Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose
Jonathan Walz

WiSe 2020/21
April 2021

Musterlösungen zur Wiederholungsklausur der Integrations- und Maßtheorie

Aufgabe 1. Sei λ das Borel-Lebesguesche Maß auf dem Einheitsintervall $I = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass für das Maß aller in I enthaltenen irrationalen Zahlen $B \subseteq I$ gilt: $\lambda(B) = 1$.

(b) Begründen Sie maßtheoretisch, dass zwischen zwei rationalen Zahlen in I stets eine irrationale Zahl liegen muss.

Lösungsvorschlag. (a) Für jeden Punkt $x \in I$ ist nach Definition des Borel-Lebesgueschen Maßes λ auf I

$$\lambda(\{x\}) = \lambda([x, x]) = x - x = 0.$$

Für jede abzählbare Teilmenge $A \subseteq I$ ist mit der σ-Additivität von λ dann

$$\lambda(A) = \sum_{x \in A} \lambda(\{x\}) = \sum_{x \in A} 0 = 0.$$

Da $\mathbb{Q} \cap I$ abzählbar ist, ist also $\lambda(\mathbb{Q} \cap I) = 0$. Für das Komplement $B = I \setminus (\mathbb{Q} \cap I)$ aller irrationalen Zahlen in I ist dann wegen $\lambda(I) = 1 < \infty$:

$$\lambda(B) = \lambda(I) - \lambda(\mathbb{Q} \cap I) = 1 - 0 = 1.$$

(b) Seien $r, s \in \mathbb{Q} \cap I$ beliebig und o.E. $r < s$. Wäre $(r, s) \cap (I \setminus \mathbb{Q}) = \emptyset$, so wäre $(r, s) \subseteq \mathbb{Q} \cap I$ und damit mit der Monotonie des Maßes

$$0 = \lambda(\mathbb{Q} \cap I) \geq \lambda((r, s)) = s - r > 0,$$

was nicht geht. Es ist also $(r, s) \cap (I \setminus \mathbb{Q}) \neq \emptyset$ (und das Argument zeigt sogar, dass zwischen zwei rationalen Zahlen stets überabzählbar viele irrationale Zahlen liegen).

Aufgabe 2. Sei λ das Borel-Lebesguesche Maß auf $\mathbb{R}$ und $N \subseteq \mathbb{R}$ eine Borelsche Nullmenge. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$, die auf N den Wert ∞ annimmt und sonst Null ist.

(a) Zeigen Sie, dass f messbar ist.

(b) Zeigen Sie: $\int f \, d\lambda = 0$.

Lösungsvorschlag. (a) $f: \mathbb{R} \to [0, \infty]$ heißt messbar, wenn das Urbild jeder Borelschen Teilmenge von $[0, \infty]$ Borelsch in $\mathbb{R}$ ist. Wir zeigen, dass $f^{-1}(B) \subseteq \mathbb{R}$ Borelsch ist sogar für *alle* Teilmengen $B \subseteq [0, \infty]$. Nach Definition von f ist nämlich

$$f^{-1}(B) = \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } 0 \notin B,\ \infty \notin B \\ N, & \text{falls } 0 \notin B,\ \infty \in B \\ N^c, & \text{falls } 0 \in B,\ \infty \notin B \\ \mathbb{R}, & \text{falls } 0 \in B,\ \infty \in B \end{cases},$$

und in allen vier Fällen ist $f^{-1}(B)$ damit Borelsch. Es ist also f messbar.

(b) Wir betrachten die Funktionen $f_n: \mathbb{R} \to [0, \infty]$, $f_n = n\chi_N$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann gilt offenbar, dass (f_n) punktweise monoton steigend gegen f konvergiert und

$$\int f_n \, d\lambda = n \cdot \lambda(N) = n \cdot 0 = 0$$

ist, denn f_n ist eine Treppenfunktion. Nach dem Satz von Levi ist daher

$$\int f \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

Aufgabe 3. Sei $X = (0, \infty)$ und λ das Borel-Lebesguesche Maß auf X.

(a) Geben Sie Definition des Vektorraums $V = \mathcal{L}^1(X, \lambda)$ an und dann ein $f \in V$, welches nicht beschränkt ist. Begründen Sie.

(b) Definieren Sie auch den Vektorraum $W = \mathcal{L}^2(X, \lambda)$ und geben Sie begründet ein $f \in V \setminus W$ und ein $g \in W \setminus V$ an.

Lösungsvorschlag. (a) Man setzt

$$V := \mathcal{L}^1(X, \lambda) := \{f: X \to \mathbb{R} \text{ messbar} : \int |f| \, d\lambda < \infty\}.$$

Das ist ein reeller Untervektorraum aller messbaren Funktionen $\mathcal{F}(X)$ auf X.

Wir betrachten z.B. die Funktion $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{für } 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{für } 1 < x \end{cases}.$$

Dann ist $f|(0, 1]$ uneigentlich Riemann-integrierbar und ihr Integral stimmt mit dem Lebesgue-Integral überein. Nach dem Hauptsatz ist

$$\int |f| \, d\lambda = \lim_{a\to 0} \int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \, dx = \lim_{a\to 0} 2\sqrt{x}\big|_a^1 = \lim_{a\to 0}(2 - 2\sqrt{a}) = 2 < \infty,$$

also ist $f \in V$. Wegen $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$ ist aber f nicht beschränkt.

(b) Ähnlich definiert man

$$W := \mathcal{L}^2(X, \lambda) = \{f \in \mathcal{F}(X) : \int |f|^2 \, d\lambda < \infty\}.$$

$W \subseteq \mathcal{F}(X)$ ist dann ebenfalls ein reeller Untervektorraum.

Die messbare Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ aus Teil (a) liegt in V, aber nicht in W, weil

$$\int |f|^2 \, d\lambda = \int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{a \to 0} \ln(x)|_a^1 = \lim_{a \to 0}(-\ln(a)) = \infty.$$

ist. Die messbare Funktion $g\colon X \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } 0 < x < 1 \\ \frac{1}{x}, & \text{für } 1 \leq x < \infty \end{cases},$$

ist nicht in V, weil

$$\int |g| \, d\lambda = \lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \to \infty} \ln(b) = \infty$$

ist, aber in W, denn

$$\int |g|^2 \, d\lambda = \lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} \, dx = \lim_{b \to \infty} -\frac{1}{x}|_1^b = \lim_{b \to \infty} (1 - \frac{1}{b}) = 1 < \infty.$$

Aufgabe 4. Sei λ^2 bzw. λ^3 das Borel-Lebesguesche Maß auf $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$.
(a) Sei $E_{a,b} \subseteq \mathbb{R}^2$ die Standard-Ellipse (samt ihrem Inneren) mit Hauptachsenlängen $a, b \in \mathbb{R}_+$,

$$E_{a,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}.$$

Zeigen Sie, dass für den Flächeninhalt $F(a, b) = \lambda^2(E_{a,b})$ gilt: $F(a, b) = \pi ab.$
(b) Wir betrachten das *elliptische Paraboloid* der Höhe $h > 0$ (samt seinem Inneren),

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z \in [0, h], \ z \geq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\}$$

(fur $a, b \in \mathbb{R}_+$). Zeigen Sie, dass für das Volumen $V = \lambda^3(P)$ von P gilt: $V = \frac{1}{2}\pi abh^2$.

Lösungsvorschlag. (a) $E_{a,b} \subseteq \mathbb{R}^2$ ist das Bild der Einheitskreisscheibe $\mathbb{B}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ unter der linearen Transformation $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$T(x_1, x_2) = (ax_1, bx_2).$$

Denn für $y_1 = ax_1$ und $y_2 = bx_2$ gilt:

$$\frac{y_1^2}{a2} + \frac{y_2^2}{b^2} \leq 1 \ \Leftrightarrow \ x_1^2 + x_2^2 \leq 1.$$

Weil $\lambda^2(\mathbb{B}^2) = \pi$ und $\det(T) = ab > 0$ ist, folgt mit der linearen Transformationsformel für λ:

$$F(a, b) = \lambda^2(E_{a,b}) = \lambda^2(T\mathbb{B}^2) = |\det T|\lambda(\mathbb{B}^2) = ab\pi.$$

(b) Für $z \in (0, h]$ ist der z-Schnitt von P gegeben durch

$$P_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{(a\sqrt{z})^2} + \frac{y^2}{(b\sqrt{z})^2} \leq 1\},$$

also eine Ellipse mit Hauptachsen $a\sqrt{z}$ und $b\sqrt{z}$. Nach Teil (a) gilt:

$$\lambda^2(P_z) = (a\sqrt{z} \cdot b\sqrt{z})\pi = abz\pi.$$

Mit Cavalieris Prinzip führt das zu

$$V = \lambda^3(P) = \int_0^h \lambda^2(P_z)\, dz = ab\pi \cdot \frac{1}{2} z^2|_0^h = \frac{1}{2}\pi abh^2.$$

Aufgabe 5. Seien $\mathcal{H}^2$ bzw. λ^3 das 2-dimensionale Hausdorffmaß bzw. das Borel-Lebesguesche Maß auf $\mathbb{R}^3$.

(a) Sei $Z \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Zylinder mit Grundflächenradius $r > 0$ und Höhe $h > 0$ sowie $F = \mathcal{H}^2(\partial Z)$ sein Oberflächeninhalt einschließlich des Bodens und des Deckels. Zeigen Sie: $F = 2\pi r(r + h)$.

(b) Berechnen Sie auch das Volumen $V = \lambda^3(Z)$ des Zylinders. Für welches Verhältnis $q = \frac{r}{h}$ ist das *isoperimetrische Verhältnis* $Q = \frac{V^2}{F^3}(q)$ maximal? Begründen Sie.

Lösungsvorschlag. (a) Die Mantelfläche $M \subseteq \partial Z$ des Zylinders mit Radius $r > 0$ und Höhe $h > 0$ ist nach Aufschneiden entlang einer Mantellinie flächengleich zum Flächeninhalt eines Rechteckes $R \subseteq \mathbb{R}^2$ mit Seitenängen $2\pi r$ (dem Umfang der Kreisbogenlinie des Bodens bzw. Deckels) und h. Also ist

$$\mathcal{H}^2(M) = \lambda^2(R) = 2\pi r \cdot h.$$

[Wem das Argument nicht präzise genug ist, der baue aus dem „Abwickeln“ eine reguläre Parametrisierung $\varphi\colon R \to M \subseteq \mathbb{R}^3$ mit Jacobischer $J_\varphi = 1$.] Der Boden und der Deckel haben offenbar jeweils Flächeninhalt πr^2, so dass man insgesamt folgendes bekommt:

$$F = \mathcal{H}^2(\partial Z) = 2\pi r \cdot h + 2 \cdot (\pi r^2) = 2\pi r(r + h).$$

(b) Das Volumen des Zylinders ist mit Cavalieri

$$V = \lambda^3(Z) = \int_0^h \lambda^2(Z_z)\, dz = \int_0^h \pi r^2\, dz = \pi r^2 \cdot h,$$

denn die z-Schnitte von Z sind alles Kreisscheiben vom Radius r (wenn man die Koordinaten so legt, dass die z-Achse die Symmetrieachse des Zylinders ist). Für das isoperimetrische Verhältnis Q ergibt sich daher

$$Q = \frac{V^2}{F^3} = \frac{\pi^2 r^4 h^2}{8\pi^3 r^3 (r + h)^3} = \frac{1}{8\pi} \cdot \frac{\frac{r}{h}}{(\frac{r}{h} + 1)^3} = \frac{1}{8\pi} \cdot \frac{q}{(1 + q)^3}$$

für $q := \frac{r}{h} > 0$. Bis auf den Faktor $\frac{1}{8\pi}$ ist also Q durch die positive Funktion $f\colon (0, \infty) \to (0, \infty)$,

$$f(q) = \frac{q}{(1 + q)^3}$$

gegeben. Für diese gilt:

$$\lim_{q\to 0} f(q) = 0, \quad \lim_{q\to\infty} f(q) = 0,$$

so dass f wegen ihrer Stetigkeit nach dem Satz von Weierstraß ihr Supremum annimmt. An einer solchen Maximalstelle $q_0 \in (0,\infty)$ muss f wegen ihrer Differenzierbarkeit $f'(q_0) = 0$ erfüllen. Es ist aber

$$f'(q) = \frac{(1+q)^3 - q\cdot 3(1+q)^2}{(1+q)^6} = \frac{(1+q)-3q}{(1+q)^4} = \frac{1-2q}{(1+q)^4},$$

und diese Ableitungsfunktion verschwindet nur bei $q_0 = \frac{1}{2}$. Für genau $h = 2r$ (Höhe = Durchmesser) ist also das isoperimetrische Verhältnis maximal. (Bei vorgegebenen Flächeninhalt F des Randes hat also der Zylinder bei diesem Verhältnis von Höhe zu Durchmesser das maximale Volumen.)

Aufgabe 6. Wir betrachten die *Zylinderkoordinaten* $\Phi\colon (0,\infty)\times(0,2\pi)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$,

$$\Phi(r,\vartheta,z) = (r\cos\vartheta, r\sin\vartheta, z).$$

(a) Berechnen Sie die Jacobische von Φ und bestimmen Sie das Bild von Φ.

(b) Wir betrachten die etwas aufgedickte Mantelfläche des Zylinders mit Radius $r > 0$ und Höhe $h > 0$,

$$M = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ z\in[0,h],\ (r-\varepsilon)^2 \le x^2+y^2 \le (r+\varepsilon)^2\}$$

(mit $0 < \varepsilon < r$). Zeigen Sie für das Volumen V von M: $V = 4\pi rh\varepsilon$.

Lösungsvorschlag. **(a)** Die Jacobi-Matrix von Φ ist

$$\mathrm{Jac}(\Phi)(r\vartheta,z) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & r\cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und damit mit Hilfe von Laplaces Entwicklungssatz (nach der letzten Spalte)

$$J_\Phi(r,\vartheta,z) = |\det(\mathrm{Jac}(\Phi)(r,\vartheta,z)| = |\cos\vartheta(r\cos\vartheta) - \sin\vartheta(-r\sin\vartheta)| = |r(\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta)| = r.$$

Das Bild von Φ ist

$$\mathrm{im}(\Phi) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ y=0,\ x\ge 0\}.$$

(b) Für jedes $z\in[0,h]$ ist der z-Schnitt von M gegeben durch

$$M_z = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ (r-\varepsilon)^2 \le x^2+y^2 \le (r+\varepsilon)^2\}$$

und ist damit gegeben durch einen Kreisring vom Innenradius $r-\varepsilon > 0$ und Außenradius $r+\varepsilon$. Er hat damit Flächeninhalt (da die „innere Mantelfläche“ eine λ^2-Nullmenge ist)

$$\lambda^2(M_z) = \pi(r+\varepsilon)^2 - \pi(r-\varepsilon)^2 = 4\pi r\varepsilon.$$

Mit Cavalieris Prinzip gilt daher:

$$V = \lambda^3(M) = \int_0^h \lambda^2(M_z)\,dz = 4\pi r\varepsilon h.$$