

Musterlösungen zur Integrations- und Maßtheorie

Aufgabe 41. Sei λ das Borel-Lebesguesche Maß auf \mathbb{R}^n ($n \in \mathbb{N}$).

(a) Seien $f, g \in \mathcal{L}^1(\lambda)$. Zeigen Sie, dass $\varphi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, t) \mapsto f(t)g(x - t)$, messbar und bzgl. $\lambda \otimes \lambda$ integrierbar ist und damit nach Fubinis Satz $f * g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$(f * g)(x) = \int f(t)g(x - t) d\lambda(t),$$

λ -fast überall definiert ist. Wir setzen $(f * g)(x) = 0$ für die $x \in \mathbb{R}^n$, wo diese Vorschrift nicht definiert ist, und nennen $f * g$ die *Faltung* von f und g . Begründen Sie, warum $f * g$ messbar ist und

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$$

gilt (und damit also $f * g \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ ist).

(b) Zeigen Sie, dass

$$*: L^1(\lambda) \times L^1(\lambda) \rightarrow L^1(\lambda), ([f], [g]) \mapsto [f * g]$$

wohldefiniert, \mathbb{R} -bilinear, assoziativ und kommutativ ist.

(Hinweis: Benutzen Sie Translationsinvarianz von λ und Tonellis Satz.)

Lösungsvorschlag. (a) Die Funktionen $\psi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$\psi(x, t) = x - t, \quad \pi(x, t) = t,$$

sind stetig und damit messbar. Deshalb ist auch $\varphi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\varphi(x, t) = f(t)g(x - t) = ((f \circ \pi) \cdot (g \circ \psi))(x, t)$$

messbar. Wegen der Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes oder direkt aus der Transformationsformel für die Translation $\tau_t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $y \mapsto y + t$ (bei festem $t \in \mathbb{R}^n$), die Jacobische gleich 1 hat, ist

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} g(x - t) d\lambda(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} g \circ \tau_{-t}(x) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g \circ \tau_{-t}(\tau_t(y)) \cdot J_{\tau_t}(y) d\lambda(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) d\lambda(y), \end{aligned}$$

und das Gleiche gilt für $|g|$ an Stelle von g . Deshalb schließen wir mit Tonellis Satz

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{2n}} |\varphi| d(\lambda \otimes \lambda) &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(t)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x - t)| d\lambda(x) \right) d\lambda(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(t)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| d\lambda(y) \right) d\lambda(t) = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 < \infty, \end{aligned}$$

also ist φ integrierbar. Deshalb folgt nun aus Fubinis Satz, dass $f * g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_x d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)g(x-t) d\lambda(t),$$

λ -fast-überall definiert ist. Setzt man $f * g$ gleich Null auf der Borelschen Nullmenge, wo sie nicht definiert sind (in diesem Fall ist das $+$ -Integral oder das $-$ -Integral unendlich), ist $f * g$ außerdem λ -integrierbar (insbesondere also messbar) mit

$$\begin{aligned} \|f * g\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_x d\lambda(t) \right| d\lambda(x) \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_x| d\lambda(t) \right) d\lambda(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} |\varphi| d(\lambda \otimes \lambda) = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1, \end{aligned}$$

wie gerade gesehen.

(b) (i) Seien $f, \tilde{f}, g, \tilde{g} \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ mit $f = \tilde{f}$ f.ü. und $g = \tilde{g}$ f.ü. Außerhalb einer Nullmenge $N \subseteq \mathbb{R}^n$ ist dann

$$f(x) = \tilde{f}(x), \quad g(x) = \tilde{g}(x),$$

und $(f * g)(x)$ und $(\tilde{f} * \tilde{g})(x)$ sind durch die Integralausdrücke gegeben. Mit N ist auch die Translation um x von $-N$ eine Nullmenge und deshalb ist

$$\begin{aligned} (\tilde{f} * \tilde{g})(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(t)\tilde{g}(x-t) d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}^n \setminus (N \cup \tau_x(-N))} \tilde{f}(t)\tilde{g}(x-t) d\lambda(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus (N \cup \tau_x(-N))} f(t)g(x-t) d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)g(x-t) d\lambda(t) = (f * g)(x). \end{aligned}$$

Es folgt: $[\tilde{f} * \tilde{g}] = [f * g]$, d.i.: $*$: $L^1 \times L^1 \rightarrow L^1$ ist wohldefiniert.

(ii) Seien $f_1, f_2, g \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ und $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Aufgrund der Linearität des Integrals folgt für alle $x \in \mathbb{R}^n$, wo $f_1 * g$ und $f_2 * g$ durch das Integral definiert sind:

$$\begin{aligned} a_1(f_1 * g)(x) + a_2(f_2 * g)(x) &= a_1 \int_{\mathbb{R}^n} f_1(t)g(x-t) d\lambda(t) + a_2 \int_{\mathbb{R}^n} f_2(t)g(x-t) d\lambda(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (a_1 f_1 + a_2 f_2)(t)g(x-t) d\lambda(t) = ((a_1 f_1 + a_2 f_2) * g)(x). \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung gilt, weil für den Fall, dass das Integral existiert (also die Integrale über die $+$ - und $-$ -Teile endlich sind), die Faltung auch durch das Integral gegeben ist. Da dieses Integral hier existiert, ist es also die Faltung zwischen $a_1 f_1 + a_2 f_2$ und g . Daraus folgt, dass $*$ im ersten Argument bilinear ist und für das zweite Argument argumentiert man völlig analog oder benutzt die nun folgende Kommutativität von $*$.

(iii) Seien $f, g \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ und $x \in \mathbb{R}^n$ derart, dass $g * f$ in x durch das Faltungsintegral gegeben ist. Wir betrachten dann den affinen Diffeomorphismus $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, der durch

$$t = \Phi(s) = x - s$$

(bei festem x) gegeben ist. Dieser hat offenbar Jacobische $J_\Phi(s) = |\det D\Phi(s)| = 1$ und daher gilt:

$$\begin{aligned} (g * f)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} g(t)f(x-t) d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}^n} g \circ \Phi(s) \cdot f(x - \Phi(s)) \cdot J_\Phi(s) d\lambda(s) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(x-s) \cdot f(s) d\lambda(s) = (f * g)(x). \end{aligned}$$

Es ist also

$$[f] * [g] = [g] * [f], \quad \forall [f], [g] \in \mathcal{L}^1(\lambda).$$

(iv) Seien nun $f, g, h \in \mathcal{L}^1(\lambda)$. Wir betrachten jetzt mal die Funktion $\alpha: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\alpha(x, u, v) = h(u)g(v)f(x - u - v).$$

Dann argumentiert man wie unter (a), dass α messbar und sogar integrierbar bzgl. $\lambda \otimes \lambda \otimes \lambda$ ist mit

$$\|\alpha\|_1 = \int_{\mathbb{R}^{3n}} |\alpha| d(\lambda \otimes \lambda \otimes \lambda) = \|h\|_1 \cdot \|g\|_1 \cdot \|f\|_1 < \infty.$$

Deshalb ist nun der Schnitt

$$\alpha_x: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad (u, v) \mapsto h(u)g(v)f(x - u - v)$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ integrierbar. Wir nennen die Nullmenge, wo $\|\alpha_x\|_1 = \infty$ ist, N und betrachten ein $x \in \mathbb{R}^n \setminus N$. Zu diesem x betrachten wir nun weiter den affinen Diffeomorphismus $\Phi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, gegeben durch

$$(u, v) = \Phi(s, t) = (x - s - t, t).$$

Dann ist

$$D\Phi(s, t) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und daher

$$J_\Phi(s, t) = |\det D\Phi(s, t)| = 1,$$

für alle $(s, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Nun erhalten wir mit Fubini einerseits:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \alpha_x d(\lambda \otimes \lambda) &= \int_{\mathbb{R}^n} h(u) \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(v) f(x - u - v) d\lambda(v) \right) d\lambda(u) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} h(u) \cdot (g * f)(x - u) d\lambda(u) = (h * (g * f))(x). \end{aligned}$$

(x ist also auch ein Punkt, wo $h * (g * f)$ durch das Faltungsintegral gegeben ist.) Andererseits ist mit der Transformationsformel nun auch $\alpha_x \circ \Phi \cdot J_\Phi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und erneut mit Fubini erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \alpha_x d(\lambda \otimes \lambda) &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} (\alpha_x \circ \Phi) \cdot J_\Phi(s, t) d\lambda(s) d\lambda(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} h(x - s - t) g(t) f(s) d\lambda(s) d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(s) \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(t) h(x - s - t) d\lambda(t) \right) d\lambda(s) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(s) (g * h)(x - s) d\lambda(s) = (f * (g * h))(x) \end{aligned}$$

(was zeigt, dass auch $f * (g * h)$ in solch einem x durch das Faltungsintegral gegeben ist). Nach Teil (iii) ist dann also

$$(f * (g * h))(x) = (h * (g * f))(x) = ((f * g) * h)(x),$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ und daher schließlich für alle $[f], [g], [h] \in L^1(\lambda)$:

$$[f] * ([g] * [h]) = ([f] * [g]) * [h].$$

[**Anmerkung.** Die Faltung von f und g in einem (generischen) Punkt $x \in \mathbb{R}^n$,

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)g(x-t) d\lambda(t),$$

kann man als eine *Mittelung* von g um den Punkt x mit den Gewichten $f(t)$ ansehen. Hat etwa f einen Träger nur in einer ε -Kugel um 0 (d.h.: $f(t) = 0$ für $|t| > \varepsilon$), so mittelt $(f * g)(x)$ die Werte von g in einer ε -Kugel um x (mit den Gewichten $f(t)$). Auf diese Weise kann ein $g \in \mathcal{L}^p(\lambda)$ ($1 \leq p < \infty$) durch ein $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ (eine \mathcal{C}^∞ -Funktion mit kompaktem Träger) auch *geglättet* werden und wenn f_ε Träger in $B_\varepsilon(0)$ hat, so ist $f_\varepsilon * g$ nicht nur *glatt* (d.h. \mathcal{C}^∞) sondern konvergiert (bei geschickter Wahl) für $\varepsilon \rightarrow 0$ auch noch in der L^p -Norm gegen g . Das zeigt, dass $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$ liegt. Da auch $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ dicht liegt, also sogar $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$ ist, ist damit $L^p(\mathbb{R}^n)$ die Vervollständigung von $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ bzgl. der L^p -Norm, so wie \mathbb{R} die Vervollständigung von \mathbb{Q} bzgl. $|\cdot|$ ist.]

Für die folgenden drei Aufgaben benutzen wir folgenden Satz aus der Funktionalanalysis:

Satz (von Stone-Weierstraß). Sei (K, d) ein kompakter metrischer Raum und $(\mathcal{C}(K, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ die Banach-Algebra der stetigen Funktionen auf K (siehe auch Aufgabe 35.b, Analysis-II). Sei weiter $A \subseteq \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ eine Unteralgebra, so dass

- für jedes $x \in K$ ein $f \in A$ mit $f(x) \neq 0$ existiert und
- für jedes Paar $(x, y) \in K \times K$ mit $x \neq y$ ein $g \in A$ existiert mit $g(x) \neq g(y)$.

Dann liegt A dicht in $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$.

Aufgabe 42. Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und $f: K \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig ($m, n \in \mathbb{N}$). Zeigen Sie, dass es eine Folge (P_k) stetig differenzierbarer Funktionen $P_k: K \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($k \in \mathbb{N}$) gibt, die gleichmäßig gegen f konvergiert. (Hinweis: Versuchen Sie es mit polynomialen Abbildungen.)

Lösungsvorschlag. (i) Wir betrachten die *polynomialen Abbildungen auf K* , d.i.

$$A := \{f \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R}) : \exists p \in \mathbb{R}[T_1, \dots, T_n] : f(x) = p(x), \forall x \in K\}.$$

Das ist zunächst einmal eine Unteralgebra von $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$, denn $\mathbb{R}[T_1, \dots, T_n]$ ist selbst eine \mathbb{R} -Algebra, die auf diese Weise homomorph auf A abgebildet wird. Die konstante Funktion $h = 1$ liegt offenbar in A , und A *trennt auch Punkte*, wie man sagt, d.h.: Sind $x, y \in K$ mit $x \neq y$, so gibt es zunächst mal ein $j_0 \in \{1, \dots, n\}$ mit $x_{j_0} \neq y_{j_0}$. Die Projektion $\pi_{j_0}: K \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x_{j_0}$, liegt in A und es ist

$$\pi_{j_0}(x) = x_{j_0} \neq y_{j_0} = \pi_{j_0}(y).$$

Deshalb sind die Voraussetzungen des Satzes von Stone-Weierstraß erfüllt und damit liegt A dicht in $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$. D.h.: Für jedes stetige $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ gibt es eine Folge (p_k) in A mit $(p_k) \rightarrow f$ in der Supremumsnorm, d.i.: (p_k) konvergiert gleichmäßig gegen f .

(ii) Ist nun $f: K \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig (aber vektorwertig), so wendet man dieses Resultat auf die Komponenten $f_i: K \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, m$) an. Es gibt also Folgen $(p_{ik})_{k \in \mathbb{N}}$, so dass $(p_{ik})_k$ gleichmäßig gegen f_i konvergiert (für $i = 1, \dots, m$). Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es also $k_i \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \geq k_i$ und alle $x \in K$ gilt:

$$|p_{ik}(x) - f_i(x)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}.$$

Wir setzen nun

$$p_k: K \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad p_k = (p_{1k}, \dots, p_{mk}).$$

Dann gilt für alle $k \geq k_0 := \max_{i=1}^m k_i$ und $x \in K$:

$$\|p_k(x) - f(x)\|^2 = \sum_{i=1}^m (p_{ik}(x) - f_i(x))^2 < \sum_{i=1}^m \frac{\varepsilon^2}{m} = \varepsilon^2.$$

Das zeigt, dass (p_k) gleichmäßig gegen f konvergiert.

Aufgabe 43. Sei $F: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld ($n \in \mathbb{N}$).

(a) Zeigen Sie, dass es eine Folge (Q_k) stetig differenzierbarer Vektorfelder auf \mathbb{S}^{n-1} gibt, die gleichmäßig gegen F konvergiert.

(b) (Igelsatz) Sei nun n ungerade. Zeigen Sie, dass F eine Nullstelle hat.

Lösungsvorschlag. (a) Wir können $F: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ zunächst nach Aufgabe 42 durch eine Folge $(P_k: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n)_k$ stetig differenzierbarer Abbildungen gleichmäßig approximieren, denn \mathbb{S}^{n-1} ist kompakt. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $k_0 = k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \geq k_0$ und $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ gilt:

$$\|P_k(x) - F(x)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nun sind die Abbildungen P_k ($k \in \mathbb{N}$) i.a. keine Vektorfelder auf \mathbb{S}^{n-1} . Deshalb ziehen wir von $P_k(x) \in \mathbb{R}^n$ die radiale Komponente ab und setzen also $Q_k: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$Q_k(x) = P_k(x) - \langle P_k(x), x \rangle \cdot x$$

(wo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das kanonische Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n bezeichne). Die Abbildungen Q_k ($k \in \mathbb{N}$) sind dann auch stetig differenzierbar und sie sind nun auch Vektorfelder auf \mathbb{S}^{n-1} , denn für alle $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ ist

$$\langle Q_k(x), x \rangle = \langle P_k(x), x \rangle - \langle \langle P_k(x), x \rangle \cdot x, x \rangle = \langle P_k(x), x \rangle - \langle P_k(x), x \rangle \cdot \|x\|^2 = 0,$$

denn $\|x\|^2 = 1$ für $x \in \mathbb{S}^{n-1}$. Und auch (Q_k) konvergiert gleichmäßig gegen f , denn zu $\varepsilon > 0$ und dem $k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ von oben gilt nun wegen $\langle F(x), x \rangle = 0$ für alle $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ und $k \geq k_0$:

$$\begin{aligned} \|Q_k(x) - F(x)\| &= \|(P_k(x) - \langle P_k(x), x \rangle x) - F(x)\| \leq \|P_k(x) - F(x)\| + \|\langle P_k(x), x \rangle x\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + |\langle P_k(x), x \rangle| \cdot \|x\| = \frac{\varepsilon}{2} + |\langle P_k(x) - F(x), x \rangle| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \|P_k(x) - F(x)\| \cdot \|x\| \end{aligned}$$

nach Cauchy-Schwarz und daher tatsächlich wegen $\|x\| = 1$:

$$\|Q_k(x) - F(x)\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot 1 = \varepsilon,$$

für alle $k \geq k_0$ und für alle $x \in \mathbb{S}^{n-1}$.

(b) Wir beweisen zunächst ein kleines

Lemma. Sei X ein metrischer Raum und $(f_k: X \rightarrow \mathbb{R})_k$ eine Folge stetiger Funktionen, die gleichmäßig gegen ein (dann auch stetiges) $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert, $(f_k) \xrightarrow{\text{glm.}} f$. Sei weiter $a \in X$ und $(x_k)_k$ eine Folge in X mit $(x_k) \rightarrow a$. Dann konvergiert auch die Folge $(f_k(x_k))$ in \mathbb{R} und es gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x_k) = f(a).$$

Denn: Ist $\varepsilon > 0$, so wählen wir einerseits ein $k_1 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \geq k_1$ und allen $x \in X$

$$|f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Andererseits können wir wegen der Stetigkeit von f in a ein $\delta > 0$ finden, so dass für alle $x \in X$ mit $d(x, a) < \delta$ (wo d die Metrik auf X bezeichne) gilt:

$$|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Schließlich gibt es wegen $(x_k) \rightarrow a$ ein $k_2 \in \mathbb{N}$, so dass für $k \geq k_2$ gilt: $d(x_k, a) < \delta$. Für alle $k \geq k_0 := \max\{k_1, k_2\}$ ist dann

$$|f_k(x_k) - f(a)| \leq |f_k(x_k) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

also

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x_k) = f(a).$$

□

Hieraus folgt nun der Igelsatz, den wir für stetig differenzierbare Vektorfelder $Q: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ schon in der Vorlesung bewiesen haben, auch für beliebige stetige Vektorfelder $F: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Sei dazu also nun n ungerade.

Wir approximieren nämlich F zunächst gleichmäßig durch stetig differenzierbare Vektorfelder Q_k ($k \in \mathbb{N}$). Diese haben dann jeweils eine Nullstelle $x_k \in \mathbb{S}^{n-1}$. Da \mathbb{S}^{n-1} kompakt ist, hat die Folge (x_k) einen Häufungspunkt $a \in \mathbb{S}^{n-1}$. Nach Übergang zu einer Teilfolge von (x_k) dürfen wir annehmen, dass (x_k) gegen a konvergiert. Dann können wir das Lemma (mit der auf \mathbb{S}^{n-1} induzierten Metrik) anwenden und erhalten:

$$F(a) = \lim_{k \rightarrow \infty} Q_k(x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

Aufgabe 44. (a) (Brouwers Fixpunktsatz) Sei $f: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$ stetig ($n \in \mathbb{N}$). Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt hat. (Hinweis: Approximieren Sie f mit stetig differenzierbaren Abbildungen $g_k: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und skalieren Sie geschickt um, so dass $g_k(\mathbb{B}^n) \subseteq \mathbb{B}^n$ ist.)

(b) (Retraktionssatz) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass es keine Retraktion $r: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ (also r stetig mit $r \circ i = \text{id}$, wo $i: \mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{B}^n$ die Inklusion ist) gibt. (Hinweis: Bauen Sie aus einer angenommenen Retraktion r ein fixpunktfreies $f: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$.)

Lösungsvorschlag. (a) Wir approximieren auch hier unser stetiges $f: B \rightarrow B$ ($B := \mathbb{B}^n$) gleichmäßig durch stetig differenzierbare $g_k: B \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($k \in \mathbb{N}$). Nun bildet i.a. aber g_k die Einheitskugel B nicht wieder in B ab, sondern in eine evtl. (etwas) größere Kugel mit Radius

$$r_k = \|g_k\|_\infty = \sup_{x \in B} \|g_k(x)\| < \infty,$$

da B kompakt ist. Um nun f auch gleichmäßig durch stetig differenzierbare $h_k: B \rightarrow B$ zu approximieren, skalieren wir g_k um, wie man sagt, d.h.; wir setzen $h_k: B \rightarrow B$,

$$h_k := \rho_k g_k,$$

mit (Skalierungs-) Faktoren $\rho_k > 0$ ($k \in \mathbb{N}$). Wenn $\|g_k\|_\infty \leq 1$ ist, brauchen wir nichts zu machen (also $\rho_k := 1$ dann), ansonsten setzen wir $\rho_k := 1/\|g_k\|_\infty \leq 1$, also zusammen

$$\rho_k := \frac{1}{\max\{1, \|g_k\|_\infty\}} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Es ist dann natürlich auch h_k stetig differenzierbar und $h_k(B) \subseteq B$ ($k \in \mathbb{N}$), denn für alle $x \in B$ ist

$$\|h_k(x)\| = \frac{1}{\max\{1, \|g_k\|_\infty\}} \|g_k(x)\| \leq 1$$

nach Konstruktion. Man beachte auch noch, dass $(\rho_k) \rightarrow 1$ für $k \rightarrow \infty$ konvergiert, denn

$$\|\|g_k\|_\infty - \|f\|_\infty\| \leq \|g_k - f\|_\infty \rightarrow 0,$$

also $(\|g_k\|_\infty) \rightarrow \|f\|_\infty$. Da $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \max\{1, t\}$, stetig und $\|f\|_\infty \leq 1$ ist, gilt in der Tat

$$\max\{1, \|g_k\|_\infty\} \rightarrow \max\{1, \|f\|_\infty\} = 1.$$

Daraus sieht man jetzt, dass auch (h_k) gleichmäßig gegen f konvergiert, denn

$$\begin{aligned} \|h_k - f\|_\infty &\leq \|h_k - g_k\|_\infty + \|g_k - f\|_\infty = \|(\rho_k - 1) \cdot g_k\|_\infty + \|g_k - f\|_\infty \\ &= |\rho_k - 1| \cdot \|g_k\|_\infty + \|g_k - f\|_\infty \rightarrow 0 \cdot \|f\|_\infty + 0 = 0. \end{aligned}$$

Mit unserem kleinen Lemma aus Aufgabe 43 sieht man daraus jetzt auch den Brouwerschen Fixpunktsatz für stetige Selbstabbildungen $f: B \rightarrow B$. Wir approximieren f gleichmäßig durch stetig differenzierbare $h_k: B \rightarrow B$ ($k \in \mathbb{N}$). Diese haben einen Fixpunkt $x_k \in B$ nach dem Satz aus der Vorlesung, und da B kompakt ist, können wir nach einem eventuellen Übergang zu einer Teilfolge annehmen, dass (x_k) gegen einen Punkt $a \in B$ konvergiert, $(x_k) \rightarrow a$. Wegen $h_k(x_k) = x_k$, für alle $k \in \mathbb{N}$, erhalten wir deshalb

$$f(a) = \lim_{k \rightarrow \infty} h_k(x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a.$$

Also ist a Fixpunkt von f .

(b) Brouwers Fixpunktsatz und Retraktionssatz sind äquivalent. In der Vorlesung haben wir gesehen, warum der Retraktionssatz den Fixpunktsatz impliziert, denn der dortige Beweis funktioniert auch für den stetigen Fall. Die Umkehrung kann man so sehen: Wir nehmen (nach Teil (a)) an, dass der Fixpunktsatz gilt. Angenommen nun weiter, dass es eine Retraktion $r: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ gibt. Da $\mathbb{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{B}^n$ ist, ist dies auch eine Abbildung von \mathbb{B}^n nach \mathbb{B}^n . Die inneren

Punkte von \mathbb{B}^n , dort, wo $\|x\| < 1$ ist, können keine Fixpunkte von r sein, denn r bildet sie ja auf den Rand ab, $\|r(x)\| = 1$. Die Randpunkte, also dort, wo $\|x\| = 1$ ist, sind allerdings *alles* Fixpunkte von r , $r(x) = x$, für alle $x \in \mathbb{S}^{n-1}$. Deshalb schalten wir jetzt noch *die Antipodenabbildung* $d: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$, $d(x) = -x$, dahinter, setzen also $f: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$, $f := d \circ r$. Das Argument dafür, dass r keine Fixpunkte im Inneren hat, bleibt dann auch für f erhalten, und die Randpunkte sind nun auch nicht mehr fix. Dieses f hat dann also keinen Fixpunkt. Widerspruch! Es gibt also keine (stetige) Retraktion $r: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$.