Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose

WiSe 2020/21
01.03.2021
Blatt 16

Musterlösungen zur Integrations- und Maßtheorie

Aufgabe 57. (a) Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) ein Kompaktum mit glattem Rand und $\nu\colon \partial K \to \mathbb{R}^n$ ihr äußeres Einheitsnormalenfeld. Zeigen Sie:

$$\lambda^n(K) = \frac{1}{n} \int_{\partial K} \langle x, \nu(x) \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}(x).$$

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von (a) erneut (vgl. Aufgabe 52.b) für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\tau_{n-1} = n\omega_n.$$

Lösungsvorschlag. (a) Wir betrachten das Vektorfeld $X = \mathrm{id}\colon K \to \mathbb{R}^n$, $X(x) = x$. Das ist stetig differenzierbar und hat Divergenz

$$\mathrm{div}(X)(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_j}{\partial x_j}(x) = \sum_{j=1}^{n} 1 = n.$$

Nach dem Gaußschen Satz ist daher

$$\int_{\partial K} \langle x, \nu(x) \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}(x) = \int_{\partial K} \langle X, \nu \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1} = \int_K \mathrm{div}(X) \, d\lambda = n \cdot \int_K d\lambda = n\lambda^n(K).$$

(b) Im Falle $K = \mathbb{B}^n$ und damit $\partial K = \mathbb{S}^{n-1}$ ist $\nu\colon \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$, $\nu(x) = x$, das äußere Einheitsnormalenfeld an K, denn es steht senkrecht auf $T\mathbb{S}^{n-1}_x = x^\perp$, hat Länge 1 und zeigt nach außen. Es folgt:

$$\langle x, \nu(x) \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2 = 1, \quad \forall\, x \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

Also ist

$$\omega_n = \lambda^n(\mathbb{B}^n) = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} 1 \, d\mathcal{H}^{n-1} = \frac{1}{n} \mathcal{H}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) = \frac{1}{n} \tau_{n-1}.$$

Aufgabe 58. (a) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet ($n \in \mathbb{N}$) und $X\colon G \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Für jedes $x \in G$ und $\delta > 0$ betrachten wir den Ball $B_\delta(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \leq \delta\}$, so fern er in G liegt, und sein äußeres Einheitsnomalenfeld $\nu\colon \partial B_\delta(x) \to \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass für alle $x \in G$ gilt:

$$\mathrm{div}(X)(x) = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\omega_n \delta^n} \int_{\partial B_\delta(x)} \langle X, \nu \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

(b) In der *Elektrostatik* wird die in einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^3$ vorhandene *Ladung* Q durch eine *Ladungsdichte* $\rho\colon G \to \mathbb{R}$ beschrieben, d.h.: In jedem Kompaktum $K \subseteq G$ befindet sich die

Ladung $Q(K) := \int_K \rho \, d\lambda$. *Das* 1. *Maxwellsche Gesetz* (in seiner integrierten Form) besagt nun, dass sich aufgrund der Ladung Q *ein elektrisches Feld* $E\colon G \to \mathbb{R}^3$ einstellt, so dass für jedes Kompaktum mit glattem Rand $K \subseteq G$ gilt: *Der Fluss von* E *aus* K *heraus*, d.i. *das Flussintegral* $\int_{\partial K} \langle E, \nu \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}$, ist gleich der Ladung in K,

$$Q(K) = \int_{\partial K} \langle E, \nu \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

(*Ladung als Quelle des elektrischen Feldes*). Zeigen Sie, dass dann (bei stetigem ρ und stetig differenzierbarem E) gilt:

$$\operatorname{div}(E) = \rho$$

(so genannte differentielle Form des 1. Maxwell-Gesetzes) und umgekehrt, dass aus der differentiellen Form auch das 1. Maxwell-Gesetz in seiner integrierten Form folgt.

Lösungsvorschlag. (a) (i) Ist $f\colon G \to \mathbb{R}$ ($G \subseteq \mathbb{R}^n$) eine stetige Funktion und $x_0 \in G$, so gibt es ein $\delta_0 > 0$, so dass $B_{\delta_0}(x_0) \subseteq G$ ist und daher das Integral (der so genannte *Mittelwert von* $f|B_\delta(x_0)$)

$$\frac{1}{\omega_n \delta^n} \int_{B_\delta(x_0)} f(x) \, dx,$$

für alle $0 < \delta < \delta_0$, existiert. Wir behaupten, dass der Grenzwert für $\delta \to 0$ existiert und es gilt

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\omega_n \delta^n} \int_{B_\delta(x_0)} f(x) \, dx = f(x_0).$$

Denn ist $\varepsilon > 0$ beliebig, so gibt es wegen der Stetigkeit von f in x_0 ein $\delta_1 < \delta_0$, so dass für alle $x \in B_{\delta_1}(x_0)$ gilt: $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$. Wegen $\omega_n \delta^n = \lambda^n(B_\delta(x_0))$ folgt daraus für alle $0 < \delta < \delta_1$:

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{\omega_n \delta^n} \int_{B_\delta(x_0)} f(x) \, dx - f(x_0)\right| &= \left|\frac{1}{\omega_n \delta^n} \int_{B_\delta(x_0)} f(x) \, dx - \frac{1}{\omega_n \delta^n} \int_{B_\delta(x_0)} f(x_0) \, dx\right| \\ &\leq \frac{1}{\omega_n \delta^n} \int_{B_\delta(x_0)} |f(x) - f(x_0)| \, dx \leq \frac{1}{\omega_n \delta^n} \int_{B_\delta(x_0)} \varepsilon \, dx = \frac{\varepsilon \cdot (\omega_n \delta^n)}{\omega_n \delta^n} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Das zeigt die Behauptung.

(ii) Mit dem Divergenzsatz von Gauß folgt für ein stetig differenzierbares $X\colon K \to \mathbb{R}^n$ ($K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt mit glattem Rand und äußerem Einheitsnormalenfeld ν) und $x_0 \in K$:

$$\frac{1}{\omega_n \delta^n} \int_{\partial B_\delta(x_0)} \langle X, \nu \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1} = \frac{1}{\omega_n \delta^n} \int_{B_\delta(x_0)} \operatorname{div}(X) \, d\lambda \xrightarrow{\delta \to 0} \operatorname{div}(X)(x_0),$$

denn $\operatorname{div}(X)\colon K \to \mathbb{R}$ ist dann ja noch stetig.

(b) (i) Gilt das 1. Maxwellsche Gesetz in der integrierten Form, so ist für jedes $x_0 \in G$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(E)(x_0) &= \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\omega_n \delta^n} \int_{\partial B_\delta(x_0)} \langle E, \nu \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1} = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\omega_n \delta^n} Q(B_\delta(x_0)) \\ &= \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\omega_n \delta^n} \int_{B_\delta(x_0)} \rho \, d\lambda = \rho(x_0). \end{aligned}$$

(ii) Gilt das 1. Maxwellsche Gesetz in der differentiellen Form, so folgt unmittelbar aus dem Gaußschen Satz für jedes Kompaktum mit glattem Rand $K \subseteq G$ und äußerem Einheitsnormalenfeld ν, dass

$$Q(K) = \int_K \rho \, d\lambda = \int_K \operatorname{div}(E) \, d\lambda = \int_{\partial K} \langle E, \nu \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$