Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose

WiSe 2020/21
18.01.2021
Blatt 10

Musterlösungen zur Integrations- und Maßtheorie

Aufgabe 33. Sei $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und $f\colon X \to [0, \infty]$ eine messbare Funktion. Sei weiter λ das Borel-Lebesguesche Maß auf der Borel-Algebra $\mathfrak{B}$ von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass der *Subgraph von* f, d.i. die Teilmenge

$$G_f := \{(x, t) \in X \times \mathbb{R} : \ 0 \le t \le f(x)\} \subseteq X \times \mathbb{R},$$

in $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{P}(X \times \mathbb{R})$ ist und bezüglich des Produktmaßes $\mu \otimes \lambda$ auf $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ gilt:

$$\int f \, d\mu = \mu \otimes \lambda(G_f).$$

Lösungsvorschlag. (i) Die Abbildung $F\colon X \times \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$, $F(x, t) = f(x)$, ist $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$-messbar, denn für eine Borelmenge $B \subseteq \bar{\mathbb{R}}$ ist zunächst $f^{-1}(B) \in \mathfrak{A}$, da f messbar ist, und deshalb ist $F^{-1}(B) = f^{-1}(A) \times \mathbb{R} \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$. Auch $G\colon X \times \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$, $G(x, t) = t$, ist messbar, weil $g\colon \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$, $g(t) = t$, es ist. Nun ist mit $H := F - G : X \times \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$, $(x, t) \mapsto f(x) - t$,

$$G_f = H^{-1}([0, \infty]) \cap X \times [0, \infty) \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B},$$

weil mit F und G auch H $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$-messbar ist und $X \times [0, \infty) \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ ist. Also ist $G_f \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$.

(ii) Da neben μ auch das Borel-Lebesguesche Maß λ auf $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ σ-endlich ist, existiert das Produktmaß $\mu \otimes \lambda$ auf $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ und es erfüllt

$$\mu \otimes \lambda(G_f) = \int_X \lambda((G_f)_x) \, d\mu.$$

Der Schnitt $(G_f)_x \subseteq \mathbb{R}$ ist aber gerade

$$(G_f)_x = \{t \in \mathbb{R} : \ 0 \le t \le f(x)\} = [0, f(x)]$$

(bzw. $[0, \infty)$, falls $f(x) = \infty$ ist) und hat deshalb λ-Maß (wir sagen auch „Länge“)

$$\lambda((G_f)_x) = f(x).$$

Es folgt:

$$\mu \otimes \lambda(G_f) = \int_X f \, d\mu.$$

Aufgabe 34. (a) Sei K ein Kreiskegel mit einer Grundscheibe vom Radius $r > 0$ und Höhe $h > 0$. Berechnen Sie mit Cavalieries Prinzip das Volumen von K.

(b) Sei $f\colon [a,b] \to [0,\infty)$ stetig $(-\infty < a < b < \infty)$ und $K \subseteq [a,b] \times \mathbb{R}^2$ der Rotationskörper, der entsteht, wenn man den Graphen von f um die x-Achse rotiert,

$$K = \{(x,y,z) \in [a,b] \times \mathbb{R}^2 : \; y^2 + z^2 \leq f(x)^2\}.$$

Begründen Sie, warum $K \subseteq \mathbb{R}^3$ Borelsch ist und bzgl. des Borel-Lebesgueschen Maßes λ auf $\mathbb{R}^3$ gilt:

$$\lambda(K) = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx.$$

Lösungsvorschlag. (a) Wir legen die Koordinaten des Euklidischen Raumes so, dass die Spitze des Kreiskegels K im Nullpunkt und die Rotationsachse (die Verbindungslinie zwischen Kegelspitze und Mittelpunkt der Grundscheibe) die x-Achse ist. Dann ist K der Rotationskörper der stetigen Funktion $f\colon [0,h] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{r}{h} x$$

(siehe auch Teil (b)), d.h., wenn der Graph von f um die x-Achse rotiert:

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; 0 \leq x \leq h, \; y^2 + z^2 \leq (\frac{r}{h} x)^2\}.$$

Da $K \subseteq \mathbb{R}^3$ abgeschlossen ist, ist K auch Borelsch und damit λ^3-messbar. Der x-Schnitt von K ist dann eine Kreisscheibe vom Radius $\frac{r}{h} x \geq 0$, für $0 \leq x \leq h$, und hat daher λ^2-Maß (wir sagen auch „Flächeninhalt“)

$$\lambda^2(K_x) = \pi \cdot (\frac{r}{h} x)^2 = \frac{\pi r^2}{h^2} x^2.$$

Nach Cavalieris Prinzip hat daher K das λ^3-Maß (wir sagen auch das „Volumen“)

$$\lambda^3(K) = \int_{[0,h]} \lambda^2(K_x) \, d\lambda^1 = \int_0^h \frac{\pi r^2}{h^2} x^2 \, dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \left[\frac{1}{3} x^3\right]_0^h = \frac{1}{3} \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot h^3 = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

(b) Teil (a) ist ein Spezialfall von Teil (b), aber Teil (b) ist auch nicht wesentlich schwieriger. Als Urbild der abgeschlossenen Menge $[0,\infty) \subseteq \mathbb{R}$ unter der stetigen Funktion $F\colon [a,b] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x,y,z) = f(x)^2 - y^2 - z^2$, ist K auch abgeschlossen (und sogar kompakt, da auch beschränkt) und damit Borelsch. Der x-Schnitt von K für $x \in [a,b]$ ist eine Kreisscheibe vom Radius $f(x)$,

$$K_x = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : \; y^2 + z^2 \leq f(x)^2\},$$

und hat daher Flächeninhalt $\lambda^2(K_x) = \pi f(x)^2$. Nach Cavalieris Prinzip hat daher K das Volumen

$$\lambda^3(K) = \int_a^b \lambda^2(K_x) \, dx = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx,$$

denn die Funktion $[a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \lambda^2(K_x)$, ist stetig und daher kann man das Lebesgue-Integral über $[a,b]$ durch das Riemann-Integral von a bis b ersetzen.

[**Anmerkung.** Die „Wahl von Koordinaten im Euklidischen Raum“ kann man z.B. so verstehen: Zunächst sei $K \subseteq \mathbb{R}^3$ irgendein Kreiskegel (mit Grundflächeninhalt πr^2 und Höhe h) und wir nennen die Koordinaten von $\mathbb{R}^3$ mal $y = (y_1, y_2, y_3)$. Dann machen wir „einen euklidischen Koordinatenwechsel“, soll heißen: Wir betrachten ein affin-lineares $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$y = T(x) = Sx + b,$$

mit einem $S \in \mathbb{O}(3) \subseteq \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ (der orthogonalen Gruppe) und $b \in \mathbb{R}^3$. Man spricht auch von einer „Bewegung“. Diese kann man so einrichten, dass $T^{-1}(K)$ (also K in den neuen Koordinaten $x = (x_1, x_2, x_3)$ des Euklidischen Raumes) die angegebene Teilmenge als Rotationskörper um die x_1-Achse ist. Den Verschiebungsvektor $b \in \mathbb{R}^3$ setzt man dabei so, dass die Spitze des Kegels in den x-Koordinaten in den Nullpunkt fällt (d.h.: b ist einfach die Kegelspitze in den ursprünglichen y-Koordinaten). Dann bestimmt man den Verbindungsvektor von Kegelspitze zum Mittelpunkt der Grundscheibe (d.i. die Differenz dieser beiden Vektoren im y-Raum) und längt diesen dann auf die Länge 1 ab. Diesen Einheitsvektor schreibt man in die erste Spalte der Matrix S. Dann hat man etwas Freiheit und ergänzt diesen Vektor zu einer Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ (bezüglich des kanonischen Skalarproduktes, das Bestandteil des „Euklidischen Raumes“ ist) und schreibt diese beiden ergänzten Vektoren in die Spalten 2 und 3 von S und erhält so eine orthogonale Matrix S. Diese Bewegung überführt dann offenbar gerade den Rotationskörper aus dem Lösungsvorschlag nach K (nachdem man die neuen Koordinaten $x = (x_1, x_2, x_3)$ in $x := x_1$, $y := x_2$ und $z := x_3$ umbenannt hat). Nach der Transformationsformel für Isomorphismen (des Vektorraumes $\mathbb{R}^3$) und der Translationsinvarianz von λ^3 bleibt λ^3 sogar unter der Gruppe

$$G = \{T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \ T(x) = Sx + b, \ \text{mit } S \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}),\ b \in \mathbb{R}^3 \text{ und } |\det S| = 1\}$$

invariant und die Bewegungsgruppe $\mathrm{Bew}_3(\mathbb{R})$ aller Bewegungen ist eine Untergruppe von G. Es reicht daher das Volumen von $T^{-1}(K)$ (also K in den neuen Koordinaten) zu bestimmen.]

Aufgabe 35. Zeigen Sie, dass für das Volumen V eines Torus' T mit Radien $0 < r < R$ gilt:

$$V = 2\pi^2 r^2 R.$$

Lösungsvorschlag. (i) Wir machen ein kleine Vorbemerkung, die wir gleich (und in ähnlicher Form auch anderswo) gut gebrauchen können. Bei der Volumenberechnung des Rotationskörpers aus Aufgabe 34.b ist es egal, ob man in der Ungleichung „$\leq$“ oder „$<$“ verlangt, denn die *Mantelfläche*

$$M = \{(x, y, z) \in [a, b] \times \mathbb{R}^2 : \ y^2 + z^2 = f(x)^2\}$$

hat λ^3-Maß Null. Das kann man z.B. wiederum mit Cavalieri sehen. Dazu beobachten wir zunächst einmal, dass der Flächeninhalt $\lambda^2(\triangle)$ einer Kreisscheibe $\triangle \subseteq \mathbb{R}^2$ der gleiche ist, egal, ob man den Rand der Kreisscheibe, die Kreislinie, mit hinzunimmt oder nicht. Der Schnitt mit einer parallelen Geradenschar (die wir nach Koordinatenwahl als horizontal annehmen dürfen) besteht nämlich aus höchstens zwei Punkten und hat daher λ^1-Maß (Länge) Null. Nach Cavalieri ist damit eine Kreislinie im $\mathbb{R}^2$ eine λ^2-Nullmenge. Die x-Schnitte von M sind aber nun gerade Kreislinien, und daher folgt, dass M eine λ^3-Nullmenge ist.

(ii) Um nun das Volumen eines Torus' (Rettungsring oder auch Doughnut genannt) zu berechnen, legen wir zunächst unsere Koordinaten im Euklidischen Raum so, dass wir den Torus als einen Rotationskörper im Sinne von Aufgabe 34.b bekommen. (Zur Koordinatenwahl siehe auch die Anmerkung im Anschluss an Aufgabe 34.) Die Koordinaten entsprechend gewählt, bekommt man den Torus als Rotationsfläche um die x-Achse, wenn man die Kreisscheibe in der xy-Ebene mit Mittelpunkt $(0, R)$ und Radius r um die x-Achse rotieren lässt. Nun ist die Kreislinie

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + (y - R)^2 = r^2\}$$

nicht der Graph einer stetigen Funktion, weshalb wir nur den oberen Teil durch den Graphen von $f\colon [-r, r] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = R + \sqrt{r^2 - x^2}$ und den unteren Teil durch den Graphen von $g\colon [-r, r] \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = R - \sqrt{r^2 - x^2}$ beschreiben. Dann erhalten wir den Torus T als Differenzmenge

$$T = K_f \setminus \tilde{K_g},$$

wobei wir mit $K_f \subseteq \mathbb{R}^3$ den (abgeschlossenen) Rotationskörper aus 34.b zu f und mit $\tilde{K_g}$ den Rotationskörper ohne Mantelfläche zu g meinen. Da $\tilde{K_g} \subseteq K_f$ ist, wissen wir nach den Eigenschaften eines Maßes und der Vorbemerkung, dass $\lambda^3(\tilde{K_g}) = \lambda^3(K_g)$ ist:

$$\lambda^3(T) = \lambda^3(K_f) - \lambda^3(\tilde{K_g}) = \lambda^3(K_f) - \lambda^3(K_g) = \pi \int f^2(x) - g^2(x) \, dx.$$

Der Rest ist nun Routine:

$$f^2(x) - g^2(x) = 4R\sqrt{r^2 - x^2}.$$

Da dies eine gerade Funktion in r ist, reicht es, das Integral von 0 bis $+r$ zu nehmen, und dieses am Ende zu verdoppeln. Wir machen wegen der Wurzel noch die Substitution $\frac{x}{r} = \sin\varphi$, für $x \in [0, r]$, also $\varphi \in [0, \pi/2]$, und finden dann

$$\frac{dx}{d\varphi} = r\cos\varphi,$$

also

$$\int_0^r 4R\sqrt{r^2 - x^2} \, dx = 4Rr \int_0^r \sqrt{1 - (\frac{x}{r})^2} \, dx = 4Rr \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2\varphi} \cdot r\cos\varphi \, d\varphi.$$

Im Bereich $[0, \pi/2]$ ist aber $\sqrt{1 - \sin^2\varphi} = +\cos\varphi$, so dass wir

$$V = 2\pi \int_0^r 4R\sqrt{r^2 - x^2} \, dx = 8\pi r^2 R \int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi \, d\varphi$$

erhalten. Das Integral $\int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi \, d\varphi$ kann man mit partieller Integration schließlich schnell zu

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{4}$$

berechnen, so dass insgesamt tatsächlich folgt:

$$V = 2\pi^2 r^2 R.$$

Aufgabe 36. (a) Sei $K \subseteq \mathbb{R}^3$ kompakt mit $\overset{\circ}{K} \neq \emptyset$. ($\overset{\circ}{K}$ bezeichnet hier das Innere von K.) Begründen Sie, dass K Borelsch ist und für das Lebesguesche Maß $\lambda^3(K) = V$ gilt: $0 < V < \infty$.

(b) *Der Schwerpunkt* $S_K = (s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^3$ *eines Körpers* $K \subseteq \mathbb{R}^3$ (d.h.: K ist kompakt mit $\overset{\circ}{K} \neq \emptyset$) wird definiert durch ($\mathrm{vol}(K) := \lambda^3(K)$)

$$s_i := \frac{1}{\mathrm{vol}(K)} \int_K x_i \, dx \quad (i = 1, 2, 3).$$

Sei nun $S = S_{\mathbb{B}^3_+} = (s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^3$ der Schwerpunkt der oberen Halbkugel $\mathbb{B}^3_+ = \{x \in \mathbb{B}^3 : x_3 \geq 0\}$.

(i) Begründen Sie mit Hilfe der Transformationsformel für lineare Diffeomorphismen, dass $s_1 = s_2 = 0$ ist.

(ii) Berechnen Sie mit Hilfe von Tonellis Satz s_3.

Lösungsvorschlag. (a) Ist $K \subseteq \mathbb{R}^3$ beschränkt (insbesondere also, wenn K kompakt ist), so gibt es ein $R > 0$, so dass K Teilmenge des Würfels W_R mit Kantenlänge $2R$ ist, $W_R = [-R, R]^3$. Es folgt mit der Monotonie von λ^3:

$$\lambda^3(K) \leq \lambda^3(W_R) = (2R)^3 < \infty.$$

Ist $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und nicht-leer, so enthält U einen Würfel

$$W_\varepsilon(p) = \{x \in \mathbb{R}^3 : \; |x_j - p_j| \leq \varepsilon, \; j = 1, 2, 3\},$$

mit einem $p = (p_1, p_2, p_3) \in U$ und einem $\varepsilon > 0$. Wegen der Monotonie des Maßes folgt:

$$0 < (2\varepsilon)^3 = \lambda^3(W_\varepsilon(p)) \leq \lambda^3(U).$$

Ist nun K kompakt, so ist also einerseits $V = \lambda^3(K) < \infty$, und hat zudem K nicht-leeres Inneres, $\overset{\circ}{K} \neq \emptyset$, so ist, weil $\overset{\circ}{K} \subseteq K$ und $\overset{\circ}{K}$ offen ist, auch

$$\lambda^3(K) \geq \lambda^3(\overset{\circ}{K}) > 0.$$

(b) [**Vorbemerkung.** Der Schwerpunkt $S_K \in \mathbb{R}^3$ eines Körpers $K \subseteq \mathbb{R}^3$ ist wohldefiniert. Denn einerseits ist $\mathrm{vol}(K) \in (0, \infty)$ nach Teil (a), und andererseits ist eine stetige Funktion $f \colon K \to \mathbb{R}$ auf einem Kompaktum K auch Lebesgue-integrierbar, weil $|f|$ nach dem Satz von Weierstraß beschränkt ist. Ist nämlich etwa $|f| \leq c$, für ein $c > 0$, so ist

$$\int_K |f| \, dx \leq \int_K c \, dx = c \cdot \mathrm{vol}(K) < \infty,$$

also f integrierbar. Die Projektionen $\pi_i \colon K \to \mathbb{R}$, $\pi_i(x) = x_i$ $(i = 1, 2, 3)$, sind stetig und damit ist $S_K \in \mathbb{R}^3$ wohldefiniert.]

(i) „Aus Symmetriegründen“ muss der Schwerpunkt von $K = \mathbb{B}^3_+ = \{x \in \mathbb{B}^3 : x_3 \geq 0\}$ auf der x_3-Achse liegen. Dieses Argument können wir mit der Transformationsformel für lineare Diffeomorphismen so präzisieren: Sei $T \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Spiegelung an der x_2x_3-Ebene, also

$$T(y_1, y_2, y_3) = (-y_1, y_2, y_3) = (x_1, x_2, x_3).$$

Dann ist $\det T = -1$, also $|\det T| = 1$, und es ist $T(\mathbb{B}^3_+) = \mathbb{B}^3_+$, denn $y \in \mathbb{B}^3_+ \Leftrightarrow Ty \in \mathbb{B}^3_+$. Es ist deshalb mit $\pi_1(x) = x_1$:

$$\mathrm{vol}(\mathbb{B}^3_+) \cdot s_1 = \int_{\mathbb{B}^3_+} x_1\, dx = \int_{T^{-1}(\mathbb{B}^3_+)} \pi_1 \circ T(y) \cdot |\det T|\, dy = \int_{\mathbb{B}^3_+} -y_1\, dy = -\mathrm{vol}(\mathbb{B}^3_+) \cdot s_1,$$

und daher $s_1 = 0$. Mit der Spiegelung an der x_1x_3-Ebene argumentiert man genauso und erhält $s_2 = 0$. Man hat also nur die Symmetrie von $\mathbb{B}^3_+$ gegenüber diesen beiden Spiegelungen ausgenutzt.

(ii) An der x_1x_2-Ebene können wir nun nicht mehr spiegeln, da dies $\mathbb{B}^3_+$ nicht in sich überführt. (Das Argument würde aber zeigen, dass der Schwerpunkt von $\mathbb{B}^3$ im Mittelpunkt liegt. Na ja.) Ich denke, dass wir s_3 jetzt wirklich ausrechnen müssen. Das machen wir naheliegender Weise mit Tonellis Satz, in dem wir die π_3-Schnitte in x_3-Richtung betrachten. Für jedes $t \in [0, 1]$ ist nämlich $(\pi_3)_t \colon (\mathbb{B}^3_+)_t \to [0, \infty)$ konstant gleich t und

$$(\mathbb{B}^3_+)_t = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 + x_2^2 \leq 1 - t^2\},$$

also eine Kreisscheibe vom Radius $r(t) = \sqrt{1 - t^2}$, und hat daher Flächeninhalt

$$\lambda^2((\mathbb{B}^3_+)_t) = \pi r^2(t) = \pi(1 - t^2).$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(\mathbb{B}^3_+) \cdot s_3 &= \int_0^1 \left(\int_{(\mathbb{B}^3_+)_t} t\, dx_1 dx_2 \right) dt = \int_0^1 t \left(\int_{\mathbb{B}^3_+)_t} 1\, dx_1 dx_2 \right) dt \\
&= \int_0^1 t \cdot \pi(1 - t^2)\, dt = \pi \int_0^1 t - t^3\, dt = \pi \left[\frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{4} t^4 \right]_0^1 = \pi(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) = \frac{1}{4}\pi.
\end{aligned}$$

Mit dem halben Kugelvolumen

$$\mathrm{vol}(\mathbb{B}^3_+) = \frac{1}{2} \mathrm{vol}(\mathbb{B}^3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$$

folgt:

$$s_3 = \frac{\frac{1}{4}\pi}{\frac{2}{3}\pi} = \frac{3}{8}.$$