Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose

WiSe 2020/21
08.02.2021
Blatt 13

Musterlösungen zur Integrations- und Maßtheorie

Aufgabe 45. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $s \in [0, \infty)$. Für jedes $\delta > 0$ und jede Teilmenge $A \subseteq X$ setzen wir

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^s_\delta(A) \quad &:= \quad \inf\{\sum_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{diam}(C_k)^s \in [0, \infty] : \ (C_k)_k \text{ ist eine Überdeckung von } A \\ &\qquad \text{mit } \operatorname{diam}(C_k) < \delta, \ \forall k \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

($\operatorname{diam}(C) = \sup\{d(x, y) \in [0, \infty) : x, y \in C\} \in [0, \infty]$ bezeichnet hier *den Durchmesser von* $\emptyset \neq C \subseteq X$, $\operatorname{diam}(\emptyset)^s := 0 \ \forall s \geq 0$.) Schließlich sei

$$\mathcal{H}^s(A) = \sup_{\delta>0} \mathcal{H}^s_\delta(A) \in [0, \infty].$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{H}^s$ ein äußeres Maß auf X ist. (Man nennt $\mathcal{H}^s$ (bis auf einen Faktor) *das s-dimensionale äußere Hausdorff-Maß auf X*.)

Lösungsvorschlag. (i) Zunächst zeigen wir (eigentlich genau so, wie in der Vorlesung), dass $\mathcal{H}^s_\delta \colon \mathfrak{P}(X) \to [0, \infty]$ für alle $s \geq 0$ und $\delta > 0$ ein äußeres Maß auf X ist.

(α) Man kann ja $\emptyset$ mit der Folge $(\emptyset)_{k\in\mathbb{N}}$ überdecken und $\operatorname{diam}^s(\emptyset) = 0$. Es folgt: $\mathcal{H}^s_\delta(\emptyset) = 0$, für alle $s \geq 0$, $\delta > 0$.

(β) Sei $A \subseteq B$. Zu zeigen ist dann: $\mathcal{H}^s_\delta(A) \leq \mathcal{H}^s_\delta(B)$. Das folgt daraus, dass jede δ-Überdeckung von B auch eine δ-Überdeckung von A ist. Bildet man das Infimum über eine größere Teilmenge $M \subseteq [0, \infty]$ als $N \subseteq [0, \infty]$, $M \supseteq N$, so ist natürlich $\inf M \leq \inf N$. Daher ist

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) \leq \mathcal{H}^s_\delta(B), \quad \forall s \geq 0, \forall \delta > 0.$$

(γ) Das macht man mit dem $\varepsilon/2^k$-Kniff: Ist $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ und $\varepsilon > 0$, so existieren δ-Überdeckungen $(C_{kj})_{j\in\mathbb{N}}$ von A_k mit

$$\sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{diam}(C_{kj})^s < \mathcal{H}^s_\delta(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Dann ist aber $(C_{kj})_{k,j\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare δ-Überdeckung von A und damit

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^s_\delta(A) \quad &\leq \quad \sum_{j,k} \operatorname{diam}(C_{jk})^s = \sum_{k=1}^{\infty}(\sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{diam}(C_{jk})^s) \\ &< \quad \sum_{k=1}^{\infty}(\mathcal{H}^s_\delta(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}^s_\delta(A_k) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Da dies für alle $\varepsilon > 0$ gilt, folgt tatsächlich

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) \le \sum_{k=1}^\infty \mathcal{H}^s_\delta(A_k).$$

(ii) Nun machen wir noch den Grenzübergang $\delta \to 0$. Zunächst beobachten wir wieder, dass für $\delta_1 < \delta_2$ jede δ_1-Überdeckung auch eine δ_2-Überdeckung ist, woraus

$$\mathcal{H}^s_{\delta_1}(A) \ge \mathcal{H}^s_{\delta_2}(A)$$

folgt. Damit ist $(0,\infty) \to [0,\infty]$, $\delta \mapsto \mathcal{H}^s_\delta(A)$, monoton fallend und deshalb konvergiert $\mathcal{H}^s_\delta(A)$ für $\delta \to 0$ gegen $\mathcal{H}^s(A)$,

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A), \quad \mathcal{H}^s_\delta(A) \le \mathcal{H}^s(A),\ \forall \delta > 0.$$

(α) Aus $\mathcal{H}^s_\delta(\emptyset) = 0$, für $\delta > 0$, folgt natürlich

$$\mathcal{H}^s(\emptyset) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^s_\delta(\emptyset) = \lim_{\delta\to 0}(0) = 0.$$

(β) Sei $A \subseteq B$. Wegen

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) \le \mathcal{H}^s_\delta(B) \le \mathcal{H}^s(B), \quad \forall \delta > 0,$$

folgt auch

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A) \le \mathcal{H}^s(B).$$

(γ) Und auch bei $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ folgt aus

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) \le \sum_{k=1}^\infty \mathcal{H}^s_\delta(A_k) \le \sum_{k=1}^\infty \mathcal{H}^s(A_k), \quad \forall \delta > 0,$$

auch

$$\mathcal{H}^s(A) \le \sum_{k=1} \infty \mathcal{H}^s(A_k).$$

[**Anmerkung.** Das (äußere) Hausdorff-Maß aus der Vorlesung, welches wir mit Kugelüberdeckungen konstruiert haben, wird in der Literatur (siehe z.B. H. Federer: Geometric Measure Theory) als *sphärisches Hausdorff-Maß* bezeichnet. Das eigentliche Hausdorff-Maß auf dem $\mathbb{R}^n$ ist dieses aus Aufgabe-45, welches mit beliebigen δ-Überdeckungen gebildet wird. Das s-dimensionale Volumen der Einheitskugel $\mathbb{B}^s \subseteq \mathbb{R}^s$ kann duch

$$\omega_s = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)}$$

ausgedrückt werden, wo $\Gamma\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ die Gamma-Funktion ist, die auf den natürlichen Zahlen $\Gamma(n) = (n-1)!$ $(n \in \mathbb{N})$ erfüllt. (Beachte auch: $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.) Deshalb ist der Ausdruck

$$\omega_s r^s = \lambda^s(B^s_r(0)) = \frac{\omega_s}{2^s}\mathrm{diam}(B^s_r(0))$$

für $r > 0$ und $s \in \mathbb{N}_0$ richtig, weshalb man das Maß aus Aufgabe-45 noch mit dem Fakor

$$\tau_s := \frac{\pi^{s/2}}{2^s \Gamma(\frac{s}{2}+1)}$$

skaliert (jetzt für jedes $s \geq 0$). Das ist dann das (äußere) s-dimensionale Hausdorff-Maß, welches man für jeden metrischen Raum bilden kann. Auf $X = \mathbb{R}^n$ und auf einer großen Teilmenge der Borelalgebra $\mathfrak{B}^n \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ (den so genannten s-rektifizierbaren Teilmengen) stimmt es mit dem aus der Vorlesung überein (siehe noch einmal Federers GMT).]

Aufgabe 46. Sei X ein metrischer Raum. Für jede Teilmenge $A \subseteq X$ definiert man *die Hausdorff-Dimension von A* durch

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) := \inf\{s \in [0,\infty) : \ \mathcal{H}^s(A) = 0\} \in [0,\infty].$$

Zeigen Sie für $0 \leq s < t$:

(i) $\mathcal{H}^s(A) < \infty \Rightarrow \mathcal{H}^t(A) = 0$

(ii) $\mathcal{H}^t(A) > 0 \Rightarrow \mathcal{H}^s(A) = \infty$

Folgern Sie daraus, dass für A (mit unendlich-vielen Elementen) auch gilt:

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) = \sup\{s \in [0,\infty) : \ \mathcal{H}^s(A) = \infty\}.$$

Lösungsvorschlag. (i) Sei also $s \geq 0$ und $\mathcal{H}^s(A) < \infty$. Für jedes $\delta > 0$ und jede δ-Überdeckung $(C_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von A ist dann

$$\sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{diam}^t(C_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{diam}^{t-s}(C_j) \cdot \operatorname{diam}^s(C_j) < \delta^{t-s} \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{diam}^s(C_j).$$

Infimumbildung auf beiden Seiten impliziert dann

$$\mathcal{H}^t_\delta(A) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}^s_\delta(A), \quad \forall \delta > 0.$$

Grenzübergang für $\delta \to 0$ liefert schließlich:

$$\mathcal{H}^t(A) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^t_\delta(A) \leq \lim_{\delta\to 0}(\delta^{t-s}\mathcal{H}^s_\delta(A)) = 0 \cdot \mathcal{H}^s(A) = 0.$$

(ii) Das ist nur die Kontraposition zu (i).

Ist nun $t > \dim_{\mathcal{H}}(A) \in [0,\infty)$, so gibt es nach Definition von $\dim_{\mathcal{H}}(A)$ ein $s \in (0,\infty)$, mit $\dim_{\mathcal{H}}(A) < s < t$ und $\mathcal{H}^s(A) = 0$. Nach (i) folgt: $\mathcal{H}^t(A) = 0$.

Ist $s < \dim_{\mathcal{H}}(A) \in (0,\infty]$, so gibt es nach Definition von $\dim_{\mathcal{H}}(A)$ ein $t \in (0,\infty)$, mit $s < t < \dim_{\mathcal{H}}(A)$ und $\mathcal{H}^t(A) > 0$. Nach (ii) folgt: $\mathcal{H}^s(A) = \infty$. Für $0 < \dim_{\mathcal{H}}(A) \leq \infty$ folgt damit also

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) = \sup\{s \in [0,\infty) : \ \mathcal{H}^s(A) = \infty\}.$$

Der Fall $\dim_{\mathcal{H}}(A) = 0$ ist ein bisschen speziell. $\mathcal{H}^0$ ist gerade das Zählmaß auf X, denn eine endliche Menge $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ (mit $x_i \neq x_j$ für $i < j$) kann man mit $(\{x_1\}, \{x_2\}, \dots, \{x_n\}, \emptyset, \emptyset, \dots)$ überdecken, woraus schon mal (wegen $\operatorname{diam}^0(\emptyset) = 0$ und $0^0 = 1$) folgt:

$$\mathcal{H}^0(A) \leq n.$$

Aber da man für $\delta < \min_{i<j}(d(x_i, x_j))$ auch mindestens n Mengen mit Durchmesser höchstens δ braucht, um A zu überdecken, ist tatsächlich

$$\mathcal{H}^0(\{x_1, \dots, x_n\}) = n.$$

Für unendliche Mengen A ist also wegen der Monotonie eines äußeren Maßes dann $\mathcal{H}^0(A) = \infty$ und daher gilt

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) = \sup\{s \in [0, \infty) : \ \mathcal{H}^s(A) = \infty\}$$

auch dann. (Definiert man in diesem Fall mal $\sup(\emptyset) := 0$ (wo man jetzt $\emptyset$ als Teilmenge von $[0, \infty)$ betrachtet), so gilt die Formel für alle Teilmengen $A \subseteq X$.)

Aufgabe 47. Sei $C \subseteq \mathbb{R}$ die Cantormenge (siehe Aufgabe 11) und $s := \ln 2/\ln 3$. Zeigen Sie mit folgender Anleitung, dass $\dim_{\mathcal{H}}(C) = s$ ist.

(i) $\mathcal{H}^s(C) \leq 1$

(ii) Sei $\delta < \frac{1}{3}$ und $(J_i)_{i=1,\dots,m}$ eine endliche Überdeckung von C aus offenen Intervallen mit $\operatorname{diam}(J_i) < \delta$, für alle $i = 1, \dots, m$. Dann gilt

$$\frac{1}{2} \leq \sum_{i=1}^{m} \operatorname{diam}(J_i)^s$$

(iii) $\frac{1}{2} \leq \mathcal{H}^s(C)$

Lösungsvorschlag. (i) Man erinnere sich daran, dass die Cantormenge C der Durchschnitt von kompakten Teilmengen $C_k \subseteq [0, 1]$ ist, die disjukte Vereinigung von 2^k paarweise disjunkten abgeschlossenen Intervallen $I_{k,j}$, $j = 1, \dots, 2^k$, der Länge 3^{-k} ist,

$$C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k, \quad C_k = \bigcup_{j=1}^{2^k} I_{k,j}, \quad \operatorname{diam}(I_{k,j}) = 3^{-k}.$$

Sei nun $\delta > 0$ beliebig. Wir können dann $k \in \mathbb{N}$ so groß wählen, dass $3^{-k} < \delta$ ist. Sei $s := \ln(2)/\ln(3) = \log_3(2)$, also

$$3^s = 3^{\log_3(2)} = 2.$$

Wegen $C \subseteq C_k$, der Monotonie des Maßes und weil $(I_{k,j})_{j=1,\dots,2^k}$ eine Überdeckung von C_k und damit von C ist, haben wir

$$\mathcal{H}^s_\delta(C) \leq \mathcal{H}^s_\delta(C_k) \leq \sum_{j=1}^{2^k} \operatorname{diam}^s(I_{k,j}) = 2^k \cdot (3^{-k})^s = 2^k \cdot (3^s)^{-k} = 2^k 2^{-k} = 1.$$

Es folgt:

$$\mathcal{H}^s(C) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(C) \leq 1.$$

(ii) (α) Behauptung: Ist $l \leq k$ und $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge mit $\operatorname{diam}(A) < 3^{-l}$, so schneidet A höchstens 2^{k-l} ntervalle aus der Familie $(I_{k,j})_{j=1,\ldots,2^k}$.

Denn: Nach Konstruktion der $I_{l,j}$ $(j = 1, \ldots, 2^l)$ ist der Abstand zweier verschiedener Intervalle $I_{l,p}$ und $I_{l,q}$ für $p \neq q$ mindestens 3^{-l}. Deshalb kann A dann höchstens eines dieser Intervalle schneiden, sagen wir I_{l,p_0}. Nun wird aber nach Konstruktion I_{l,p_0} von genau 2^{k-l} Intervallen der Familie $(I_{k,j})_{j=1,\ldots,2^k}$ geschnitten, woraus die Behauptung folgt.

(β) Sei nun also $(J_i)_{i=1,\ldots,m}$ mit $\operatorname{diam}(J_i) < \delta < 1/3$ (für alle i) gegeben. Für jedes $i \in \{1 \ldots, m\}$ gibt es dann (eindeutig bestimmt) ein $k(i) \in \mathbb{N}$ mit

$$3^{-(k(i)+1)} \leq \operatorname{diam}(J_i) < 3^{-k(i)}.$$

Wir setzen $k := \max_{i=1}^m k(i) \in \mathbb{N}$. Aus der Konstruktion von C folgt, dass jedes der Intervalle $I_{k,j}$ $(j = 1, \ldots, 2^k)$ die Cantormenge C schneidet. (Z.B. bleiben jeweils die Intervallgrenzen von $I_{k,j}$ stehen.) Da (J_i) eine Überdeckung von C ist, existiert damit für jedes $j \in \{1, \ldots, 2^k\}$ ein $i \in \{1, \ldots, m\}$ mit $I_{k,j} \cap J_i \neq \emptyset$. Andererseits schneidet J_i $(i = 1, \ldots, m)$ höchstens $2^{k-k(i)}$ der Intervalle $I_{k,j}$ $(j = 1, \ldots, 2^k)$. Daraus folgt nun:

$$2^k \leq \sum_{i=1}^m \sharp\{1 \leq j \leq 2^k : \; I_{k,j} \cap C_i \neq \emptyset\} \leq \sum_{i=1}^m 2^{k-k(i)},$$

also

$$\frac{1}{2} \leq \sum_{i=1}^m 2^{-(k(i)+1)}.$$

Damit ergibt sich dann wegen $3^s = 2$ tatsächlich

$$\sum_{i=1}^m \operatorname{diam}^s(J_i) \geq \sum_{i=1}^m 3^{-(k(i)+1)\cdot s} = \sum_{i=1}^m 2^{-(k(i)+1)} \geq \frac{1}{2}.$$

(iii) Sei $0 < \delta < \frac{1}{3}$. Wir betrachten jetzt eine beliebige δ-Überdeckung $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ der Cantormenge $C \subseteq [0,1]$ und setzen

$$a_k := \inf(M_k), \quad b_k := \sup(M_k),$$

so dass also $M_k \subseteq [a_k, b_k]$ ist und

$$b_k - a_k = \operatorname{diam}(M_k) < \delta < \frac{1}{3}.$$

(O.E.: $M_k \neq \emptyset, \; \forall k$). Um Teil (b) anwenden zu können, vergrößern wir das Intervall $[a_k, b_k]$ kontrolliert zu einem offenen Intervall. Sei $\varepsilon > 0$. Dann verschieben wir (a_k, b_k) zunächst so, dass der Mittelpunkt in 0 liegt, skalieren dann mit dem Faktor

$$\rho_k := (1 + \frac{\varepsilon}{2^k})^{1/s}$$

hoch, und verschieben dann wieder zurück. Wir setzen also

$$J_k := \rho_k \left((a_k, b_k) - \frac{a_k + b_k}{2} \right) + \frac{a_k + b_k}{2}.$$

Dann ist J_k nun offen und

$$J_k \supseteq [a_k, b_k] \supseteq M_k$$

(für $k \in \mathbb{N}$) und $(J_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist daher auch eine (dieses Mal offene Intervall-) Überdeckung von C. Außerdem gilt für ihre Durchmesser

$$\operatorname{diam}(J_k) = (b_k - a_k)(1 + \frac{\varepsilon}{2^k})^{1/s} < \delta \cdot (1+\varepsilon)^{1/s} < \delta \cdot \frac{1}{3\delta} = \frac{1}{3},$$

wenn wir

$$0 < \varepsilon < \varepsilon_0 := (\frac{1}{3\delta})^s - 1 \quad (\text{bei } s = \log_3(2))$$

annehmen. Da C kompakt ist, existiert nun ein $m \in \mathbb{N}$, so dass schon $(J_k)_{k=1,\ldots,m}$ eine Überdeckung von C ist. Und für diese können wir nun Teil (b) anwenden und erhalten

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \;&\leq\; \sum_{k=1}^{m} \operatorname{diam}^s(J_k) = \sum_{k=1}^{m} (b_k - a_k)^s \left[(1 + \frac{\varepsilon}{2^k})^{1/s}\right]^s \\ &=\; \sum_{k=1}^{m} (b_k - a_k)^s + \sum_{k=1}^{m} \frac{\varepsilon}{2^k}(b_k - a_k)^s.\end{aligned}$$

Für den zweiten Summenden schätzen wir nun nur grob so ab:

$$(b_k - a_k)^s < (\frac{1}{3})^s = \frac{1}{2}.$$

Das ergibt dann

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \;&\leq\; \sum_{k=0}^{m} (b_k - a_k)^s + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k)^s + \frac{\varepsilon}{2} \\ &=\; \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{diam}^s(M_k) + \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Da dies für alle $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ gilt, folgt auch

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{diam}^s(M_k) \geq \frac{1}{2}$$

und damit auch durch Infimumsbildung

$$\mathcal{H}^s_\delta(C) \geq \frac{1}{2}, \quad \forall\, 0 < \delta < \frac{1}{3}.$$

Das impliziert, dass schließlich auch

$$\mathcal{H}^s(C) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(C) \geq \frac{1}{2}$$

ist.

Mit Aufgabe 46 folgt dann, dass $\dim_{\mathcal{H}}(C) = s = \log_3(2)$ ist.

Für die folgende Aufgabe betrachten wir komplex-wertige, messbare Funktionen $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, d.h.: Urbilder von offenen Mengen sind (Borel-) messbar. f heißt dann *integrierbar*, wenn

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx < \infty$$

ist. In diesem Fall sind $\mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrierbar und man setzt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx := \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{Re}(f)(x)\, dx + i \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{Im}(f)(x)\, dx \ \in \mathbb{C}.$$

Wir schreiben $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) := \{f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} : f \text{ integrabel}\}$.

Aufgabe 48 (Fourier-Transformation). **(a)** Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Begründen Sie, dass für jedes $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $x \mapsto f(x)\exp(-i\langle \xi, x\rangle)$ (mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dem kanonischen Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$) integrierbar ist. Man setzt daher $\hat{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$,

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle \xi, x\rangle}\, dx$$

und nennt dies *die Fourier-Transformierte von* f. Begründen Sie, dass $\hat{f}$ stetig und beschränkt ist mit

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \|f\|_1.$$

(b) Seien $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie:

$$(f * g)\hat{} = (2\pi)^{n/2} \hat{f} \cdot \hat{g}.$$

(c) Seien $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass $\hat{f}g$ und $f\hat{g}$ integrierbar sind und es gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \hat{g}(x)\, dx.$$

Lösungsvorschlag. **(a)** Es ist

$$|f(x) e^{-i\langle \xi, x\rangle}| = |f(x)|$$

und damit

$$\int |f(x) e^{-i\langle \xi, x\rangle}|\, dx = \int |f(x)|\, dx = \|f\|_1 < \infty,$$

also ist $x \mapsto f(x)\exp(-i\langle \xi, x\rangle)$ für jedes $\xi \in \mathbb{R}^n$ integrierbar. Da diese Funktion (bei festem $x \in \mathbb{R}^n$) stetig von ξ abhängt, folgt aus dem Satz aus der Vorlesung über parameterabhängige Integrale, dass $\hat{f}$ tatsächlich stetig ist. Schließlich ist

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int |f(x) e^{-i\langle \xi, x\rangle}|\, dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int |f(x)|\, dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \|f\|_1$$

und damit auch

$$\|\hat{f}\|_\infty = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \|f\|_1.$$

(Die L^∞-Norm stimmt für stetige Funktionen mit der sup-Norm überein.)

(b) Für jedes $\xi \in \mathbb{R}^n$ ist mit dem Satz von Fubini und der Substitution $x = y + t$ (bei festem $t \in \mathbb{R}^n$)

$$\begin{aligned}
(f * g)\hat{}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int (f*g)(x) e^{-i\langle \xi, x\rangle}\, dx &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int (\int f(t) g(x-t)\, dt) e^{-i\langle \xi, x\rangle}\, dx \\
= \quad \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int f(t) (\int g(x-t) e^{-i\langle \xi, x\rangle}\, dx)\, dt &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int f(t) (\int g(y) e^{-i\langle \xi, y+t\rangle}\, dx)\, dt \\
= \quad \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int f(t) (\int g(y) e^{-i\langle \xi, y\rangle}\, dy) e^{-i\langle \xi, t\rangle}\, dt &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int f(t) [(2\pi)^{n/2} \hat{g}(\xi)] e^{-i\langle \xi, t\rangle}\, dt \\
= \quad \hat{g}(\xi) \int f(t) e^{-i\langle \xi, t\rangle}\, dt = (2\pi)^{n/2} \hat{g}(\xi) \hat{f}(\xi).&
\end{aligned}$$

(c) Da $\hat{f}$ beschränkt und g integrierbar ist, ist $\hat{f} \cdot g$ integrierbar und ähnlich ist auch $f \cdot \hat{g}$ integrierbar. Dann rechnen wir wieder mit Fubini:

$$\begin{aligned}
\int \hat{f}(x) g(x)\, dx &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int (\int f(y) e^{-i\langle x, y\rangle}\, dy) g(x)\, dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int f(y) (\int g(x) e^{-i\langle y, x\rangle}\, dx)\, dy = \int f(y) \cdot \hat{g}(y)\, dy.
\end{aligned}$$

[**Anmerkung.** Die Fourier-Transformation ordnet einer integrierbaren Funktion f eine neue Funktion $\hat{f}$ von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{C}$ zu. Ist $\hat{f}$ selbst auch wieder integrierbar, so kann man $\hat{f}$ die so genannte *inverse Fourier-Transformierte* zuordnen, die sich von der Fouriertransformation nur dadurch unterscheidet, dass vor dem Skalarprodukt im Exponentialterm ein Plus statt einem Minus steht. Man nennt sie invers, weil man zeigen kann (siehe z.B. O. Forster: Analysis III), dass man dann fast-überall f zurückerhält,

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \hat{f}(\xi) e^{i\langle x, \xi\rangle}\, d\xi \quad \text{f.ü.}$$

Das zeigt, dass f fast-überall durch $\hat{f}$ bestimmt ist und löst in gewisser Weise die Aufgabe, f als Superposition (man könnte auch sagen als „überabzählbare Linearkombination“) der einfachen Funktionen (so genannte *ebene Wellen*) $x \mapsto e^{i\langle \xi, x\rangle}$ ($\xi \in \mathbb{R}^n$) darzustellen (vgl. auch die Motivation bei der Darstellung von periodischen Funktionen durch eine Fourier-Reihe (siehe z.B. Aufgabe 31, Analysis-II)). Die *Fourier-Koeffizienten* dieser Superposition sind dann gerade (bis auf einen Faktor) die Werte der Fourier-Transformierten von f.

Ist f in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$, so liegt $\hat{f}$ selbst auch wieder in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ und die Transformation ist dann sogar längenerhaltend, $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$. Geht man zu den Klassen modulo Werte auf Nullmengen über, so setzt sich, wegen der Dichtheit von $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ (siehe meine Anmerkung zu Aufgabe 41) und der Vollständigkeit von L^2, die Transformation eindeutig zu einer linearen Abbildung $\mathcal{F}\colon L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ fort, die eine *Isometrie* des Hilbertraumes $L^2(\mathbb{R}^n)$ ist, also ein Isomorphismus mit

$$\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \|f\|_2, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

(Satz von Plancherel (siehe z.B. wieder Forsters Analysis-III)). Nicht nur in der Mathematischen Physik, aber zum Beispiel dort, kann man Probleme für Funktionen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{C}$, z.B. das

Lösen von (partiellen) Differentialgleichungen, durch den Wechsel zur Fourier-Transformierten, sozusagen *im Fourier-Bild*, lösen, und dann die Lösung dort wieder „Fourier-zurück-transformieren". Z.B. übersetzt sich das Differenzieren in solchen Differentialgleichungen im Fourierbild in algebraische Operationen, wodurch das Problem dann oft leichter lösbar wird. Die Fourier-Transformation ist daher ein mächtiges Hilfsmittel beim Studium von Funktionen.]