

Musterlösungen zur Integrations- und Maßtheorie

Aufgabe 49. (a) Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$, $y = f(x)$, stetig differenzierbar und $M \subseteq \mathbb{R}^3$ der Rotationskörper, der entsteht, wenn man den Graphen von f um die x -Achse rotieren lässt,

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = f(x)^2\}.$$

Begründen Sie, dass $M \subseteq \mathbb{R}^3$ Borelsch und ihr Flächeninhalt gegeben ist durch

$$\mathcal{H}^2(M) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

(b) Sei $K \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Kreiskegel mit einem Grundflächenradius $r > 0$ und einer Mantellinienlänge $s > 0$. Zeigen Sie dass der Oberflächeninhalt von K (ohne Grundfläche) gegeben ist durch

$$\mathcal{H}^2(K) = \pi r s.$$

Lösungsvorschlag. (a) M ist als abgeschlossene Teilmenge von $[a, b] \times \mathbb{R}^2$ sicher Borelsch. Wir betrachten nun $G := (a, b) \times (0, 2\pi)$ und $\varphi: G \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\varphi(s, t) = (s, f(s) \cos t, f(s) \sin t).$$

Dann ist φ injektiv (weil für festes $x = s$ durch t gerade ein Kreis (ohne den Punkt $(s, f(s), 0)$) parametrisiert wird), $\varphi(G) \subseteq M$ und $M \setminus \varphi(G)$ besteht aus nur zwei *Breitenkreisen*

$$\{(x, y, z) \in M : x = a \text{ oder } x = b\}$$

und einem *Meridian*

$$\{(x, y, z) \in M : z = 0 \text{ und } y > 0\}$$

(der *Profilkurve*), die aber allesamt \mathcal{H}^2 -Nullmengen in \mathbb{R}^3 sind. (Das kann man auch mit der Flächenformel sehen und lassen wir hier mal weg.) Um zu sehen, dass φ eine *Immersion* ist, d.h., dass $D\varphi(s, t): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ injektiv ist, für alle $(s, t) \in G$, berechnen wir die Jacobische $J_\varphi: G \rightarrow [0, \infty)$,

$$J_\varphi(s, t) = \sqrt{\det(D\varphi^T(s, t)D\varphi(s, t))}.$$

Sie ist immer größer oder gleich Null und echt größer Null genau, wenn φ Immersion ist. Daraus folgt dann, dass φ eine reguläre Parametrisierung von $M \setminus C$ ist, wo $C \subseteq M$ eine \mathcal{H}^2 -Nullmenge ist, und wir können sie dann via der Flächenformel für die Berechnung des Oberflächeninhaltes der Rotationsfläche M benutzen. Zunächst ist dafür

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, t) &= (1, f'(s) \cos t, f'(s) \sin t), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, t) &= (0, -f(s) \sin t, f(s) \cos t). \end{aligned}$$

Daraus folgt dann für

$$\begin{aligned} D\varphi^T D\varphi(s, t) &=: g(s, t) = (g_{ij}(s, t))_{i,j=1,2}, \\ g_{ij}(s, t) &= \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial s_i}, \frac{\partial\varphi}{\partial s_j} \right\rangle(s, t) \end{aligned}$$

(mit $s_1 := s$ und $s_2 := t$):

$$\begin{aligned} g_{11}(s, t) &= \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial s}(s, t) \right\|^2 = 1 + f'(s)^2, \\ g_{21}(s, t) &= g_{12}(s, t) = \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial s}, \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right\rangle(s, t) = 0; \\ g_{22}(s, t) &= \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial t}(s, t) \right\|^2 = f(s)^2. \end{aligned}$$

Das ergibt schließlich

$$J_\varphi(s, t) = \sqrt{\det g(s, t)} = \sqrt{(1 + f'(s)^2)f(s)^2},$$

und da $f(s) > 0$ ist:

$$J_\varphi(s, t) = f(s)\sqrt{1 + f'(s)^2} > 0, \quad \forall (s, t) \in G.$$

Die Flächenformel liefert dann

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^2(M) &= \int_G J_\varphi(s, t) \, ds dt = \left(\int_0^{2\pi} 1 \, dt \right) \left(\int_a^b f(s)\sqrt{1 + f'(s)^2} \, ds \right) \\ &= 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx. \end{aligned}$$

(b) Für den Kreiskegel mit Grundflächenradius $r > 0$ und Höhe $h > 0$ betrachten wir $f: [0, h] \rightarrow [0, \infty)$,

$$f(x) = \frac{r}{h}x.$$

Es ist dann K die Rotationsfläche, die sich daraus gemäß Teil (a) ergibt. (Wir ignorieren wieder die Spitze und den Grundkreis von K bei der Flächenberechnung. Beachte, dass $f'(0, h) > 0$ ist, was für das Argument in (a) auch reicht.) Nun ist

$$f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2} = \left(\frac{r}{h}x\right)\sqrt{1 + \frac{r^2}{h^2}}$$

und damit

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^2(K) &= 2\pi \frac{r}{h} \sqrt{1 + \frac{r^2}{h^2}} \int_0^h x \, dx = 2\pi \frac{r}{h} \sqrt{1 + \frac{r^2}{h^2}} \cdot \frac{1}{2} h^2 \\ &= \pi r h \sqrt{1 + \frac{r^2}{h^2}} = \pi r \sqrt{h^2 + r^2}. \end{aligned}$$

Für die Mantellinienlänge (dem Abstand von Kegelspitze zum Boden) ist aber nach Pythagoras gerade $s = \sqrt{h^2 + r^2}$, also gilt tatsächlich:

$$\mathcal{H}^2(K) = \pi r s.$$

[**Anmerkung.** Der Kegel ist eine so genannte *abwickelbare Fläche*, d.h. hier anschaulich, dass man ihn (nach Aufschneiden entlang einer Mantellinie) längentreu in die Ebene „abwickeln“ kann. Der Flächeninhalt ändert sich dabei nicht. So argumentiert man (wenn man es überhaupt macht) in der Schule. Die abgewickelte Fläche ist dann ein *Scheibensektor* vom Radius s und Umfang $2\pi r$ des äußeren begrenzenden Kreisbogens. Der Flächeninhalt ist deshalb

$$A = (\text{Radius}) \cdot \frac{\text{Umfang}}{2} = s \cdot \frac{2\pi r}{2} = \pi r s.$$

Das ist eine elementargeometrische Überlegung, die hier auch zum Ziel führt.]

Aufgabe 50. (a) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Gebiet ($n \in \mathbb{N}$) und $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Sei weiter $B \subseteq G$ Borelsch und $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ der Graph von $f|_B$,

$$\Gamma = \{(x, y) \in B \times \mathbb{R} : y = f(x)\}.$$

Begründen Sie, warum auch $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ Borelsch ist und für seinen n -dimensionalen Flächeninhalt gilt:

$$\mathcal{H}^n(\Gamma) = \int_B \sqrt{1 + \|\text{grad}(f)(x)\|^2} dx.$$

(Hinweis: Für Matrizen $A, B \in \text{Mat}(n, s)$ (mit $1 \leq s \leq n$) gilt:

$$\det(A^T \cdot B) = \sum_{i_1 < \dots < i_s} \det(A_{i_1 \dots i_s}) \det(B_{i_1 \dots i_s}),$$

wo $A_{i_1 \dots i_s}$ die $s \times s$ -Matrix ist, die aus den Zeilen i_1, \dots, i_s von A besteht.)

(b) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ das *hyperbolische Paraboloid*,

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 - y^2\},$$

und $R > 0$. Berechnen Sie den Flächeninhalt von $M \cap (B_R^2(0) \times \mathbb{R})$, wo $B_R^2(0) \subseteq \mathbb{R}^2$ die Kreisscheibe vom Radius R mit Mittelpunkt 0 in \mathbb{R}^2 bezeichnet.

Lösungsvorschlag. (a) Der Graph $\Gamma_B \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ von $f|_B$ ist als Durchschnitt der in $G \times \mathbb{R}$ abgeschlossenen Menge des vollen Graphen Γ_G von f und der Borelmenge $B \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ sicher auch Borelsch. Wir können nun Γ_G so parametrisieren:

$$\varphi: G \rightarrow \Gamma_G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}, \quad x \mapsto (x, f(x)).$$

Dann ist φ offenbar stetig differenzierbar und injektiv. Es bleibt zu zeigen, dass φ auch immersiv ist. Dazu zeigen wir, dass die Jacobische $J_\varphi: G \rightarrow [0, \infty)$ überall positiv ist. Zunächst ist

$$D\varphi(x) = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n \\ \text{grad} f(x) \end{pmatrix} \in \text{Mat}(n+1, n).$$

Für die Gramsche Determinante erhält man mit der Determinantenformel aus dem Hinweis

$$\det(D\varphi^t D\varphi(x)) = 1 + \sum_{j=1}^n \left((-1)^{n-j} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right)^2,$$

weil man bei Streichung der j . Zeile ($j = 1, \dots, n$) noch $n - j$ Vertauschungen der $(n + 1)$. Zeile mit der jeweils darüberliegenden Zeile machen muss. (Egal: Wir nehmen eh das Quadrat davon.) Es ist also

$$\begin{aligned} J_\varphi(x) &= \sqrt{\det(D\varphi^t D\varphi(x))} = \left(1 + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)^2\right)^{1/2} \\ &= (1 + \|\text{grad}f(x)\|^2)^{1/2} > 0, \quad \forall x \in G. \end{aligned}$$

Also ist φ eine reguläre Parametrisierung von Γ_G und daher gilt nach der Flächenformel für $\Gamma = \Gamma_B = \text{im}(\varphi|_B)$:

$$\mathcal{H}^n(\Gamma) = \int_B J_\varphi(x) dx = \int_B \sqrt{1 + \|\text{grad}f(x)\|^2} dx.$$

(b) Das ist offenbar ein Beispiel für Teil (a) mit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 - y^2$, und $B = B_R^2(0)$. In diesem Fall ist

$$\text{grad}f(x, y) = (2x, -2y),$$

also

$$1 + \|\text{grad}f(x, y)\|^2 = 1 + 4x^2 + 4y^2.$$

Mit Polarkoordinaten $x = r \cos \vartheta$, $y = r \sin \vartheta$ und

$$dx dy = r dr d\vartheta$$

erhalten wir:

$$A := \mathcal{H}^2(M \cap (B_R^2(0) \times \mathbb{R})) = \int_0^R \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 4r^2} \cdot r dr d\vartheta.$$

Wegen

$$\frac{d}{dr}(1 + 4r^2)^{3/2} = \frac{3}{2}(1 + 4r^2)^{1/2} \cdot 8r = 12r(1 + 4r^2)^{1/2}$$

erhalten wir mit dem Hauptsatz

$$A = \left(\int_0^{2\pi} d\vartheta\right) \cdot \int_0^R \frac{1}{12} \frac{d}{dr}(1 + 4r^2)^{3/2} dr = \frac{2\pi}{12} (1 + 4r^2)^{3/2} \Big|_0^R = \frac{\pi}{6} (\sqrt{(1 + 4R^2)^3} - 1).$$

Aufgabe 51. (a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\psi: \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ ($N = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{S}^{n-1}$ der Nordpol) die so genannte *stereographische Projektion*, d.h.: Die Gerade, die durch N und $x \in \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{N\}$ geht, schneidet die Hyperebene $E = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = -1\}$ im Punkt $(\psi(x), -1)$. Begründen Sie, dass ψ bijektiv und $\varphi := \psi^{-1}: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{N\} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine reguläre Parametrisierung ist.

(b) (Zwiebelsatz) Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ messbar und $S^{n-1}(r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = r\}$ für $r > 0$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}_+} \left(\int_{S^{n-1}(r)} f(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x) \right) dr.$$

(Hinweis: Zeigen Sie, dass mit (dem Inversen) der stereographischen Projektion $\varphi: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{N\}$ die Abbildung $\Phi: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(r, x) \mapsto r\varphi(x)$, ein Diffeomorphismus auf sein Bild ist, und verwenden Sie, dann Transformations- und Flächenformel sowie Tonelli.)

Lösungsvorschlag. (a) Die Gerade $L_x \subseteq \mathbb{R}^n$, die durch N und $x \in \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{N\}$ geht, parametrisieren wir durch $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$g(t) = (1-t)N + tx,$$

und berechnen den Punkt $(\psi(x), -1) \in E$, wo diese E schneidet, durch die Bedingung $g_n(t_0) = -1$, also

$$(1-t_0) \cdot 1 + t_0 x_n = g_n(t_0) = -1$$

und damit zu

$$t_0 = \frac{2}{1-x_n}.$$

Die Abbildung $\psi: \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ ist damit durch

$$\psi(x) = g'(t_0) = \frac{2}{1-x_n} x'$$

gegeben, wo wir hier mit dem Strich die ersten $(n-1)$ Koordinaten zusammenfassen (und nicht etwa die Ableitung meinen), also z.B.

$$x = (x', x_n), \quad g = (g', g_n), \text{ usw.}$$

Aufgrund der Konstruktion ist eigentlich schon klar, dass ψ bijektiv ist, aber wir berechnen die Umkehrung $\varphi: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{N\} \subseteq \mathbb{R}^n$ auch noch explizit, um zu sehen, dass sie stetig differenzierbar ist. Dazu betrachten wir jetzt die Gerade $L_{x'} \subseteq \mathbb{R}^n$, die durch N und $(x', -1) \in E$ geht und parametrisieren sie mit $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$h(t) = (1-t)N + t(x', -1).$$

Nun berechnen wir den Schnittpunkt von $L_{x'}$ mit \mathbb{S}^{n-1} , der nicht N ist, durch die Bedingung $\|h(t_0)\|^2 = 1$, (und $t_0 \neq 0$, weil dieser Parameter zu $N \in L_{x'} \cap \mathbb{S}^{n-1}$ gehört):

$$\begin{aligned} 1 &= \|h(t_0)\|^2 = (1-t_0)^2 \|N\|^2 + 2t_0(1-t_0)\langle N, (x', -1) \rangle + t_0^2 \|(x', -1)\|^2 \\ &= t_0^2(4 + \|x'\|^2) - 4t_0 + 1, \end{aligned}$$

also

$$t_0 = \frac{4}{\|x'\|^2 + 4}.$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} h'(t_0) &= t_0 x' = \frac{4x'}{\|x'\|^2 + 4}, \\ h_n(t_0) &= (1-t_0) - t_0 = 1 - 2t_0 = \frac{\|x'\|^2 - 4}{\|x'\|^2 + 4}. \end{aligned}$$

Das zeigt, dass $\varphi: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{N\} \subseteq \mathbb{R}^n$ gegeben ist durch

$$\varphi(x') = \frac{1}{\|x'\|^2 + 4} (4x', \|x'\|^2 - 4).$$

Man prüft nun ohne Mühe nach, dass $\psi \circ \varphi = \text{id}$ und (mit $\|x\|^2 = 1$) auch $\varphi \circ \psi = \text{id}$ ist. Also ist ψ bijektiv und φ schon mal stetig differenzierbar und ebenfalls bijektiv. Um zu zeigen, dass φ auch eine Immersion ist, könnten wir nun die Jacobische von φ , $J_\varphi: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow [0, \infty)$, berechnen und zeigen, dass $J_\varphi(x') > 0$ ist, für alle $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$. Damit könnten wir dann übrigens auch den Flächeninhalt $\tau_{n-1} := \mathcal{H}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$ via der Flächenformel berechnen (siehe Aufgabe-52.b für eine andere Methode), aber hier können wir einfacher auch so argumentieren (zumal wir J_φ für Teil (b) auch gar nicht explizit zu wissen brauchen): Die Abbildung ψ können wir auch auf dem offenen $U = \mathbb{R}^n \setminus \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 1\}$ betrachten, wo sie offenbar auch stetig differenzierbar ist,

$$\psi(x) = \frac{2}{1 - x_n} x'.$$

Nun wissen wir schon, dass $\psi \circ \varphi = \text{id}$ ist, und daher gilt nach der Kettenregel

$$D\psi(\varphi(x')) \circ D\varphi(x') = \text{id},$$

für alle $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$. Das zeigt, dass $D\varphi(x'): \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ injektiv ist und damit φ eine reguläre Parametrisierung von $\mathbb{S}^{n-1} \setminus \{N\}$.

(b) Für $n = 1$ ist der Zwiebelsatz einfach, weil $S^0(r) = \{\pm r\} \subseteq \mathbb{R}$ ist (für $r > 0$) und \mathcal{H}^0 das Zählmaß. Deshalb ist für ein messbares $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}_-} f(x) dx + \int_{\mathbb{R}_+} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}_+} (f(x) + f(-x)) dx = \int_{\mathbb{R}_+} \left(\int_{S^0(r)} f(\xi) d\mathcal{H}^0 \xi \right) dr.$$

Wir können also im folgenden annehmen, dass $n \geq 2$ ist.

Dazu nehmen wir nun die reguläre Parametrisierung $\varphi: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ von Teil (a) und betrachten die stetig differenzierbare Abbildung $\Phi: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\Phi(r, x') = r \cdot \varphi(x').$$

Dann ist Φ offenbar injektiv und ihr Bild gegeben durch $\mathbb{R}^n \setminus L$, wo $L \subseteq \mathbb{R}^n$ der Strahl

$$\mathbb{R}_0^+ \cdot e_n = \{(0, \dots, 0, t) \in \mathbb{R}^n : t \geq 0\}$$

ist. Sowohl L ist eine λ^n -Nullmenge als auch die Durchschnitte $L \cap S^{n-1}(r) = \{(0, \dots, 0, r)\}$ ($r > 0$) sind \mathcal{H}^{n-1} -Nullmengen im \mathbb{R}^n (wegen $n \geq 2$). Das brauchen wir später. Jetzt berechnen wir das Differential von Φ in jedem Punkt $(r, x') \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1}$, um zu sehen, dass Φ ein Diffeomorphismus ist. Die Spaltenvektoren von $D\Phi(r, x')$ (bzw. die Bilder von den kanonischen Einheitsvektoren) sind nun offenbar:

$$\varphi(x'), rD_1\varphi(x'), \dots, rD_{n-1}\varphi(x').$$

Wir wissen schon, dass $(D_1\varphi(x'), \dots, D_{n-1}\varphi(x'))$ linear unabhängig ist, denn φ ist eine reguläre Parametrisierung. Außerdem folgt durch Differentiation von

$$\langle \varphi(x'), \varphi(x') \rangle = 1, \quad \forall x' \in \mathbb{R}^{n-1},$$

nach allen $(n - 1)$ Variablen, dass

$$2 \cdot \langle D_j\varphi(x'), \varphi(x') \rangle = 0$$

ist, für alle $j = 1, \dots, n-1$, d.h.: $\varphi(x')$ steht senkrecht auf $D_j\varphi(x')$ (für alle $j = 1, \dots, n-1$). (Die Vektoren $D_1\varphi(x'), \dots, D_{n-1}\varphi(x')$ spannen den so genannten *Tangentialraum* von S^{n-1} in $\varphi(x')$ auf.) Damit ist

$$(\varphi(x'), rD_1\varphi(x'), \dots, rD_{n-1}\varphi(x'))$$

eine Basis von \mathbb{R}^n , also $D\Phi(r, x')$ ein Isomorphismus und damit nach dem Umkehrsatz Φ ein Diffeomorphismus.

Um die Transformationsformel und die Flächenformel anwenden zu können, bringen wir jetzt noch die Jacobische von Φ und die Jacobische von φ zusammen. In $D\Phi^T D\Phi(r, x')$ stehen die Skalarprodukte der Spaltenvektoren. Aber diese sind

$$\begin{aligned} \langle \varphi(x'), \varphi(x') \rangle &= 1, \\ \langle \varphi(x'), rD_j\varphi(x') \rangle &= 0 \quad (j = 1, \dots, n-1), \\ \langle rD_i\varphi(x'), rD_j\varphi(x') \rangle &= r^2 \langle D_i\varphi, D_j\varphi \rangle(x') \quad (i, j = 1, \dots, n-1). \end{aligned}$$

Das zeigt:

$$\begin{aligned} J_\Phi(r, x') &= |\det D\Phi(r, x')| = \sqrt{\det(D\Phi^T \cdot D\Phi)(r, x')} \\ &= \sqrt{1 \cdot \det(r^2 \cdot D\varphi^T D\varphi(x'))} = r^{n-1} J_\varphi(x'). \end{aligned}$$

Schließlich betrachten wir noch die regulären Parametrisierungen der Sphären $S^{n-1}(r) \subseteq \mathbb{R}^n$ vom Radius $r > 0$, $\varphi_r: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow S^{n-1}(r) \setminus \{(0, \dots, 0, r)\} \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$\varphi_r(x') = r\varphi(x') = \xi.$$

(Das ist also die gleiche Abbildungsvorschrift wie bei Φ , nur ist jetzt $r > 0$ fest.) Da $D\varphi_r(x') = rD\varphi(x')$ ist, folgt

$$J_{\varphi_r}(x') = r^{n-1} J_\varphi(x'), \quad \forall x' \in \mathbb{R}^{n-1}, \forall r > 0,$$

also zusammen

$$J_\Phi(r, x') = J_{\varphi_r}(x'), \quad \forall r > 0, \forall x' \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

So, und jetzt haben wir für den Zwiebelsatz ($B^n(R)$ ist die „Zwiebel“ und $S^{n-1}(r)$ (für $0 < r \leq R$) sind die „Häute“ der Zwiebel) alles zusammen und brauchen „nur noch“ Transformationsformel, Tonelli und Flächenformel anzuwenden. Ist $f: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ messbar, so ist auch die Einschränkung $f|_{S^{n-1}(r)}: S^{n-1}(r) \rightarrow [0, \infty]$ (für jedes $r > 0$) messbar und wir dürfen rechnen:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx &\stackrel{\text{Trafo}}{=} \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1}} f \circ \Phi(r, x') \cdot J_\Phi(r, x') dr dx' \\ &\stackrel{\text{Tonelli}}{=} \int_{\mathbb{R}_+} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f \circ \varphi_r(x') \cdot J_{\varphi_r}(x') dx' \right) dr \\ &\stackrel{\text{Fl.-f.}}{=} \int_{\mathbb{R}_+} \left(\int_{S^{n-1}(r)} f(\xi) d\mathcal{H}^{n-1}\xi \right) dr. \end{aligned}$$

[Anmerkung.] Der Zwiebelsatz ist ein Spezialfall einer weitreichenden Verallgemeinerung, nämlich der so genannten **Cofflächenformel**, die ich zur Information hier gerne noch erläutern möchte. Man kann die Cofflächenformel als eine Art „krummflächigen Fubini“ ansehen. Sie verallgemeinert sowohl den Satz von Fubini als auch die Transformationsformel, wie Sie gleich

sehen werden. In gewisser Weise „trifft sie sich“ mit der Flächenformel bei der Transformationsformel, denn letztere ist ja auch ein Spezialfall der Flächenformel. Die Situation ist folgende: Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $\Phi: G \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar und dieses Mal eine so genannte *Submersion*, d.h.: $D\Phi(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist surjektiv, für alle $x \in G$ (und damit also $m \leq n$). Dann braucht man die auch hier so genannte *Jacobische von Φ* , d.i. $J_\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow (0, \infty)$,

$$J_\Phi(x) = \sqrt{\det(D\Phi(x)D\Phi^T(x))}.$$

(Man beachte, dass die Transponierte dieses Mal im rechten Faktor steht, damit $D\Phi(x)D\Phi^T(x)^T$ eine $(m \times m)$ -Matrix ist, die wegen der Submersivität von Φ auch tatsächlich positiv definit ist und damit positive Determinante hat. In ihr stehen dieses Mal die Skalarprodukte der Zeilen von $D\Phi(x)$.) Nun wird, sagen wir, eine messbare Funktion $f: G \rightarrow [0, \infty]$ zunächst via dem \mathcal{H}^{n-m} -dimensionalen Hausdorffmaß über die Niveauflächen $\Phi^{-1}(y) \subseteq G$ (für $y \in \Phi(G)$) integriert und dann die so entstehende (messbare) Funktion auf $\Phi(G) \subseteq \mathbb{R}^m$ bzgl. des Lebesgue-Maßes im \mathbb{R}^m . Es gibt dann eine Gleichheit mit ihrem Lebesgue-Integral im \mathbb{R}^n , allerdings gewichtet mit der Jacobischen von Φ , also:

$$\int_G f(x)J_\Phi(x) dx = \int_{\Phi(G)} \left(\int_{\Phi^{-1}(y)} f(\xi)d\mathcal{H}^{n-m}\xi \right) dy.$$

Natürlich gibt es wie beim Satz von Tonelli auch eine Version, wo $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar bzgl. des gewichteten Maßes $J_\Phi \lambda^n$ ist. Dann sind für λ^m -fast-alles $y \in \Phi(G)$ die Einschränkungen $f|_{\Phi^{-1}(y)}$ \mathcal{H}^{n-m} -integrierbar und die Coflächenformel gilt. Der Satz von Tonelli (bzw. Fubini) ist dann offenbar ein Spezialfall für den Fall, wo $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ die Projektion $(x', x'') \mapsto x''$ ist. In diesem Fall ist die Jacobische von Φ identisch 1. Ebenfalls ist der Zwiebelsatz (den es also auch für den integrierbaren Fall gibt) ein Spezialfall, wo nun $m = 1$ und $\Phi: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $\Phi(x) = \|x\|$, ist. Im Falle $m = 1$ kommt die Jacobische auf den Ausdruck

$$J_\Phi(x) = \|\text{grad}(\Phi)(x)\|$$

herab und im Falle $\Phi(x) = \|x\|$ sieht man schnell, dass wiederum $J_\Phi = 1$ ist. Die Niveauflächen sind offenbar die Sphären $S^{n-1}(r)$ ($r > 0$), so dass man tatsächlich den Zwiebelsatz erhält. Der Beweis der Coflächenformel verläuft wieder entlang dem Muster für die Transformationsformel und der Flächenformel. Man braucht sie nur für charakteristische (messbare) Funktionen zu beweisen, wodurch sie zu einer Gleichheit von Maßen auf der Borelalgebra von $\Phi(G) \subseteq \mathbb{R}^m$ wird.]

Aufgabe 52. (a) Wir wissen schon, dass das Volumen der Kugel $B^3(r) \subseteq \mathbb{R}^3$ gerade $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ und der Oberflächeninhalt von $S^2(r) \subseteq \mathbb{R}^3$ gerade $A(r) = 4\pi r^2$ ist ($r \in \mathbb{R}_+$). Können Sie mit Hilfe von Aufgabe 51 erklären, dass nicht zufällig gilt:

$$A(r) = V'(r)$$

(b) Sei $\omega_n = \lambda(\mathbb{B}^n)$ und $\tau_{n-1} = \mathcal{H}^{n-1}(S^{n-1})$ (für $n \in \mathbb{N}$). Zeigen Sie:

$$\tau_{n-1} = n\omega_n.$$

Lösungsvorschlag. (a) Nach dem Zwiebelsatz ist mit $f = \chi_{B^3(r)}$ für alle $r > 0$

$$\begin{aligned} V(r) &= \lambda^3(B^3(r)) = \int_{B^3(r)} 1 \, dx = \int_{\mathbb{R}^3} f(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}_+} \left(\int_{S^2(\rho)} f(\xi) \, d\mathcal{H}^2\xi \right) d\rho \\ &= \int_0^r \left(\int_{S^2(\rho)} 1 \, d\mathcal{H}^2\xi \right) d\rho = \int_0^r A(\rho) \, d\rho. \end{aligned}$$

Selbst wenn man $r \mapsto A(r)$ noch nicht kennt, so weiß man wegen des Homothetieverhaltens von \mathcal{H}^2 , dass

$$A(r) = \tau_2 r^2,$$

mit $\tau_2 = \mathcal{H}^2(\mathbb{S}^2)$, ist, also insbesondere stetig. Daher ist V mit $V(r) = \lambda^3(B^3(r))$ dann nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung eine Stammfunktion von A , d.i., $V' = A$. (Kennt mal also V , so kennt man A . Und kennt man A so kennt man V .)

(b) Diese Argumentation gilt auch im \mathbb{R}^n (für alle $n \in \mathbb{N}$). Es ist dort mit $A, V: \mathbb{R}_+ \rightarrow (0, \infty)$,

$$A(r) = \tau_{n-1} r^{n-1}, \quad V(r) = \omega_n r^n$$

und

$$\tau_{n-1} = \mathcal{H}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}), \quad \omega_n = \lambda^n(\mathbb{B}^n).$$

Wegen $V' = A$ folgt mit Auswertung bei $r = 1$:

$$\tau_{n-1} = A(1) = \left. \frac{d}{dr} \right|_{r=1} (\omega_n r^n) = n \cdot \omega_n.$$