Musterlösungen zur Integrations- und Maßtheorie

Aufgabe 29. Sei X ein Maßraum.

(a) Sei $f \in \mathcal{L}^1(X)$ und $g \in \mathcal{L}^\infty(X)$ (vgl. Aufgabe 28). Zeigen Sie, dass dann $f \cdot g \in \mathcal{L}^1(X)$ ist und die Hölderungleichung auch für die Fälle $p = 1$ und $q = \infty$ gilt:

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty.$$

(b) Zeigen Sie, dass auch $(L^\infty(X), \|\cdot\|_\infty)$ (vgl. Aufgabe 28) vollständig ist. (Hinweis: Vergleichen Sie auch die „Pfingstaufgabe“ (Aufgabe 32) aus Analysis-II.)

Lösungsvorschlag. **(a)** [**Vorbemerkung.** Ist $X = A \dot\cup B$ eine disjunkte Zerlegung von X in zwei messbare Teilmengen $A, B \subseteq X$, so gilt für jedes messbare $f\colon X \to [0,\infty]$:

$$\int_X f\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_B f\,d\mu,$$

denn $\chi_A + \chi_B$ ist offenbar die konstante Funktion 1 und damit $f = f\chi_A + f\chi_B$. Es folgt

$$\int_A f\,d\mu + \int_B f\,d\mu = \int f\chi_A\,d\mu + \int f\chi_B\,d\mu = \int f\chi_A + f\chi_B\;d\mu = \int f\,d\mu.$$

Für eine Nullmenge $M \subseteq X$ und jedem messbaren $f\colon X \to [0,\infty]$ ist $\int_M f\,d\mu = 0$, weil $f\chi_M = 0$ f.ü. ist. Es folgt, dass für jedes messbare $f\colon X \to [0,\infty]$ gilt:

$$\int f\,d\mu = \int_{X\setminus M} f\;d\mu.]$$

Seien nun $f \in \mathcal{L}^1(X)$ und $g \in \mathcal{L}^\infty(X)$. Wir setzen $M = \{x \in X : |g(x)| > \|g\|_\infty\}$. Dann wissen wir (aus dem Beweis von Aufgabe 28), dass M eine Nullmenge ist. Für alle $x \in X \setminus M$ ist nun $|g(x)| \leq \|g\|_\infty$ und daher

$$\int_X |fg|\,d\mu = \int_{X\setminus M} |fg|\,d\mu \leq \int_{X\setminus M} |f| \cdot \|g\|_\infty\,d\mu = \|g\|_\infty \int_{X\setminus M} |f|\,d\mu = \|g\|_\infty \int_X |f|\,d\mu.$$

Es folgt, dass $fg \in \mathcal{L}^1(\mu)$ ist und es gilt:

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty.$$

[**Anmerkung.** Die Ungleichung

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty$$

gilt auch für alle messbaren $f, g: X \to \overline{\mathbb{R}}$. Ist nämlich $\|f\|_1 = \infty$ oder $\|g\|_\infty = \infty$ und der andere Faktor nicht Null, so steht auf der rechten Seite ∞, und damit stimmt die Ungleichung. Ist $\|f\|_1 = 0$ oder $\|g\|_\infty = 0$, so ist $f = 0$ f.ü oder $g = 0$ f.ü, und damit stimmt die Ungleichung auch, weil auf beiden Seiten Null steht.]

(b) (i) Es reicht zu zeigen, dass jede Cauchy-Folge (f_n) in $\mathcal{L}^\infty(X)$ konvergiert. Ist nämlich (a_n) eine Cauchy-Folge in $L^\infty(X)$ und $f_n \in \mathcal{L}^\infty(X)$ eine Repräsentantenwahl, $a_n = [f_n]$ $(n \in \mathbb{N})$, so ist wegen $\|a_n - a_m\|_\infty = \|f_n - f_m\|_\infty$, für alle $m, n \in \mathbb{N}$, auch (f_n) eine Cauchy-Folge in $\mathcal{L}^\infty(X)$. Sei f ihr Grenzwert und $a := [f]$. Dann konvergiert (a_n) auch gegen a, denn $\|a_n - a\|_\infty = \|f_n - f\|_\infty$, für alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Sei also (f_n) eine Cauchy-Folge in $\mathcal{L}^\infty(X)$. Wir defnieren die messbaren Mengen A_n, B_{mn} und C in X durch

$$A_n := \{|f_n| > \|f_n\|_\infty\}, \quad B_{mn} := \{|f_n - f_m| > \|f_n - f_m\|_\infty\}$$

und

$$C := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \cup \bigcup_{m,n \in \mathbb{N}} B_{mn}.$$

Dann sind A_n und B_{mn} $(m, n \in \mathbb{N})$ Nullmengen (siehe Aufgabe 28) und damit auch C. Für alle $x \in X \setminus C$ und alle $m, n \in \mathbb{N}$ ist nun

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty,$$

und daher ist $(f_n(x))$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$. Diese konvergiert und wir können $f: X \to \mathbb{R}$ so definieren:

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} f_n(x) & \text{für} \quad x \in X \setminus C \\ 0 & \text{für} \quad x \in C \end{cases}.$$

Setzen wir noch $D := X \setminus C$, so stellen wir zunächst fest, dass f der punktweise Limes von $(f_n \chi_D)$ ist und damit messbar.

(iii) Die reelle Folge $(\|f_n\|_\infty)$ muss wegen

$$|\|f_n\|_\infty - \|f_m\|_\infty| \leq \|f_n - f_m\|_\infty$$

$(m, n \in \mathbb{N})$ auch eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ sein und ist damit insbesondere beschränkt. Sei $M > 0$ mit $\|f_n\|_\infty \leq M$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Für alle $x \in D$ ist nun

$$|f(x)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x)| \leq \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_\infty \leq M,$$

und damit ist $\{|f| > M\} = \emptyset$ (denn $f = 0$ auf $X \setminus D$). Es ist also $f \in \mathcal{L}^\infty(X)$.

(iv) Jetzt zeigen wir noch, dass $(f_n) \to f$ in $\mathcal{L}^\infty(X)$ konvergiert, also

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$$

ist. Sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann wählen wir zunächst ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m, n \geq n_0$ gilt:

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Danach wählen wir zu jedem $x \in D$ eine $N_x \geq n_0$ so, dass

$$|f_{N_x}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Jetzt folgt für alle $x \in D$ und $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= |(f_n(x) - f_{N_x}(x)) + (f_{N_x}(x) - f(x)| \\ &\leq |f_n(x) - f_{N_x}(x)| + |f_{N_x}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

und damit also $\|f_n \chi_D - f\|_\infty \leq \varepsilon$, für alle $n \geq n_0$, d.i.:

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n \chi_D - f\|_\infty = 0.$$

Die ∞-Norm bleibt unverändert bei Änderung der Funktion auf einer Nullmenge, wie wir aus Aufgabe 28 wissen, weshalb für alle messbaren $g\colon X \to \mathbb{R}$ gilt: $\|g\chi_D\|_\infty = \|g\|_\infty$. Das ergibt wegen $f = f\chi_D$:

$$0 = \lim_n \|f_n \chi_D - f\|_\infty = \lim_n \|f_n \chi_D - f\chi_D\|_\infty = \lim_n \|(f_n - f)\chi_D\|_\infty = \lim_n \|f_n - f\|_\infty.$$

Aufgabe 30. Sei (X, μ) ein Maßraum und $1 \leq p < q \leq \infty$.
(a) Sei $p < r < q$ und $\lambda \in (0, 1)$ durch die Bedingung $\frac{1}{r} = (1 - \lambda)\frac{1}{q} + \lambda \frac{1}{p}$ gegeben. Zeigen Sie: Ist $f \in \mathcal{L}^p(X) \cap \mathcal{L}^q(X)$, so ist $f \in \mathcal{L}^r(X)$ und es gilt:

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^\lambda \cdot \|f\|_q^{1-\lambda}.$$

(Hinweis: Wenden Sie Hölders Ungleichung auf geeignete Potenzen von $|f|$ an.)
(b) Sei nun $\mu(X) < \infty$ und $f \in \mathcal{L}^q(X)$. Zeigen Sie, dass dann $f \in \mathcal{L}^p(X)$ ist, für alle $1 \leq p \leq q$, und es gilt:

$$\|f\|_p \leq \mu(X)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \cdot \|f\|_q.$$

(Hinweis: Die konstante Funktion 1 ist jetzt in $\mathcal{L}^r$, für alle $r \in [1, \infty]$.)

Lösungsvorschlag. Wir können o.E. annehmen, dass $f \geq 0$ ist, denn sonst wenden wir die folgende Argumentation auf $|f|$ an. So sparen wir einige Betragsstriche.
(a) Zu gegebenen $1 \leq p < r < q \leq \infty$ gibt es genau ein $\lambda \in (0, 1)$ mit

$$\frac{1}{r} = (1 - \lambda)\frac{1}{q} + \lambda \frac{1}{p}$$

(auch im Fall $q = \infty$, wo diese Gleichung als $\frac{1}{r} = \lambda \frac{1}{p}$ zu lesen ist ($\frac{1}{\infty} = 0$)). Es folgt dann, dass

$$1 = \frac{r \cdot \lambda}{p} + \frac{r \cdot (1 - \lambda)}{q}$$

ist, insbesondere sind $\frac{p}{r\lambda} \geq 1$ und $\frac{q}{r(1-\lambda)} \geq 1$. Nun bedeutet $f \in \mathcal{L}^p(X)$ dasselbe, wie $f^{r\lambda} \in \mathcal{L}^{\frac{p}{r\lambda}}(X)$ und im Fall $q < \infty$ ist $f \in \mathcal{L}^q(X)$ gleichbedeutend mit $f^{r(1-\lambda)} \in \mathcal{L}^{\frac{q}{r(1-\lambda)}}(X)$. Im Fall $q = \infty$ ist $f \in \mathcal{L}^\infty(X)$ ebenfalls gleichbedeutend mit $f^{r(1-\lambda)} \in \mathcal{L}^\infty(X)$, da $\|f^{r(1-\lambda)}\|_\infty = \|f\|_\infty^{r(1-\lambda)}$ ist. Es ist nämlich für jede Potenz $s > 0$ und jedem $c > 0$: $\{|f| > c\} = \{[f|^s > c^s\}$. Die

Höldersche Ungleichung wenden wir nun auf $f^{r\lambda} \in \mathcal{L}^{\frac{p}{r\lambda}}(X)$ und $f^{r(1-\lambda)} \in \mathcal{L}^{\frac{q}{r(1-\lambda)}}(X)$ an und erhalten, dass $f^r = f^{r\lambda} \cdot f^{r(1-\lambda)} \in \mathcal{L}^1(X)$, also $f \in \mathcal{L}^r(X)$, ist, und es gilt:

$$\begin{aligned}
\|f\|_r &= (\|f^r\|_1)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\|f^{r\lambda}\|_{\frac{p}{r\lambda}} \cdot \|f^{r(1-\lambda)}\|_{\frac{q}{r(1-\lambda)}}\right)^{\frac{1}{r}} \\
&= \left[(\int (f^{r\lambda})^{\frac{p}{r\lambda}}\, d\mu)^{\frac{r\lambda}{p}} \cdot (\int (f^{r(1-\lambda)})^{\frac{q}{r(1-\lambda)}}\, d\mu)^{\frac{r(1-\lambda)}{q}}\right]^{\frac{1}{r}} \\
&= \left[\left((\int f^p\, d\mu)^{\frac{1}{p}}\right)^{r\lambda} \cdot \left((\int f^q\, d\mu)^{\frac{1}{q}}\right)^{r(1-\lambda)}\right]^{\frac{1}{r}} \\
&= \|f\|_p^\lambda \cdot \|f\|_q^{1-\lambda}.
\end{aligned}$$

(b) (i) Wir betrachten zunächst den Fall $q = \infty$. Ist $f \in \mathcal{L}^\infty(X)$, so ist auch $f^p \in \mathcal{L}^\infty(X)$, denn $\|f^p\|_\infty = \|f\|_\infty^p$ (vgl. das Argument dafür in Teil (a)). Wegen $\mu(X) < \infty$ ist nun die konstante Funktion 1 in $\mathcal{L}^1(X)$, und deshalb ist $f^p = 1 \cdot f^p$ nach Hölders Ungleichung (siehe Aufgabe 29.a) auch in $\mathcal{L}^1(X)$, also $f \in \mathcal{L}^p(X)$, und

$$\|f\|_p = (\|f^p\|_1)^{\frac{1}{p}} \leq (\|1\|_1 \cdot \|f^p\|_\infty)^{\frac{1}{p}} = \mu(X)^{\frac{1}{p}} \cdot (\|f\|_\infty^p)^{\frac{1}{p}} = \mu(X)^{\frac{1}{p}} \|f\|_\infty.$$

(ii) Sei jetzt $q < \infty$. Dann ist $p' := \frac{q}{p} \geq 1$. Setzen wir $q' \in [1, \infty]$ konjugiert zu p', d.h.

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = 1.$$

Nun ist $f \in \mathcal{L}^q(C)$, also $f^p \in \mathcal{L}^{p'}(X)$, und $1 \in \mathcal{L}^{q'}(X)$ und damit nach Hölders Ungleichung $f^p = 1 \cdot f^p \in \mathcal{L}^1(X)$, d.i. $f \in \mathcal{L}^p(X)$, mit

$$\|f\|_p = (\|f^p\|_1)^{\frac{1}{p}} \leq (\|1\|_{q'} \cdot \|f^p\|_{p'})^{\frac{1}{p}} = (\int 1^{q'}\, d\mu)^{\frac{1}{q'p}} \cdot (\int (f^p)^{p'}\, d\mu)^{\frac{1}{p'p}}.$$

Wegen

$$\frac{1}{q'p} = (1 - \frac{1}{p'})\frac{1}{p} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} \cdot \frac{p}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$$

und

$$p \cdot p' = p \cdot \frac{q}{p} = q$$

folgt:

$$\|f\|_p \leq \mu(X)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \cdot \|f\|_q.$$

[**Anmerkung.** Wie unter Aufgabe 29.a für die dortige Höldersche Ungleichung angemerkt, gelten die Formeln unter (a) und (b) in dieser Aufgabe auch für alle messbaren Funktionen f. Die Fälle, wo f nicht in $\mathcal{L}^q(X)$ oder $\mathcal{L}^p(X)$ ist, führen wie bei Aufgabe 29 dazu, dass auf der rechten Seite der Ungleichung ∞ steht oder auf beiden Seiten der Ungleichung Null. Die Aussagen, dass f in gewissen L^p-Räumen liegt, kann man dann auch als Konsequenz der Ungleichung lesen.]