. Sei $h: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass $h|_{[1, b]}$, für alle $b > 1$, Riemann-integrierbar ist. Es heißt dann h *uneigentlich Riemann-integrierbar*, wenn der Grenzwert

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b f(x) dx \in \mathbb{R}$$

existiert und dieser wird dann mit $\int_1^\infty f(x) dx$ bezeichnet. Äquivalent ist, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{b_n} f(x) dx$$

existiert, und zwar für alle Folgen (b_n) in $[1, \infty)$ mit $(b_n) \rightarrow \infty$. Diese Grenzwerte sind dann notwendig alle gleich und werden mit $\int_1^\infty f(x) dx$ bezeichnet.

Sei daher (b_n) eine Folge in $[1, \infty)$ mit $(b_n) \rightarrow \infty$. Da $h|_{[1, b_n]}$ Riemann-integrierbar ist, ist $h|_{[1, b_n]}$ auch Lebesgue-messbar und damit auch die Funktionen $h_n := h \cdot \chi_{[1, b_n]}$ auf $[0, \infty)$. Nun ist $|h_n| \leq |h| \leq g$ mit einem uneigentlich Riemann-integrierbaren $g: [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$. Dieses ist dann nach Aufgabe 24 auch Lebesgue-integrierbar. Deshalb können wir auf die Folge (h_n) den Konvergenzsatz von Lebesgue anwenden. Da $(h_n) \rightarrow h$ punktweise konvergiert, folgt damit, dass h Lebesgue-integrierbar ist und

$$\int_{[1, \infty)} h d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[1, \infty)} h_n d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[1, b_n]} h d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{b_n} h(x) dx.$$

Der Grenzwert existiert also (eigentlich) für alle solchen Folgen, d.h.: h ist uneigentlich Riemann-integrierbar.

(b) Wegen $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (z.B. mit der Regel von de l'Hospital), ist f auf $[0, \infty)$ stetig und damit auf $[0, 1]$ Riemann-integrierbar. Wegen

$$\int_0^b f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^b f(x) dx,$$

für alle $b > 1$, ist damit f genau dann uneigentlich Riemann-integrierbar, wenn $f|_{[1, \infty)}$ es ist. Um nun $\int_1^b f(x) dx$ abzuschätzen, machen wir zunächst eine partielle Integration mit $u, v: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$u(x) = \frac{1}{x}, \quad v(x) = -\cos x.$$

Es ist dann $\frac{\sin x}{x} = u(x)v'(x)$ und $u'(x)v(x) = \frac{-\cos x}{-x^2}$, also ist

$$\int_1^b \frac{\sin x}{x} dx = \left[-\frac{\cos x}{x} \right]_1^b - \int_1^b \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Aber $[1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, ist offenbar uneigentlich Riemann-integrierbar, denn

$$\int_1^b \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b = -\frac{1}{b} + 1 \xrightarrow{b \rightarrow \infty} 1 < \infty,$$

und $|\frac{\cos x}{x^2}| \leq \frac{1}{x^2}$, für alle $x \in [1, \infty)$. Deshalb ist nach Teil (a) auch $[1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\cos x}{x^2}$, uneigentlich Riemann-integrierbar. Es folgt, dass der Grenzwert

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{\cos b}{b} + \cos(1) - \int_1^b \frac{\cos x}{x^2} dx \right)$$

existiert, denn $\frac{\cos b}{b} \rightarrow 0$ für $b \rightarrow \infty$, und damit existiert auch der Grenzwert

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{\sin x}{x} dx.$$

[Anmerkung. Den Grenzwert $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ werden wir im nächsten Semester mit Mitteln der sogenannten Funktionentheorie berechnen, obwohl es keine elementare Stammfunktion von $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ gibt.]

(c) Um zu zeigen, dass f nicht Lebesgue-integrierbar ist, müssen wir also $\int_{[0, \infty)} |f| d\lambda = \infty$ nachweisen. Da $(|f| \cdot \chi_{[0, n\pi]})_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend gegen $|f|$ konvergiert, wissen wir mit Levi, dass

$$\int_{[0, \infty)} |f| d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0, n\pi]} |f| d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n\pi} |f(x)| dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |f(x)| dx.$$

Die Integrale $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx$ schätzen wir aber nun so nach unten ab:

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{(k+1)\pi} dx = \frac{1}{(k+1)\pi} \underbrace{|\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \cos x|}_{=\pm 2} = \frac{2}{(k+1)\pi}.$$

Es ist also

$$\int_{[0, \infty)} |f| d\lambda \geq \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \infty.$$

Aufgabe 27. Sei $X = \mathbb{N}$, $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge nicht-negativer Zahlen und $\mu_\alpha: \mathfrak{P}(\mathbb{N}) \rightarrow [0, \infty]$ das Maß auf der vollen Potenzalgebra von X , welches $\mu_\alpha(\{n\}) = \alpha_n$ (für alle $n \in \mathbb{N}$) erfüllt (siehe Aufgabe 02).

(a) Zeigen Sie, dass jede Funktion $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ (also eine reelle Zahlenfolge (x_n) , wenn $x_n = f(n)$ notiert wird) messbar ist und für nicht negatives $f = (x_n)$ (also $x_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$) gilt:

$$\int f d\mu_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n.$$

(b) Sei nun $\alpha_n = \frac{1}{n^3}$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $f = (x_n)$ mit $x_n = n$ zwar μ_α -integrierbar ist, aber $f^2 = (x_n^2)$ nicht μ_α -integrierbar ist.

Lösungsvorschlag. (a) Handelt es sich bei einem Messraum (X, \mathfrak{A}) um die volle Potenzalgebra $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(X)$, so ist nach Definition jede Abbildung $f: X \rightarrow Y$ in einen Messraum Y messbar. Das ist hier bei $X = \mathbb{N}$ der Fall.

Eine nicht-negative Zahlenfolge $f = (x_n)$ ist nun i.a. keine Treppenfunktion, aber ihre *Ab-schnitte* $s_n := f \cdot \chi_n$, wo $\chi_n: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ die charakteristische Funktion von $\{1, \dots, n\}$ bezeichne. Für diese ist nach Definition

$$\int s_n d\mu_\alpha = \sum_{k=1}^n x_k \mu_\alpha(\{k\}) = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k.$$

Nun konvergiert (s_n) offenbar monoton wachsend gegen f , $(s_n) \nearrow f$. Deshalb ist mit Levis Satz

$$\int f d\mu_\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \int s_n d\mu_\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n.$$

(b) Ist $\alpha_n = \frac{1}{n^3}$ für $n \in \mathbb{N}$, so erhalten wir für die Folge (x_n) mit $x_n = n$:

$$\begin{aligned} \int f d\mu_\alpha &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \cdot n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty \\ \int f^2 d\mu_\alpha &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \cdot n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty. \end{aligned}$$

Es ist also f μ_α -integrierbar, nicht aber f^2 (also $\mathcal{L}^1(\mu_\alpha) \not\subseteq \mathcal{L}^2(\mu_\alpha)$).

[**Anmerkung.** Beachten Sie auch, dass eine Folge $f = (x_n)$ bezüglich des Zählmaßes auf \mathbb{N} (also mit $\alpha = (\alpha_n)$ und $\alpha_n = 1$, für alle $n \in \mathbb{N}$), genau dann integrierbar ist, wenn sie *absolut konvergiert* (und $\int |f| d\mu = \sum_1^\infty |x_n|$ in diesem Fall). Für eine nur bedingt konvergente Reihe (vgl. z.B. das Weihnachtsblatt in Analysis-I) gibt es gar kein Integral. Die Lebesguesche Integrationstheorie ignoriert die Ordnung auf \mathbb{N} oder anderen Maßräumen wie z.B. auch auf \mathbb{R} . Wie Aufgabe 26 zeigt, gibt es daher kein Lebesgue-Integral für nur „bedingt integreable Funktionen“ wie $x \mapsto (\sin x)/x$, die bzgl. der Riemann-Integrals, welches Rücksicht auf die Ordnung in \mathbb{R} nimmt, integrierbar sind.]

Aufgabe 28. Sei (X, μ) ein Maßraum. Eine messbare Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *wesentlich beschränkt*, wenn es ein $c > 0$ gibt, so dass $\{x \in X : |f(x)| > c\} =: \{|f| > c\}$ eine Nullmenge ist. Man setzt dann

$$\|f\|_\infty := \inf\{c \geq 0 : \mu(\{|f| > c\}) = 0\} \in [0, \infty).$$

(a) Sei $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ die Menge aller wesentlich beschränkten Funktionen auf X . Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ eine Untervektorraum aller (messbaren) Funktionen auf X ist.

(b) Sei $\mathcal{N}(\mu)$ der Unterraum aller messbaren Funktionen, die fast-überall gleich Null sind. Dann ist $\mathcal{N}(\mu) \subseteq \mathcal{L}^\infty(\mu)$ und man setzt $L^\infty(\mu) := \mathcal{L}^\infty(\mu)/\mathcal{N}(\mu)$. Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|: L^\infty(\mu) \rightarrow [0, \infty)$,

$[f] \mapsto \|f\|_\infty$ wohldefiniert und eine Norm auf $L^\infty(\mu)$ ist. (Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\{|f| > \|f\|_\infty\}$ eine Nullmenge ist.)

Lösungsvorschlag. Wir notieren für diese Aufgabe mal mit $\mathcal{M}(X)$ den \mathbb{R} -Vektorraum aller messbaren Funktionen auf X . Er ist ein Unterraum aller reellwertigen Funktionen auf X . Weiter notieren wir für jedes $f \in \mathcal{M}(X)$ und $c \geq 0$

$$M_c(f) := \{x \in X : |f(x)| > c\}.$$

Schließlich setzen wir für jedes $f \in \mathcal{M}(X)$

$$\|f\|_\infty := \inf\{c \geq 0 : \mu(M_c(f)) = 0\} \in [0, \infty].$$

Dann ist offenbar $f \in \mathcal{M}(X)$ genau dann in $\mathcal{L}^\infty(\mu)$, wenn $\|f\|_\infty < \infty$ ist, denn diese *Unendlich-Norm* ist offenbar genau dann gleich unendlich, wenn die Menge, über die das Infimum gebildet wird, leer ist, die Funktion also gerade nicht wesentlich beschränkt ist. (Die „Pseudonormen“ $\|\cdot\|_p$, für $p \in [0, \infty)$, hatten wir auch auf ganz $\mathcal{M}(X)$ erklärt und $f \in \mathcal{M}(X)$ ist genau dann in $\mathcal{L}^p(\mu)$, wenn $\|f\|_p < \infty$ ist.)

(a) (i) Für die Nullfunktion $0 \in \mathcal{M}(X)$ gilt offenbar $\|0\|_\infty = 0 < \infty$. Also ist $0 \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$.

(ii) Seien $f, g \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$. Dann gibt es also $c, d \in [0, \infty)$ mit

$$\mu(M_c(f)) = 0, \quad \mu(M_d(g)) = 0.$$

Sei nun $x \in M_{c+d}(f+g)$. Dann ist

$$c + d < |f+g|(x) = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|.$$

Daraus folgt

$$|f(x)| > c \quad \text{oder} \quad |g(x)| > d,$$

also $x \in M_c(f)$ oder $x \in M_d(g)$, d.i.: $M_{c+d}(f+g) \subseteq M_c(f) \cup M_d(g)$. Da aber $M_c(f) \cup M_d(g)$ eine Nullmenge ist, ist das also auch für $M_{c+d}(f+g)$ der Fall. Es ist also $\|f+g\|_\infty \leq c+d < \infty$.

(iii) Sei $f \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gibt es also ein $c \geq 0$ mit $\mu(M_c(f)) = 0$. Es folgt für $x \in M_{|\lambda|c}(\lambda f)$:

$$|\lambda|c < |\lambda f|(x) = |\lambda| \cdot |f(x)|,$$

also bei $\lambda \neq 0$ auch $|f(x)| > c$. Also ist $M_{|\lambda|c}(\lambda f) \subseteq M_c(f)$ und damit ist auch $M_{|\lambda|c}(\lambda f)$ eine Nullmenge. Es ist also $\|\lambda f\|_\infty \leq |\lambda|c < \infty$ und diese Ungleichungen gelten offenbar auch im Fall $\lambda = 0$.

Insgesamt ist damit also $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ ein Untervektorraum von $\mathcal{M}(X)$.

(b) Nach Definition der Menge $\{c \geq 0 : \mu(M_c(f)) = 0\}$ und der offensichtlichen Inklusion $M_c(f) \supseteq M_d(f)$, für alle $c \leq d$, ist für jedes $f \in \mathcal{M}(X)$ nach Definition des Infimums

$$\{c \geq 0 : \mu(M_c(f)) = 0\} = [\|f\|_\infty, \infty) \quad \text{oder} \quad \{c \geq 0 : \mu(M_c(f)) = 0\} = (\|f\|_\infty, \infty).$$

Wir zeigen zunächst mal, dass für $f \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$ immer der erste Fall eintritt, dass also dann das Infimum angenommen wird. Das sieht man daran, dass

$$M_{\|f\|_\infty}(f) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_{\|f\|_\infty + \frac{1}{n}}(f)$$

ist, denn ist $|f(x)| > \|f\|_\infty$ für ein $x \in X$, so gibt es auch ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $|f(x)| > \|f\|_\infty + \frac{1}{n}$ ist. Damit ist $M_{\|f\|_\infty}(f)$ abzählbare Vereinigung von Nullmengen und damit selbst eine Nullmenge. Das vereinfacht im Folgenden etwas die Argumentation.

(i) Seien nun $f, g \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$. Dann zeigt Teil (a.ii), dass dort mit $c = \|f\|_\infty$ und $d = \|g\|_\infty$ gilt:

$$\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

(ii) Sei nun $f \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann zeigt Teil (a.iii), dass $\|\lambda f\|_\infty \leq |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$ ist. Für $\lambda \neq 0$ bedeutet das aber auch

$$\|f\|_\infty = \left\| \frac{1}{\lambda}(\lambda f) \right\|_\infty \leq \left| \frac{1}{\lambda} \right| \cdot \|\lambda f\|_\infty$$

und damit $\|\lambda f\|_\infty \geq |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$. Also ist $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$ (und diese Gleichung gilt offenbar auch für $\lambda = 0$).

(iii) Ist nun $f \in \mathcal{N}(\mu)$, so ist offenbar $\|f\|_\infty = 0$, weil

$$M_0(f) = \{x \in X : |f(x)| > 0\}$$

eine Nullmenge ist. Ist umgekehrt $f \in \mathcal{M}(X)$ und $\|f\|_\infty = 0$, so muss also $M_0(f)$ eine Nullmenge sein, also ist $f \in \mathcal{N}(\mu)$. Für eine Äquivalenzklasse $[f] \in L^\infty(\mu)$ ist nun $\|[f]\|_\infty := \|f\|_\infty$ wohldefiniert, denn ist $g \in [f]$, so ist also $g - f \in \mathcal{N}(\mu)$ und daher

$$\|g\|_\infty = \|(g - f) + f\|_\infty \leq \|g - f\|_\infty + \|f\|_\infty = \|f\|_\infty$$

nach der Dreiecksungleichung aus (i), und aus Symmetriegründen muss dann auch $\|f\|_\infty \leq \|g\|_\infty$ und damit $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty$ sein. Die Homogenität von $\|\cdot\|_\infty: L^\infty(\mu) \rightarrow [0, \infty)$ und die Dreiecksungleichung folgen aus den Eigenschaften für $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ (siehe (i) und (ii)). Und ist $\|[f]\|_\infty = 0$, so ist wie gesehen $f \in \mathcal{N}(\mu)$, also $[f] = 0$ (und $\|0\|_\infty = 0$ sowieso). Daher ist $\|\cdot\|_\infty: L^\infty(\mu) \rightarrow [0, \infty)$ eine Norm auf $L^\infty(\mu)$.