Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose

WiSe 2020/21
11.01.2021
Blatt 09

Musterlösungen zur Integrations- und Maßtheorie

Aufgabe 31. Sei $\mathfrak{L}^1$ die Lebesgue-Algebra auf $\mathbb{R}$ und $\mathfrak{L}^2$ die Lebesgue-Algebra auf $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie:

(a) $\mathfrak{L}^1 \otimes \mathfrak{L}^1 \subseteq \mathfrak{L}^2$;

(b) $\mathfrak{L}^1 \otimes \mathfrak{L}^1 \neq \mathfrak{L}^2$. (Hinweis: Verwenden Sie ein $C \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}) \setminus \mathfrak{L}^1$.)

Lösungsvorschlag. (a) Seien $A_1, A_2 \in \mathfrak{L}^1$. Wir zeigen, dass $A_1 \times A_2 \in \mathfrak{L}^2$ ist. Da $\mathfrak{L}^2$ eine σ-Algebra ist und $\mathfrak{L}^1 \otimes \mathfrak{L}^1$ die kleinste σ-Algebra ist, die alle Produkte $A_1 \times A_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ (mit $A_1, A_2 \in \mathfrak{L}^1$) enthält, folgt dann: $\mathfrak{L}^1 \otimes \mathfrak{L}^1 \subseteq \mathfrak{L}^2$.

Da $\mathfrak{L}^1$ die Vervollständigung der Borelschen σ-Algebra $\mathfrak{B}^1$ auf $\mathbb{R}$ ist, existieren Borelsche Teilmengen B_1 und M_1 von $\mathbb{R}$ mit $\lambda^1(M_1) = 0$ und eine Teilmenge $N_1 \subseteq M_1$, so dass $A_1 = B_1 \cup N_1$ ist. λ^1 bzeichnet hier das Borel-Lebesguesche Maß auf der Borelalgebra $\mathfrak{B}^1$. Nun sind $B_1 \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$ und $M_1 \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$ Borelsch, d.h. in der Borelschen σ-Agebra $\mathfrak{B}^2 = \mathfrak{B}^1 \otimes \mathfrak{B}^1$ auf $\mathbb{R}^2$, und für das Borel-Lebesguesche Maß λ^2 auf $\mathfrak{B}^2$ gilt: $\lambda^2 = \lambda^1 \otimes \lambda^1$. Deshalb ist $M_1 \times \mathbb{R}$ eine Borelsche Nullmenge, denn

$$\lambda^2(M_1 \times \mathbb{R}) = \lambda^1 \otimes \lambda^1(M_1 \times \mathbb{R}) = \lambda^1(M_1) \cdot \lambda^1(\mathbb{R}) = 0 \cdot \infty = 0.$$

Nun ist $N_1 \times \mathbb{R} \subseteq M_1 \times \mathbb{R}$ und daher ist, wegen

$$A_1 \times \mathbb{R} = (B_1 \cup N_1) \times \mathbb{R} = B_1 \times \mathbb{R} \cup N_1 \times \mathbb{R},$$

$A_1 \times \mathbb{R}$ in der Vervollständigung von $\mathfrak{B}^2$ auf $\mathbb{R}^2$, d.i.: $A_1 \times \mathbb{R} \in \mathfrak{L}^2$.

Genauso ist (aus Symmetriegründen) auch $\mathbb{R} \times A_2 \in \mathfrak{L}^2$ und damit ist auch

$$A_1 \times A_2 = A_1 \times \mathbb{R} \cap \mathbb{R} \times A_2 \in \mathfrak{L}^2.$$

(Wir vereinbaren hier, dass „$\times$“ stärker bindet als „$\cup$“ und „$\cap$“.)

(b) Wir wissen bereits, dass $\mathfrak{L}^1 \neq \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ ist und wählen ein nicht-messbares $C \subseteq \mathbb{R}$, also $C \notin \mathfrak{L}^1$. Nun ist

$$D := C \times \{0\} \subseteq \mathbb{R} \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2,$$

und $\mathbb{R} \times \{0\}$ ist eine Borelsche Nullmenge. Das wissen wir bereits aus Aufgabe 13, können wir hier aber auch noch mal wegen $\lambda^2 = \lambda^1 \otimes \lambda^1$ (auf $\mathfrak{B}^2 = \mathfrak{B}^1 \otimes \mathfrak{B}^1$) sehen:

$$\lambda^2(\mathbb{R} \times \{0\}) = \lambda^1 \otimes \lambda^1(\mathbb{R} \times \{0\}) = \lambda^1(\mathbb{R}) \cdot \lambda^1(\{0\}) = \infty \cdot 0 = 0.$$

Damit liegt D in $\mathfrak{L}^2$, weil $\mathfrak{L}^2$ die Vervollständigung von $\mathfrak{B}^2$ ist.

Wäre nun andererseits D in $\mathfrak{L}^1 \otimes \mathfrak{L}^1$, so wäre auch der Schnitt von D mit $\{y = 0\}$,

$$D_0 = \{x \in \mathbb{R} : (x, 0) \in D\} = C,$$

in $\mathfrak{L}^1$, was er aber nicht ist. Es ist also $D \notin \mathfrak{L}^1 \otimes \mathfrak{L}^1$.

Aufgabe 32. Sei $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ die Borelsche σ-Algebra auf $\mathbb{R}$ und λ das Borel-Lebesguesche Maß auf $\mathfrak{B}$. Sei weiter $\mu\colon \mathfrak{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ das Zählmaß auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

(i) die Diagonale $\triangle = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = y\}$ in $\mathfrak{B} \otimes \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ liegt;

(ii) für jedes $x \in \mathbb{R}$ der Schnitt $\triangle_x \in \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ und für jedes $y \in \mathbb{R}$ der Schnitt $\triangle_y \in \mathfrak{B}$ liegt;

(iii) die Funktionen $s\colon \mathbb{R} \to [0, \infty]$, $s(x) = \mu(\triangle_x)$, und $t\colon \mathbb{R} \to [0, \infty]$, $t(y) = \lambda(\triangle_y)$, messbar sind;

(iv) aber gilt:

$$\int s \, d\lambda \neq \int t \, d\mu.$$

Wieso widerspricht das nicht dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Produktmaße?

Lösungsvorschlag. (i) Wir bezeichnen wie üblich mit $\mathfrak{B}^n$ die Borelsche σ-Algebra auf $\mathbb{R}^n$ $(n = 1, 2)$. Da

$$\mathfrak{B}^2 = \mathfrak{B}^1 \otimes \mathfrak{B}^1 \subseteq \mathfrak{B}^1 \otimes \mathfrak{P}(\mathbb{R})$$

ist, und die Diagonale $\triangle \subseteq \mathbb{R}^2$ abgeschlossen und damit Borelsch ist, folgt: $\triangle \in \mathfrak{B}^1 \otimes \mathfrak{P}(\mathbb{R})$.

(ii) Der Schnitt

$$\triangle_x = \{y \in \mathbb{R} : \ (x, y) \in \triangle\} = \{x\} \subseteq \mathbb{R}$$

ist als Teilmenge von $\mathbb{R}$ natürlich ein Element von $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$, für alle $x \in \mathbb{R}$. Der Schnitt

$$\triangle_y = \{x \in \mathbb{R} : \ (x, y) \in \triangle\} = \{y\} \subseteq \mathbb{R}$$

ist abgeschlossen und damit in $\mathfrak{B}^1$, für alle $y \in \mathbb{R}$. (Beachte hier, dass die Schreibweise für die Schnitte etwas verkürzt und damit vielleicht verwirrend ist. $\triangle_x$ liegt hier im 2. Faktor $\mathbb{R}$ von $\mathbb{R}^2$ und man sollte besser $\triangle_x^{(2)}$ schreiben. $\triangle_y$ liegt dagegen im 1. Faktor, so dass hier $\triangle_y^{(1)}$ besser wäre.)

(iii) Da nun also $\triangle_x = \{x\}$ und $\triangle_y = \{y\}$ ist, für alle $x, y \in \mathbb{R}$, ist

$$s\colon \mathbb{R} \to [0, \infty], \quad s(x) = \mu(\triangle_x) = \mu(\{x\}) = 1$$

und

$$t\colon \mathbb{R} \to [0, \infty], \quad t(x) = \lambda(\triangle_y) = \lambda(\{y\}) = 0.$$

Also sind s und t beide konstant und damit sicher messbar (s bzgl. $\mathfrak{B}$ und t bzgl. $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$).

(iv) Nun ist

$$\int t \, d\mu = \int 0 \, d\mu = 0,$$

aber

$$\int s \, d\lambda = \int 1 \, d\lambda = \lambda(\mathbb{R}) = \infty.$$

Also stimmen die beiden Integrale nicht überein.

Um hier kein Gegenbeispiel zum Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Produktmaße zu bekommen, kannn nur noch die Bedingung der σ-Endlichkeit der beiden beteiligten Maßräume nicht erfüllt sein. Dass aber $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, \lambda)$ σ-endlich ist, wissen wir schon. Bleibt damit nur noch, dass das Zählmaß μ auf $\mathbb{R}$ das Tripel $(\mathbb{R}, \mathfrak{P}(\mathbb{R}), \mu)$ nicht zu einem σ-endlichen Maßraum macht. Dafür ist die Aufgabe eigentlich schon ein Beweis. Man sieht das aber in der Tat auch direkt. Denn eine maß-endliche Teilmenge von $\mathbb{R}$ bedeutet für das Zählmaß, dass sie einfach endlich ist. Eine maß-endliche Ausschöpfung von $\mathbb{R}$ würde damit bedeuten, dass $\mathbb{R}$ eine abzählbare Vereinigung von endlichen Teilmengen wäre und damit wäre $\mathbb{R}$ abzählbar, was es aber nicht ist, wie wir es schon lange von Herrn Cantor gelernt haben. Kein Widerspruch also.