Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose

WiSe 2020/21
22.02.2021
Blatt 15

Musterlösungen zur Integrations- und Maßtheorie

Aufgabe 53. **(a)** Sei

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 - y^2 - z^2 = 1\}$$

das 2-schalige Hyperboloid. Zeigen Sie, dass M eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass der Kegel

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$$

keine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist. (Hinweis: Überlegen Sie, warum eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ lokal wegzusammenhängend ist.)

Lösungsvorschlag. **(a)** Betrachte $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2 - y^2 - z^2 - 1$. Dann ist $f^{-1}(0) = M$ und

$$\operatorname{grad}(f)(x,y,z) = (2x, -2y, -2z) \neq 0$$

für $(x,y,z) \neq (0,0,0)$. Aber $(0,0,0) \notin M$. Deshalb ist f eine definierende Gleichung für M und alle $p \in M$. Es ist damit M eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$.

(b) Ist $M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $p \in M$, so gibt es nach einem Satz aus der Vorlesung offene Mengen $V \subseteq \mathbb{R}^2$ und $U \subseteq M$ (relativ-offen in M) mit $p \in U$ und eine reguläre Parametrisierung $\varphi\colon V \to U$, die sogar ein Homöomorphismus ist (d.i., auch $\varphi^{-1}\colon U \to V$ ist stetig). Sei $x_0 = \varphi^{-1}(p) \in V$. Wir können dann φ auf $B_\varepsilon(x_0)$ einschränken (mit $\varepsilon > 0$ so klein, dass $B_\varepsilon(x_0) \subseteq V$ ist) und erhalten einen Homöomorphismus $\varphi_\varepsilon\colon B_\varepsilon(x_0) \to U_\varepsilon$ mit $U_\varepsilon := \varphi(B_\varepsilon(x_0)) \subseteq M$, welches eine (etwas kleinere) relativ-offene Umgebung von $p \in M$ ist. Dann ist auch die nochmalige Einschränkung

$$\psi := \varphi_\varepsilon|(B_\varepsilon \setminus \{x_0\})\colon B_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\} \to U_\varepsilon \setminus \{p\}$$

ein Hömöomorphismus. Da Homöomorphismen Wegzusammenhang erhalten (warum?), muss damit auch $U_\varepsilon \setminus \{p\}$ eine wegzusammenhängende offene Umgebung von p sein, denn die gelochte Scheibe $B_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}$ ist wegzusammenhängend.

Wir zeigen jetzt, dass die Spitze $p = 0$ des Kegels K solch eine Umgebung nicht hat. Beachte, dass es nicht ausreicht zu argumentieren, dass $\operatorname{grad}(f)(0,0,0) = (0,0,0)$ ist für $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$, denn es könnte ja vielleicht noch eine andere, bessere Funktion g geben, die um p definiert ist, K dort beschreibt und $\operatorname{grad}(g)(p) \neq 0$ erfüllt. Das kann es aber nicht geben, weil für keine Umgebung $U \subseteq K$ von p gilt, dass $U \setminus \{p\}$ wegzusammenhängend ist. $U \setminus \{p\}$ muss nämlich Punkte $q_1 = (x_1, y_1, z_1)$ und $q_2 = (x_2, y_2, z_2)$ mit $z_1 > 0$ und $z_2 < 0$ enthalten. Für eine diese beiden Punkte verbindende stetige Kurve $\alpha\colon [0,1] \to K$, $\alpha(0) = q_1$ und $\alpha(1) = q_2$, muss es dann nach dem Zwischenwertsatz einen Parameter $t_0 \in (0,1)$ geben mit $\alpha_3(t_0) = 0$. Der einzige Punkt $q_0 = (x_0, y_0, z_0)$ von K mit $z_0 = 0$ ist aber $q_0 = p$, weil aus $x_0^2 + y_0^2 = 0$ unmittelbar $x_0 = y_0 = 0$ folgt. Es ist aber $p \notin U \setminus \{p\}$. Daher kann K keine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ sein. (In den anderen Punkten von K außer p natürlich schon.)

Aufgabe 54. (a) Wir betrachten für jedes $n \in \mathbb{N}$ *die orthogonale Gruppe*

$$\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathrm{Mat}_n\mathbb{R} : \ A^T A = \mathbf{1}_n\} \subseteq \mathrm{Mat}_n\mathbb{R} = \mathbb{R}^{n^2}.$$

(a) Sei $F\colon \mathrm{Mat}_n\mathbb{R} \to \mathrm{Sym}_n\mathbb{R}$, $A \mapsto A^T A - \mathbf{1}$, wo $\mathrm{Sym}_n\mathbb{R}$ den Unterraum aller symmetrischen Matrizen in $\mathrm{Mat}_n\mathbb{R}$ bezeichnet. Begründen Sie, warum F stetig differenzierbar ist und zeigen Sie dann, dass das Differential $DF_A\colon \mathrm{Mat}_n\mathbb{R} \to \mathrm{Sym}_n\mathbb{R}$ von F in $A \in \mathrm{Mat}_n\mathbb{R}$ gegeben ist durch

$$DF_A(B) = A^T B + B^T A.$$

(b) Zeigen Sie nun, dass DF_A für jedes $A \in \mathrm{O}(n)$ surjektiv ist und schließen Sie daraus, dass $\mathrm{O}(n)$ eine $\frac{1}{2}n(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathrm{Mat}_n\mathbb{R}$ ist.

Lösungsvorschlag. (a) Die Komponenten $A \mapsto F_{ij}(A)$ (für $1 \le i \le j \le n$) sind quadratische Polynome in den Einträgen von A und damit sicher stetig differenzierbar. Für das Differential $DF_A\colon \mathrm{Mat}_n\mathbb{R} \to \mathrm{Sym}_n\mathbb{R}$ betrachten wir $DF_A(B) \in \mathrm{Sym}_n\mathbb{R}$ als Richtungsableitung von F in A in Richtung B, d.h.: Wir betrachten die Kurve $(-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathrm{Mat}_n\mathbb{R}$, $t \mapsto A + tB$ (für ein $\varepsilon > 0$), und benutzen dann, dass

$$DF_A(B) = \frac{d}{dt}|_{t=0} F(A + tB)$$

ist. Es ist nämlich

$$F(A + tB) = (A + tB)^T (A + tB) - \mathbf{1} = (A^T A - \mathbf{1}) + t(B^T A + A^T B) + t^2 B^T B.$$

Daran sieht man, dass

$$DF_A(B) = A^T B + B^T A$$

ist

(b) Sei nun $A \in \mathrm{O}(n)$. Wir zeigen, dass dann $DF_A\colon \mathrm{Mat}_n\mathbb{R} \to \mathrm{Sym}_n\mathbb{R}$ surjektiv ist. Sei dazu $C \in \mathrm{Sym}_n\mathbb{R}$ beliebig, $C^T = C$. Wir setzen dann $B := \frac{1}{2}AC$. Dann ist wegen $A^T A = AA^T = \mathbf{1}$

$$DF_A(B) = A^T(\frac{1}{2}AC) + (\frac{1}{2}C^T A^T)A = C,$$

also DF_A tatsächlich surjektiv. Da

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Mat}_n\mathbb{R} = n^2 \text{ und } \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Sym}_n\mathbb{R} = \frac{1}{2}n(n+1)$$

ist, ist $\mathrm{O}(n) \subseteq \mathrm{Mat}_n\mathbb{R}$ tatsächlich eine s-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit

$$s = n^2 - \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}n(n-1).$$

Aufgabe 55. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}_+$. Zeigen Sie, dass *das Ellipsoid*

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$$

ein Kompaktum mit glattem Rand in $\mathbb{R}^3$ ist und berechnen Sie das äußere Einheitsnormalenfeld $\nu\colon \partial E \to \mathbb{R}^3$ von E.

Lösungsvorschlag. Wir betrachten $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1.$$

Dann ist f eine globale beschreibende Funktion für E als Kompaktum mit glattem Rand, denn nach Definition ist $E = f^{-1}((-\infty, 0])$ und damit zunächst abgeschlossen. Ist, sagen wir, $a \leq b \leq c$, so ist E auch in der Kugel um 0 mit Radius c enthalten und damit auch beschränkt denn für $(x, y, z) \in E$ ist

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

Damit ist E schon mal kompakt und wir prüfen jetzt, ob E glatten Rand hat. Dazu beobachten wir

$$\operatorname{grad}(f)(x, y, z) = (\frac{2}{a^2}x, \frac{2}{b^2}y, \frac{2}{c^2}z) \neq (0, 0, 0)$$

für $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$. Aber $(0, 0, 0) \notin M := \partial E$,

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}.$$

Nun steht $N\colon M \to \mathbb{R}^3$, $N(p) = \operatorname{grad}(f)(p)$, senkrecht auf TM_p und zeigt nach außen, da

$$f(p + tN(p)) > 0$$

ist, sogar für alle $t > 0$. Das sieht man im Bild des Ellipsoids eigentlich direkt oder man rechnet für $p = (x, y, z) \in M$:

$$\begin{aligned}
f(p + tN(p)) &= f((1 + \frac{2t}{a^2})x, (1 + \frac{2t}{b^2})y, (1 + \frac{2t}{c^2})z) \\
&= \frac{x^2}{a^2}(1 + \frac{2t}{a^2})^2 + \frac{y^2}{b^2}(1 + \frac{2t}{b^2})^2 + \frac{z^2}{c^2}(1 + \frac{2t}{c^2})^2 - 1 \\
&= \underbrace{(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1)}_{=0} + 4t \underbrace{(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4})}_{>0} + 4t^2 \underbrace{(\frac{x^2}{a^6} + \frac{y^2}{b^6} + \frac{c^2}{c^6})}_{>0} > 0.
\end{aligned}$$

Damit ist $\nu\colon M \to \mathbb{R}^3$,

$$\nu(x, y, z) = \frac{N(x, y, z)}{\|N(x, y, z)\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}(\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2})$$

das äußere Einheitsnormalenfeld.

Aufgabe 56. Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand in $\mathbb{R}^n$ und $\nu\colon \partial K \to \mathbb{R}^n$ ihr äußeres Einheitsnormalenfeld. Für eine stetig differenzierbare Funktion $f\colon K \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^1(K)$, definiert man *die Normalenableitung von f in $x \in \partial K$* durch

$$D_\nu f(x) := \langle \mathrm{grad}(f)(x), \nu(x) \rangle.$$

Zeigen Sie:

(a) (1. Greensche Formel) Ist $f \in \mathcal{C}^1(K)$ und $g \in \mathcal{C}^2(K)$, so gilt:

$$\int_K (\langle \mathrm{grad}(f), \mathrm{grad}(g) \rangle + f \triangle g)\, d\lambda = \int_{\partial K} f D_\nu g \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

(b) (2. Greensche Formel) Sind $f, g \in \mathcal{C}^2(K)$, so gilt:

$$\int_K (f \triangle g - g \triangle f)\, d\lambda = \int_{\partial K} (f D_\nu g - g D_\nu f)\, d\mathcal{H}^{n-1}$$

Lösungsvorschlag. (a) Wir betrachten das Vektorfeld $X\colon K \to \mathbb{R}^n$, $X = f \cdot \mathrm{grad}(g)$, auf K, welches nach den Voraussetzungen stetig differenzierbar ist, und berechnen seine Divergenz:

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(X) &= \sum_{j=1}^n D_j X_j = \sum_{j=1}^n (D_j f D_j g + f \cdot D_j D_j g) \\ &= \langle \mathrm{grad}(f), \mathrm{grad}(g) \rangle + f \triangle g. \end{aligned}$$

Anwendung des Gaußschen Divergenzsatzes liefert dann

$$\int_K (\langle \mathrm{grad}(f), \mathrm{grad}(g) \rangle + f \triangle g)\, d\lambda = \int_{\partial K} \langle f \mathrm{grad}(g), \nu \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\partial K} f D_\nu g \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

(b) Wendet man die 1. Greensche Formel einmal für (f, g) und einmal für (g, f) an, so erhält man

$$\begin{aligned} \int_K \langle \mathrm{grad}(f), \mathrm{grad}(g) \rangle + f \triangle g)\, d\lambda &= \int_{\partial K} f D_\nu g \, d\mathcal{H}^{n-1} \\ \int_K \langle \mathrm{grad}(g), \mathrm{grad}(f) \rangle + g \triangle f)\, d\lambda &= \int_{\partial K} g D_\nu f \, d\mathcal{H}^{n-1}. \end{aligned}$$

Subtraktion auf beiden Seiten dieser Gleichungen und Linearität des Integrals liefern dann tatsächlich

$$\int_K (f \triangle g - g \triangle f)\, d\lambda = \int_{\partial K} (f D_\nu g - g D_\nu f)\, d\mathcal{H}^{n-1}.$$