Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose

WiSe 2020/21
25.01.2021
Blatt 11

Musterlösungen zur Integrations- und Maßtheorie

Aufgabe 37. Wir betrachten die Kugelkoordinaten $\Phi\colon G \to \mathbb{R}^3$ mit $G = (0,1) \times (0,\pi) \times (0,2\pi)$ und

$$\Phi(r,\theta,\varphi) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta).$$

Wir benutzen von Aufgabe 44.b aus Analysis II, dass Φ injektiv ist.

(a) Berechnen Sie die Jacobische $J_\Phi\colon G \to [0,\infty)$, argumentieren Sie möglichst sauber mit dem Umkehrsatz, dass $D = \Phi(G)$ ein Gebiet ist, bestimmen Sie D und begründen Sie, warum $\Phi\colon G \to D$ ein Diffeomorphismus ist.

(b) Begründen Sie, warum $\mathbb{B}^3 \setminus D$ eine Borelsche Nullmenge ist. (Hint: Z.B. mit der Transformationsformel oder auch mit Cavalieri wie in der Musterlösung-10 von Aufgabe 35.)

(c) Zeigen Sie nun (erneut) mit Hilfe dieser Kugelkoordinaten, dass für das Volumen V der Einheitskugel $\mathbb{B}^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| \leq 1\}$ gilt:

$$V = \frac{4}{3}\pi.$$

Lösungsvorschlag. (a) Zunächst berechnen wir die Jacobi-Matrix von Φ in jedem Punkt $y = (r,\theta,\varphi) \in G$:

$$\mathrm{Jac}(\Phi)(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Zur Berechnung der Determinante entwickeln wir mit Laplace nach der letzten Spalte:

$$\begin{aligned}
&\det(\mathrm{Jac}(\Phi))(r,\theta,\varphi) = \\
&\qquad -r\sin\theta\sin\varphi(-r\sin^2\theta\sin\varphi - r\cos^2\theta\sin\varphi) \\
&\qquad -r\sin\theta\cos\varphi(-r\sin^2\theta\cos\varphi - r\cos^2\theta\cos\varphi) \\
&= r^2\sin\theta\sin^2\varphi(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + r^2\sin\theta\cos^2\varphi(\sin^2\theta+\cos^2\theta) \\
&= r^2\sin\theta(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = r^2\sin\theta.
\end{aligned}$$

Da sin auf dem Intervall $(0,\pi)$ positiv ist, erhalten wir also schließlich

$$J_\Phi(r,\theta,\varphi) = |\det(\mathrm{Jac}(\Phi))(r,\theta,\varphi)| = r^2\sin\theta > 0,$$

für alle $y = (r,\theta,\varphi) \in G$. Damit ist das Differential $D\Phi(y)$ in jedem Punkt $y = (r,\theta,\varphi) \in G$ invertierbar. Der Umkehrsatz liefert dann, dass $D = \Phi(G) \subseteq \mathbb{R}^3$ offen ist und dass Φ um jeden Punkt $y \in G$ *lokal* umkehrbar ist. Aber wir wissen schon, dass $\Phi\colon G \to \mathbb{R}^3$ injektiv und damit

$\Phi\colon G \to D$ bijektiv ist. Deshalb ist für jedes $x \in D$ und offenen Umgebungen $U \subseteq G$ von $y = \Phi^{-1}(x) \in G$ und $V \subseteq D$ von x, so dass $\Phi(U) = V$ und $\Phi|U\colon U \to V$ Diffeomorphismus ist:

$$(\Phi|U)^{-1} = \Phi^{-1}|V.$$

Deshalb ist Φ^{-1} auch stetig differenzierbar und damit $\Phi\colon G \to D$ ein *globaler* Diffeomorphismus. Da G wegzusammenhängend ist, ist es auch D und damit $D \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Gebiet.

Wegen $r \in (0, 1)$ ist

$$D \subseteq \{x \in \mathbb{B}^3 : \ 0 < \|x\| < 1\},$$

wegen $\varphi \in (0, 2\pi)$ ist mit

$$H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{B}^3 : \ x_2 = 0, \ x_1 \geq 0\}$$

$D \cap H = \emptyset$ und die Punkte, wo $\theta = 0$ bzw. $\theta = \pi$ ist (wenn man Φ auch dort durch die gleiche Vorschrift definieren würde), liegen auf der x_3-Achse und sind daher schon in der Halbebene H enthalten. Alle anderen Punkte aus $\mathbb{B}^3$ werden getroffen, so dass

$$D = \mathbb{B}^3 \setminus (\mathbb{S}^2 \cup H)$$

ist.

(b) Wir wissen bereits aus Aufgabe 13.b, dass H eine Nullmenge ist, da sie Teilmenge der Ebene $\{x_2 = 0\}$ ist. Dass auch die 2-Sphäre

$$\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ \|x\| = 1\}$$

eine Nullmenge ist, können wir wieder mit Cavalieri sehen. Es sind nämlich die Schnitte

$$\mathbb{S}^2_t = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ (x_1, x_2, t) \in \mathbb{S}^2\}$$

für $t \in (-1, 1)$ Kreislinien in $\mathbb{R}^2$ und damit Nullmengen (siehe auch die Anmerkung in der Musterlösung-10 von Aufgabe 35, wo Cavalieri noch mal angewendet wird), für $t = \pm 1$ ist der Schnitt ein Punkt, und für $|t| > 1$ ist er sogar leer. In allen Fällen ist er damit eine Nullmenge und deshalb $\mathbb{S}^2$ auch. Insgesamt ist damit $\mathbb{B}^3 \setminus D$ eine Nullmenge, daher $\lambda^3(\mathbb{B}^3) = \lambda^3(D)$ und wir können dann $\omega_3 = \lambda^3(\mathbb{B}^3)$ mit Hilfe der Transformationsformel zu

$$\omega_3 = \int_G J_\Phi(y)\, dy$$

berechnen.

(c) Um das zu tun, brauchen wir erneut eine Feinheit, die nun Nullmengen in $\bar{G}$ betrifft. Der Rand von G ist erneut eine Nullmenge, weil er aus sechs Teilen besteht, die jeweils in einer Ebene liegen. Die Funktion J_Φ hat auf $\bar{G}$ eine stetige Fortsetzung durch die gleiche Funktionsvorschrift $(r, \theta, \varphi) \mapsto r^2 \sin\theta$. Deshalb können wir nun J_Φ auch über $\bar{G}$ integrieren und dieses Integral nach Tonelli dann als ein dreifaches Integral in jeweils einer Variable einer stetigen Funktion über einem kompakten Intervall berechnen. Letztere sind dann aber Riemann-Integrale, die wir mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung endgültig ausrechnen können. Das machen wir jetzt noch:

$$\begin{aligned} V &= \int_G J_\Phi(y)\, dy = \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta \, dr d\theta d\varphi = (\int_0^{2\pi} d\varphi) \cdot (\int_0^1 r^2\, dr) \cdot (\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta) \\ &= 2\pi \cdot [\frac{1}{3} r^3]_0^1 \cdot [-\cos\theta]_0^\pi = 2\pi \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}\pi. \end{aligned}$$

Aufgabe 38. Wir betrachten nun die Polarkoordinaten $\Phi\colon G \to \mathbb{R}^2$ mit $G = (0,\infty) \times (0, 2\pi)$ und

$$\Phi(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

(a) Berechnen Sie die Jacobische J_Φ von Φ, das Bild $D \subseteq \mathbb{R}^2$ von Φ und begründen Sie, warum $\Phi\colon G \to D$ ein Diffeomorphismus ist.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe von Polarkoordinaten die Integrale

$$\int_{\mathbb{B}^2} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy, \qquad \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy,$$

und zeigen Sie mit Hilfe des 2. Integrals (erneut):

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Lösungsvorschlag. (a) Das ist ähnlich wie in Aufgabe 37.a, nur einfacher. Für die Jacobische von Φ finden wir

$$\Phi(r,\varphi) = |\det\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}| = |r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)| = r > 0.$$

Deshalb ist $D = \Phi(G)$ offen. Wir wissen von früher (siehe Aufgabe 44.a, Analysis-II), dass Φ injektiv ist und wegen des Umkehrsatzes ist Φ dann ein Diffeomorphismus auf sein Bild. Aus der Definition von Φ sieht man, dass $D = \mathbb{R}^2 \setminus H$ mit

$$H = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 :\ x_2 = 0,\ x_1 \geq 0\}$$

ist.

(b) Da H eine Nullmenge ist (und auch $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^2$), kann man die angegebenen Integrale mittels der Transformationsformel über $\tilde{G} := (0,1) \times (0,2\pi)$ bzw. über G berechnen bzw. sogar, ähnlich wie bei 37.b, die stetigen Fortsetzungen über $\bar{\tilde{G}}$ bzw. $\bar{G}$ und dann Tonellis Satz verwenden, und schließlich durch iterierte Riemann-Integrale ausrechnen.

(i)

$$I := \int_{\mathbb{B}^2} \exp(\sqrt{x^2+y^2})\,dxdy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \exp(r)\cdot r\,dr\,d\varphi = 2\pi \int_0^1 re^r\,dr.$$

Mit partieller Integration $u(r) = r$ und $v'(r) = e^r$ führt dies zu

$$\frac{1}{2\pi} I = [re^r]_0^1 - \int_0^1 e^r\,dr = e - [e^r]_0^1 = e - (e-1) = 1,$$

also

$$I = 2\pi.$$

(ii)

$$\begin{aligned} J \;&:=\; \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-x^2-y^2)\,dxdy = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-r^2}\cdot r\,dr\,d\varphi = 2\pi \int_0^\infty \frac{d}{dr}(-\frac{1}{2}e^{-r^2})\,dr \\ &=\; 2\pi[-\frac{1}{2}e^{-r^2}]_0^\infty = -\pi(0-1) = \pi. \end{aligned}$$

Mit Tonelli ist

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2 &= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\,dy\right) = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}e^{-y^2}\,dy\right)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}e^{-y^2}\,dx\right)dy = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = J,
\end{aligned}
$$

also

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Aufgabe 39. (a) Sei λ das Borel-Lebesguesche Maß auf $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$, $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein (achsenparalleler) Quader und sei $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie, dass es ein $r \in \mathbb{N}$ und (achsenparallele) Würfel $W_1, \ldots, W_r \subseteq \mathbb{R}^n$ gibt mit $Q \subseteq W_1 \cup \cdots \cup W_r$ und

$$\sum_{j=1}^{r} \lambda(W_j) < \lambda(Q) + \varepsilon.$$

(Hinweis: Prüfen Sie das zunächst für Quader mit rationalen Eckpunkten und approximieren Sie dann Q mit solchen von außen.)

(b) Zeigen Sie nun, dass man das äußere Lebesgue-Maß λ^* auf $\mathbb{R}^n$ auch mit Würfelüberdeckungen an Stelle von Quaderüberdeckungen definieren könnte, d.h.: für alle $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist

$$\lambda^*(A) = \inf\{\sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda(W_j) \in [0,\infty] : \ (W_j)_{j\in\mathbb{N}} \text{ ist eine Würfelüberdeckung von } A\}.$$

Lösungsvorschlag. (a) Sei also $Q = \prod_{j=1}^{n} I_j \subseteq \mathbb{R}^n$ ein (achsenparalleler) Quader. Da λ translationsinvariant ist, dürfen wir annehmen, dass die linke Intervallgrenze von I_j Null ist, also

$$Q = \prod_{j=1}^{n} [0, b_j].$$

Hier haben wir o.B.d.A. auch angenommen, dass Q abgeschlossen ist, da sich das Maß von Q nicht ändert, wenn Teile des Randes von Q nicht zu Q gehören.

(i) Sei zunächst $b_j \in \mathbb{Q}$, für alle $j = 1, \ldots, n$. Dann können wir sogar endlich viele Würfel $W_1, \ldots, W_r \subseteq \mathbb{R}^n$ finden, die Q überdecken und

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda(W_i) = \lambda(Q)$$

erfüllen. Wenn wir alle $b_j \geq 0$ nämlich auf einen gemeinsamen Hauptnenner $l \in \mathbb{N}$ bringen, dürfen wir also annehmen, dass $b_j = m_j/l$ mit $m_j \in \mathbb{N}_0$, für alle $j = 1, \ldots, n$, ist. Dann betrachten wir für jedes $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ mit $k_j \leq m_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ den Würfel

$$W_k := \prod_{j=1}^{n} [\frac{k_j - 1}{l}, \frac{k_j}{l}].$$

Diese haben alle Kantenlänge $1/l$ und damit Volumen $1/l^n$, und es gibt $m_1 \cdots m_n$ davon, so dass

$$\sum_k \lambda(W_k) = m_1 \cdots m_n \cdot \frac{1}{l^n} = \prod_{j=1}^n \frac{m_j}{l} = \prod_{j=1}^n b_j = \lambda(Q)$$

ist. Außerdem ist offenbar

$$Q = \bigcup_k W_k,$$

so dass also Q von $(W_k)_k$ überdeckt wird. (Die verschiedenen W_k's schneiden sich allenfalls in Nullmengen.)

(ii) Sei nun $b_j \in [0, \infty)$ beliebig ($j = 1, \dots, n$) und $\varepsilon > 0$ auch. Wir wählen für jedes $j = 1, \dots, n$ eine monoton fallende Folge rationaler Zahlen $(r_{jl})_{l \in \mathbb{N}}$, die gegen b_j konvergiert, $(r_{jl})_{l \in \mathbb{N}} \searrow b_j$. Dann betrachten wir für jedes $l \in \mathbb{N}$ den Quader

$$P_l := \prod_{j=1}^n [0, r_{jl}] \subseteq \mathbb{R}^n,$$

der nun offenbar rationale Eckpunkte hat. Es existiert nun ein $l_0 \in \mathbb{N}$, so dass mit $P_0 := P_{l_0}$

$$\lambda(P_0) - \lambda(Q) = \prod_{j=1}^n r_{jl_0} - \prod_{j=1}^n b_j < \varepsilon$$

ist, denn $(\prod_j r_{jl})_l$ konvergiert gegen $\prod_j b_j$. Nun gibt es nach Teil (i) Würfel $W_1, \dots, W_r$ ($r \in \mathbb{N}$), so dass $\bigcup_{i=1}^r W_i = P_0 \supseteq Q$ und

$$\sum_{i=1}^r \lambda(W_i) = \lambda(P_0) < \lambda(Q) + \varepsilon$$

ist.

(b) Da für jede Würfelüberdeckung $(W_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von $A \subseteq \mathbb{R}^n$ wegen $A \subseteq \bigcup_k W_k$ natürlich

$$\lambda^*(A) \leq \sum_k \lambda(W_k)$$

ist, reicht es zu zeigen, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Würfelüberdeckung (W_k) von A gibt mit

$$\sum_k \lambda(W_k) < \lambda^*(A) + \varepsilon.$$

Aber nach Defnition von $\lambda^*(A)$ gibt es eine Quaderüberdeckung $(Q_j)_{j \in \mathbb{N}}$ von A mit

$$\sum_j \lambda(Q_j) < \lambda^*(A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Für jedes $j \in \mathbb{N}$ finden wir nach Teil (a) eine Würfelüberdeckung $(W_{ji})_{i=1,\dots,r_j}$ (mit einem $r_j \in \mathbb{N}$), so dass

$$\sum_{i=1}^{r_j} \lambda(W_{ji}) < \lambda(Q_j) + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}.$$

Die abzählbare Würfelfamilie $(W_{ji})_{j\in\mathbb{N},i=1,\ldots,r_j}$ überdeckt dann A, denn

$$\bigcup_{j\in\mathbb{N}}\bigcup_{i=1}^{r_j} W_{ji} \supseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j \supseteq A,$$

und es gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{i=1}^{r_j}\lambda(W_{ji}) &< \sum_{j\in\mathbb{N}}(\lambda(Q_j)+\frac{\varepsilon}{2^{j+1}}) = \sum_{j\in\mathbb{N}}\lambda(Q_j)+\frac{1}{2}\varepsilon\sum_{j=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^j \\ &< (\lambda^*(A)+\frac{\varepsilon}{2})+\frac{\varepsilon}{2} = \lambda^*(A)+\varepsilon.\end{aligned}$$

Aufgabe 40. (a) Sei $N\subseteq\mathbb{R}^n$ eine Nullmenge (bzgl. des äußeren Lebesgue-Maßes auf $\mathbb{R}^n$) und $\varepsilon>0$. Zeigen Sie, dass es eine Kugelüberdeckung $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von N gibt mit $\sum_{k\in\mathbb{N}}\lambda(B_k)<\varepsilon$.

(b) Zeigen Sie, dass man das äußere Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$ auch mit Kugelüberdeckungen bekommt: Für alle $A\subseteq\mathbb{R}^n$ ist

$$\lambda^*(A) = \inf\{\sum_{j\in\mathbb{N}}\lambda(B_j)\in[0,\infty] :\ (B_j)_{j\in\mathbb{N}} \text{ ist eine Kugelüberdeckung von } A\}.$$

(Hinweis: Benutzen Sie das (noch unbewiesene) Lemma aus der Vorlesung, dass man einen Quader Q zu einem gegebenen $\varepsilon>0$ so mit einer Kugelüberdeckung $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Q versehen kann, dass $\sum_k\lambda(B_k)<\lambda(Q)+\varepsilon$ ist.)

Lösungsvorschlag. (a) Sei $W_0\subseteq\mathbb{R}^n$ der (abgeschlossene) Einheitswürfel (d.h.: mit Kantenlänge 1) und Mittelpunkt $0\in\mathbb{R}^n$,

$$W_0 = [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^n.$$

Die Umkugel von W ist dann die (abgeschlossene) Kugel B_0 mit Mittelpunkt $0\in\mathbb{R}^n$ und Radius

$$r_0 = \|(\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2})\| = \sqrt{n\cdot\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

Ihr Volumen ist

$$\mathrm{vol}(B_0) = \omega_n\cdot r_0^n = \frac{n^{n/2}}{2^n}\omega_n =: c_n,$$

wo $\omega_n\in\mathbb{R}_+$ das Volumen der Einheitskugel bezeichnet, $\omega_n=\mathrm{vol}(\mathbb{B}^n)$. Nach der Transformationsformel ist nun der Quotient

$$\frac{\mathrm{vol}(B)}{\mathrm{vol}(W)} = \frac{c_n}{1} = c_n$$

für *jeden* Würfel $W\subseteq\mathbb{R}^n$ und seiner Umkugel B der gleiche. Hat nämlich W die Kantenlänge $r>0$, so hat seine Umkugel den Radius $r\cdot r_0$, und damit ist

$$\mathrm{vol}(B) = \mathrm{vol}(B_0)r^n = c_n\mathrm{vol}(W)$$

(und der gemeinsame Mittelpunkt von W und B spielt wegen der Translationsinvarianz des Maßes sowieso keine Rolle dabei).

Ist nun $N \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge und $\varepsilon > 0$, so finden wir zunächst nach Aufgabe 39.b eine Würfelüberdeckung $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda(W_k) < \frac{1}{c_n}\varepsilon.$$

Für jedes W_k ($k \in \mathbb{N}$) betrachten wir dann seine Umkugel $B_k \supseteq W_k$. Dann ist auch $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Überdeckung von N und es gilt:

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda(B_k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} c_n\lambda(W_k) < c_n \cdot \frac{\varepsilon}{c_n} = \varepsilon.$$

(b) Das ist jetzt ähnlich wie in Aufgabe 39 (eigentlich genauso), nur dass es schwieriger ist, einen Quader volumensparsam mit Kugeln zu überdecken. Dieses Lemma aus der Vorlesung (welches wir vielleicht auf dem nächsten Übungsblatt noch mal betrachten) benutzen wir jetzt: Ist $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader und $\delta > 0$, so gibt es eine Kugelüberdeckung $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Q mit

$$\sum_k \lambda(B_k) < \lambda(Q) + \delta.$$

Dann können wir für jedes $A \subseteq \mathbb{R}^n$ wie in 39.b zu Ende argumentieren, dass A für jedes $\varepsilon > 0$ eine Kugelüberdeckung $(C_j)_{j\in\mathbb{N}}$ hat, so dass

$$\sum_j \lambda(C_j) < \lambda^*(A) + \varepsilon$$

ist. Das zeigt dann tatsächlich:

$$\lambda^*(A) = \inf\{\sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda(B_j) \in [0,\infty] : \ (B_j)_{j\in\mathbb{N}} \text{ ist eine Kugelüberdeckung von } A\}.$$