Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose

WiSe 2020/21
März 2021
Blatt 01-16

Musterlösungen zur Integrations- und Maßtheorie

Aufgabe 01. Sei K ein Körper. Ein 4-Tupel $(A, +, *, \cdot)$ heißt *eine (assoziative) K-Algebra*, wenn $+, *$ innere Verknüpfungen auf A sind, also $+, *\colon A \times A \to A$, und $\cdot$ eine äußere Verknüpfung auf A ist, also $\cdot\colon K \times A \to A$, so dass gilt: (i) $(A, +, *)$ ist ein Ring; (ii) $(A, +, \cdot)$ ist ein K-Vektorraum; (iii) $\lambda \cdot (x * y) = (\lambda \cdot x) * y = x * (\lambda \cdot y)$, für alle $\lambda \in K$, $x, y \in A$.

(a) Sei $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ der Körper mit zwei Elementen und X eine beliebige Menge. Definieren Sie auf allen Abbildungen von X nach $\mathbb{F}_2$, $A := \mathrm{Abb}(X, \mathbb{F}_2)$, in naheliegender Weise Verknüpfungen $(+, *, \cdot)$, mit denen $(A, +, *, \cdot)$ zu einer $\mathbb{F}_2$-Algebra (mit Einselement) wird.

(b) Wir definieren nun für jede Teilmenge $Y \subseteq X$ ihre *charakteristische Funktion* $\chi_Y\colon X \to \mathbb{F}_2$ durch $\chi_Y(x) = 1$, falls $x \in Y$ ist, und $\chi_Y(x) = 0$, falls $x \notin Y$ ist. Zeigen Sie, dass die Zuordnung $\Phi\colon \mathfrak{P}(X) \to \mathrm{Abb}(X, \mathbb{F}_2)$, $Y \mapsto \chi_Y$, bijektiv ist.

(c) Welchen mengentheoretischen Verknüpfungen auf $\mathfrak{P}(X)$ entsprechen nun via Φ den inneren Verknüpfungen $+$ und $*$ von $\mathrm{Abb}(X, \mathbb{F}_2)$ auf $\mathfrak{P}(X)$? Zeigen Sie: Eine Teilmenge $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ ist bezüglich der induzierten Strukturen $(+, *, \cdot)$ via Φ genau dann eine $\mathbb{F}_2$-*Unteralgebra mit Eins*, wenn gilt: (i) $X \in \mathfrak{A}$; (ii) $\forall Y \in \mathfrak{A} : Y^c \in \mathfrak{A}$; (iii) $\forall Y_1, Y_2 \in \mathfrak{A}$: $Y_1 \cup Y_2 \in \mathfrak{A}$.

Lösungsvorschlag. (a) Die Verknüpfungen $+$, $*$ und $\cdot$ auf $A = \mathrm{Abb}(X, \mathbb{F}_2)$ werden natürlich *punktweise* definiert:

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad (f * g)(x) := f(x)g(x), \quad (\lambda \cdot f)(x) := \lambda f(x),$$

für alle $x \in X$, $\lambda \in K$ und $f, g \in A$. Da $\mathbb{F}_2$ ein Körper ist, folgt leicht, dass $(A, +, *, \cdot)$ eine $\mathbb{F}_2$-Algebra mit Eins ist. Das Einselement wird offenbar durch die konstante Funktion $c_1\colon X \to \mathbb{F}_2$, $c_1(x) = 1$, gegeben. [*Anmerkung*: Man beachte, dass für eine Menge X mit mindestens 2 Elementen A selbst kein Körper ist, da Elemente ungleich Null, die aber Nullstellen haben, offenbar nicht invertierbar sind.]

(b) Für jedes $f \in \mathrm{Abb}(X, \mathbb{F}_2)$ setzen wir

$$Y_f := \{x \in X : f(x) = 1\}.$$

Dann ist $\Psi\colon \mathrm{Abb}(X, \mathbb{F}_2) \to \mathfrak{P}(X)$, $f \mapsto Y_f$, invers zu Φ, denn

$$\Psi \circ \Phi(Y) = \Psi(\chi_Y) = \{x \in X : \chi_Y(x) = 1\} = Y$$

für alle $Y \in \mathfrak{P}(X)$ und für alle $f \in \mathrm{Abb}(X, \mathbb{F}_2)$ ist

$$\Phi \circ \Psi(f) = \Phi(Y_f) = \chi_{Y_f} = f,$$

denn da χ_{Y_f} auf Y_f gerade 1 und sonst 0 ist, stimmt χ_{Y_f} also mit f überein. (Beachte, dass f ja nur die Werte 0 und 1 annehmen kann.) Φ ist damit bijektiv.

(c) Wir setzen also die Verknüpfungen $+, *\colon \mathfrak{P}(X) \times \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(X)$ so fest:

$$Y_1 + Y_2 := \Phi^{-1}(\Phi(Y_1) + \Phi(Y_2)), \quad Y_1 * Y_2 := \Phi^{-1}(\Phi(Y_1) * \Phi(Y_2)).$$

Da

$$\chi_{Y_1} * \chi_{Y_2} = \chi_{Y_1 \cap Y_2}$$

ist, denn $\chi_{Y_1}\chi_{Y_2}(x) = 1$, genau wenn $\chi_{Y_1}(x) = 1$ und $\chi_{Y_2}(x) = 1$ ist, folgt: $Y_1 * Y_2 = Y_1 \cap Y_2$. Bei der Summe müssen wir etwas aufpassen. Da für $\lambda, \mu \in \mathbb{F}_2$

$$\lambda + \mu = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad (\lambda = 1, \mu = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda = 0, \mu = 1)$$

ist, denn $1 + 1 = 0$ in $\mathbb{F}_2$, gilt:

$$\chi_{Y_1} + \chi_{Y_2} = \chi_W,$$

genau für $W = Y_1 \setminus Y_2 \cup Y_2 \setminus Y_1$. Wir nennen

$$Y_1 \triangle Y_2 := Y_1 \setminus Y_2 \cup Y_2 \setminus Y_1$$

die *symmetrische Differenz von* Y_1 *und* Y_2 und stellen also fest, dass $Y_1 + Y_2 = Y_1 \triangle Y_2$ ist. (Natürlich ist die äußere Multiplikation $\cdot\colon \mathbb{F}_2 \times \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(X)$ via Φ gegeben durch

$$0 \cdot Y = \emptyset, \quad 1 \cdot Y = Y,$$

für alle $Y \in \mathfrak{P}(X)$, denn das Nullelement (bzgl. $+ = \triangle$) auf $\mathfrak{P}(X)$ ist offenbar die leere Teilmenge (und das Einselement die volle Teilmenge von X)).

Eine K-Unteralgebra B einer K-Algebra A ist eine nicht-leere Teilmenge $B \subseteq A$, für die gilt

(i) $\lambda b \in B$, $\forall \lambda \in K$, $\forall b \in B$;

(ii) $b_1 + b_2 \in B$, $\forall b_1, b_2 \in B$;

(iii) $b_1 b_2 \in B$, $\forall b_1, b_2 \in B$.

(Man unterdrückt häufig die Symbole $*$ und $\cdot$.) Im Falle unserer $\mathbb{F}_2$-Algebra $\mathfrak{P}(X)$ bedeutet (i) nur, dass $\emptyset = 0 \cdot Y$ (für ein $Y \in \mathfrak{A}$) in $\mathfrak{A}$ liegen muss. (ii) bedeutet demnach, dass mit $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{A}$ auch $Y_1 \triangle Y_2 \in \mathfrak{A}$ liegt, und (iii), dass mit $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{A}$ auch $Y_1 \cap Y_2 \in \mathfrak{A}$ ist. Ist nun $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ eine $\mathbb{F}_2$-Unterlagebra mit Eins, so folgt dann für jedes $Y \in \mathfrak{A}$, dass wegen $1 = X \in \mathfrak{A}$ auch

$$Y^c = X \setminus Y \cup \emptyset = X \setminus Y \cup Y \setminus X = X \triangle Y$$

in $\mathfrak{A}$ ist. Weiterhin ist dann wegen

$$Y_1 \cup Y_2 = (Y_1^c \cap Y_2^c)^c$$

mit $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{A}$ auch $Y_1 \cup Y_2 \in \mathfrak{A}$. Eine Unterlagebra $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ mit Eins erfüllt also auch die Axiome

(i') $X \in \mathfrak{A}$;

(ii') $Y^c \in \mathfrak{A}$, $\forall Y \in \mathfrak{A}$;

(iii') $Y_1 \cup Y_2 \in \mathfrak{A}$, $\forall Y_1, Y_2 \in \mathfrak{A}$.

Umgekehrt gelten für eine Teilmenge $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(X)$, die (i')-(iii') erfüllt, auch die Axiome (i)-(iii) zusammen mit $X \in \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}$ ist also eine $\mathcal{F}_2$-Unteralgebra mit Eins. Den Nachweis überlassen wir dem Leser.

Anmerkung: Der Buchstabe σ (Klein-Sigma) steht in der Maßtheorie meist für „abzählbare Summe". Mit „Summe" von zwei Mengen wurde früher auch oft die Vereinigung dieser gemeint. Deshalb ist eine σ-Algebra auf einer Menge X eine Unteralgebra $\mathfrak{A}$ der *Mengenalgebra* $\mathfrak{P}(X)$ mit Eins, wo für eine abzählbare Familie von Mitgliedern in $\mathfrak{A}$ auch ihre Vereinigung wieder in $\mathfrak{A}$ ist (σ-(iii')).

Aufgabe 02. (a) Recherchieren Sie zunächst den sogenannten *Großen Umordnungssatz* für absolut kovergente Reihen, formulieren und erläutern Sie ihn.

(b) Sei nun X eine abzählbare Menge (endlich oder unendlich) und $\varphi\colon X \to [0, \infty]$ eine beliebige Funktion (die wir als *Gewichtsfunktion* interpretieren). Zeigen Sie, dass durch $\mu_\varphi\colon \mathfrak{P}(X) \to [0, \infty]$,

$$\mu_\varphi(A) = \sum_{x \in A} \varphi(x),$$

ein Maß auf $(X, \mathfrak{P}(X))$ definiert wird.

(c) Sei X wieder abzählbar. Zeigen Sie, dass jedes Maß μ auf $(X, \mathfrak{P}(X))$ wie unter (b) zu Stande kommt und dass $\varphi\colon X \to [0, \infty]$ mit $\mu = \mu_\varphi$ eindeutig bestimmt ist.

Lösungsvorschlag. (a) *Der große Umordnungssatz* für absolut konvergente Reihen: Gegeben sei eine „Doppelreihe" reeller Zahlen

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$$

und weiterhin eine Bijektion $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Wir setzen dann $b_\nu := a_{\varphi(\nu)} \in \mathbb{R}$ $(\nu \in \mathbb{N})$. Jetzt fordern wir, dass die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu$ absolut konvergent ist und ihr Grenzwert sei $b \in \mathbb{R}$. Dann besagt der Große Umordnungssatz:

(i) Jede *Zeilenreihe* $Z_m := \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}$ $(m \in \mathbb{N})$ ist absolut konvergent;

(ii) jede *Spaltenreihe* $S_n := \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}$ $(n \in \mathbb{N})$ ist absolut konvergent;

(iii) die Reihen $\sum_{m=1}^{\infty} Z_m$ und $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ sind absolut konvergent und es gilt:

$$\sum_{m=1}^{\infty} Z_m = \sum_{m=1}^{\infty}(\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}) = \sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n = b.$$

Man kann also bei absolut konvergenten Reihen nicht nur die Summanden beliebig umordnen (vertauschen), ohne die absolute Konvergenz gegen den gleichen Grenzwert zu verlieren, sondern man kann auch die natürlichen Zahlen in (abzählbar viele) größere (als nur einelementige oder endliche) Teilmengen $M_k \subseteq \mathbb{N}$ $(k \in \mathbb{N})$ partionieren,

$$\mathbb{N} = M_1 \mathbin{\dot\cup} M_2 \mathbin{\dot\cup} \cdots,$$

dann zunächst nur über die Glieder, deren Indizes aus einem M_k ($k \in \mathbb{N}$) kommen, (in irgendeiner Reihenfolge) summieren, und die Grenzwerte dieser dann noch einmal. Mit dem gleichen Ergebnis (und alle Konvergenzen sind absolut).

Anmerkung: Wir werden diesen Satz später in der Vorlesung als einen Spezialfall unseres *Satzes von Fubini* beweisen.

(b) Sei nun $\varphi\colon X \to [0,\infty]$ und $\mu = \mu_\varphi\colon \mathfrak{P}(X) \to [0,\infty]$ wie in der Aufgabenstellung. Dann ist zunächst

$$\mu(\emptyset) = \sum_{x\in\emptyset} \varphi(x) = 0,$$

und dies nach unserer Definition (aus Analysis 1), dass eine leere Summe (reeller Zahlen) stets Null sein soll. Seien nun $A_k \subseteq X$ ($k \in \mathbb{N}$) beliebig, allerdings paarweise disjunkt, sowie $A := \bigcup_k A_k$. Im Fall, dass $\mu(A) < \infty$ ist, liefert nun der Große Umordnungssatz

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} (\sum_{x\in A_k} \varphi(x)) = \sum_{x\in A} \varphi(x) = \mu(A).$$

(Wer eine Doppelreihe sehen möchte, zähle jedes A_k mit einem $\iota_k\colon \mathbb{N} \to A_k$ ab (falls A_k unendlich ist) und setze dann $a_{kl} = \varphi(\iota_k(l))$ (und fülle mit Nullen auf, falls A_k endlich ist).)

Der Fall $\mu(A) = \infty$ ist einfacher. Ist nämlich $C > 0$ beliebig, so gibt es Elemente $x_1, \ldots, x_n \in A$ mit $\sum_{j=1}^n \varphi(x_j) \geq C$. Sei $x_j \in A_{k_j}$. Die k_j's müssen nicht alle paarweise verschieden sein. Setzen wir daher $\{k_1, \ldots, k_n\} =: \{l_1, \ldots, l_m\}$ mit nun paarweise verschiedenen l_i's (und $m \leq n$). Dann ist

$$\sum_{i=1}^m \mu(A_{l_i}) \geq \sum_{j=1}^n \varphi(x_j) \geq C$$

und damit ist auch $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k) = \infty$.

(c) Sei Maße(X) die Menge aller Maße auf $(X, \mathfrak{P}(X))$ und $\mu \in$ Maße(X). Dann setzen wir $\varphi_\mu\colon X \to [0,\infty]$,

$$\varphi_\mu(x) := \mu(\{x\}).$$

Wir behaupten, dass die Abbildungen $\Phi\colon \mathrm{Abb}(X,[0,\infty]) \to$ Maße(X), $\varphi \mapsto \mu_\varphi$ und $\Psi\colon$ Maße$(X) \to \mathrm{Abb}(X,[0,\infty])$, $\mu \mapsto \varphi_\mu$, invers zueinander sind. Denn

$$\mu_{\varphi_\mu}(A) = \sum_{x\in A} \varphi_\mu(x) = \sum_{x\in A} \mu(\{x\}) = \mu(\dot{\bigcup}_{x\in A} \{x\}) = \mu(A),$$

für alle $A \in \mathfrak{P}(X)$, und

$$\varphi_{\mu_\varphi}(x) = \mu_\varphi(\{x\}) = \varphi(x),$$

für alle $x \in X$. Es gibt also zu jedem Maß μ auf $(X, \mathfrak{P}(X))$ genau ein $\varphi\colon X \to [0,\infty]$ mit $\mu = \mu_\varphi$.

Aufgabe 03 (Schrumpfungsformel). **(a)** Sei $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra auf einer Menge X und μ ein Maß auf $(X, \mathfrak{A})$. Zeigen Sie: Sind $A_k \in \mathfrak{A}$ ($k \in \mathbb{N}$) mit $A_k \supseteq A_{k+1}$, für alle $k \in \mathbb{N}$, und ist $\mu(A_1) < \infty$, so gilt für $A := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k$:

$$\mu(A) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).$$

(b) Sei μ das Zählmaß auf $\mathbb{N}$ sowie $A_k := \{n \in \mathbb{N} : n \geq k\}$ ($k \in \mathbb{N}$). Zeigen Sie, dass die Schrumpfungsformel (a) für (A_k) nicht gilt.

Lösungsvorschlag. (a) Da $\mu(A_1) < \infty$ ist, und damit wegen der Monotonie des Maßes und $A_k \subseteq A_1$, für alle $k \in \mathbb{N}$, sowie $A \subseteq A_1$, sind alle Maßzahlen in der folgenden Rechnung endlich und es darf deshalb subtrahiert werden. Sind alle $\mu(A_k) = \infty$ ($k \in \mathbb{N}$), so bricht die Argumentation zusammen und die Aussage wird auch falsch (siehe Teil (b)). [*Anmerkung:* Ist dagegen $\mu(A_{k_0}) < \infty$, für ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so bleibt die Aussage richtig, da man dann die Familie $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ einfach durch $(A_k)_{k\geq k_0}$ ersetzen kann, denn weder A ändert sich dann noch $\lim_{k\to\infty} \mu(A_k)$.]

Wir beobachten nun zunächst, dass wegen der Schachtelung ineinander und der Monotonie des Maßes die Folge $(\mu(A_k))$ monoton fallend und nach unten durch 0 beschränkt ist und damit also konvergieren muss. Das zeigt also bereits die Existenz von $\lim \mu(A_k)$. Dann ist die Folge (B_k) mit $B_k := A_1 \setminus A_k$ aufsteigend, denn wegen $A_k \supseteq A_{k+1}$ ist

$$B_k = A_1 \setminus A_k \subseteq A_1 \setminus A_{k+1} = B_{k+1},$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Außerdem ist

$$\bigcup_k (A_1 \setminus A_k) = A_1 \setminus \bigcap_k A_k = A_1 \setminus A.$$

Wir schreiben: $(A_1 \setminus A_k) \nearrow (A_1 \setminus A)$. Nach der Ausschöpfungsformel ist deshalb:

$$\begin{aligned} \mu(A_1) - \mu(A) &= \mu(A_1 \setminus A) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_1 \setminus A_k) = \lim_{k\to\infty} (\mu(A_1) - \mu(A_k)) \\ &= \mu(A_1) - \lim_{k\to\infty} \mu(A_k), \end{aligned}$$

und damit nach Subtraktion von $\mu(A_1)$:

$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu(A).$$

(b) Das *Zählmaß* auf einer abzählbaren Menge X ist das Maß μ zur Gewichtsfunktion $\varphi \equiv 1$ auf X (vgl. Aufgabe 02). Es ist also für $A \subseteq X$ durch

$$\mu(A) = \sharp(A)(= \text{Anzahl der Elemente von } A)$$

(und diese Formel macht auch Sinn für beliebige Mengen X) gegeben. Für $X = \mathbb{N}$ und $A_k = \{n \in \mathbb{N} : n \geq k\}$ folgt: $\mu(A_k) = \infty$, da A_k offenbar unendlich ist, und es ist auch $A_k \supseteq A_{k+1}$, für alle $k \in \mathbb{N}$. Aber $A := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k = \emptyset$ und deshalb ist

$$\mu(A) = 0 \neq \infty = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).$$

[Nach der Anmerkung unter (a) gilt also immer „$\leq$“, da nur im Falle $\mu(A_k) = \infty$, für alle $k \in \mathbb{N}$, etwas schief gehen kann, in welchem Fall aber die rechte Seite ∞ ist und damit $\mu(A) \leq \infty$ stets richtig ist.]

Aufgabe 04. (a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}$ und $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ gleichmächtig sind. (Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\mathbb{R}$ und $[0, 1)$ gleichmächtig sind und drücken Sie dann jedes $x \in [0, 1)$ durch seinen *Dualbruch* $0, a_1a_2 \ldots$ (mit $a_k \in \mathbb{F}_2$, $k \in \mathbb{N}$) aus.)

(b)* Sei $\mathfrak{B}_n \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ die Borel-Algebra ($n \in \mathbb{N}$). Zeigen Sie, dass $\mathfrak{B}_n$ gleichmächtig zu $\mathbb{R}$ ist und damit, dass $\mathfrak{B}_n \neq \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ sein muss.

Hinweis: Benutzen Sie die Sätze von *Schröder-Bernstein* und *Cantor* aus der Analysis-I.

Lösungsvorschlag. (a) Um zu zeigen, dass $\mathbb{R}$ und $[0,1)$ gleichmächtig sind, reicht es, eine Injektion $\iota\colon \mathbb{R} \to [0,1)$ anzugeben. Da die Inklusion $[0,1) \hookrightarrow \mathbb{R}$ auch injektiv ist, gibt es nach dem *Satz von Schröder-Bernstein* auch eine Bijektion zwischen $\mathbb{R}$ und $[0,1)$. Das schaffen wir sogar in stetiger Weise z.B. durch

$$x \mapsto \frac{1}{\pi}\arctan(x) + \frac{1}{2},$$

denn bekanntlich bildet arctan die reellen Zahlen bijektiv auf das Intervall $(-\pi/2, \pi/2)$ ab.

Nun zeigen wir, dass $[0,1)$ und $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ gleichmächtig sind. Dazu schreiben wir jedes $x \in [0,1)$ eindeutig ohne Einerenden als

$$x = 0, a_1 a_2 \cdots$$

mit $a_n \in \{0,1\}$ ($n \in \mathbb{N}$). Dann setzen wir $\iota\colon [0,1) \to \mathfrak{P}(\mathbb{N})$,

$$\iota(x) = \{n \in \mathbb{N} : a_n = 1\},$$

Dann ist ι injektiv und „fast“ surjektiv. Das Komplement M des Bildes besteht nur aus den Teilmengen von $\mathbb{N}$, für die es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, ab dem alle Elemente in der Teilmenge liegen (Einerenden). Davon gibt es aber nur abzählbar viele. Es folgt, dass Bild(ι) die gleiche Mächtigkeit wie $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ hat. Wähle dazu etwa eine Kopie N von $\mathbb{N}$ in $[0,1)$, z.B. die Hauptbrüche $1/n$ ($n \in \mathbb{N}$). Bilde diese dann bijektiv auf $\iota(N) \cup M$ ab und das Komplement wie vorher. Das so variierte ι ist dann bijektiv.

Wegen der Transitivität der Gleichmächtigkeit ist damit $\mathbb{R}$ gleichmächtig zu $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$.

(b)* Das ist schwer. (Deshalb steht ein * daran.) Wir geben nur eine Beweisskizze.

Zunächst mal hat die Teilmenge $\mathfrak{U} := \mathfrak{U}_n$ aller offenen Mengen in $\mathbb{R}^n$ die Kardinalität von $\mathbb{R}$ bzw. $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$. Man nennt sie üblicherweise $2^{\aleph_0} := \mathrm{card}(\mathbb{R})$ ($\aleph_0 := \mathrm{card}(\mathbb{N})$). Das liegt daran, dass jede offene Menge Vereinigung von offenen Quadern mit rationalen Eckpunkten ist, wovon es nur abzählbar viele gibt. Durch die Vereinigung erhält man daher eine Surjektion von $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ auf $\mathfrak{U}$, also $\mathrm{card}(\mathfrak{U}) \leq 2^{\aleph_0}$. Da man $\mathbb{R}$ auch in $\mathfrak{U}$ injektiv abbilden kann, etwa durch $x \mapsto (0,x) \times \mathbb{R}^{n-1}$, ist auch $2^{\aleph_0} \leq \mathrm{card}(\mathfrak{U})$, nach Schröder-Bernstein also $\mathrm{card}(\mathfrak{U}) = 2^{\aleph_0}$.

Ebenso hat die Teilmenge $\mathfrak{A} := \mathfrak{A}_n \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ aller abgeschlossenen Mengen die Kardinalität des Kontinuums $\mathbb{R}$, denn die Komplementbildung ist eine Bijektion von $\mathfrak{U}$ auf $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{U} \cup \mathfrak{A}$ ist also abgeschlossen gegen Komplementbildung und auch gegenüber endlichen Durchschnitten und endlichen Vereinigungen, $\mathfrak{A}$ auch gegenüber abzählbar vielen (sogar beliebig vielen) Durchschnitten, nicht allerdings $\mathfrak{U}$.

Man definiert nun eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ als eine *G_δ-Menge* („δ“ für abzählbare Durchschnitte), wenn sie Durchschnitt von abzählbar vielen offenen Mengen ist. Diese liegen offenbar in der Borelalgebra $\mathfrak{B} := \mathfrak{B}_n$. Die Komplemente von diesen, also Vereinigung von abzählbar vielen abgeschlossenen Mengen, nennt man eine *F_σ-Menge* („σ“ für abzählbare Vereinigungen). Auch diese gehören zu $\mathfrak{B}$. Auch die G_δ- und F_σ-Mengen haben die Kardinalität des Kontinuums, wie ein gängiges Diagonalargument zeigt. Leider sind dies immer noch nicht alle Borelmengen. Denn G_δ-Mengen sind nun zwar abgeschlossen gegenüber abzählbaren Durchschnitten, aber nicht gegenüber abzählbaren Vereinigungen, und entsprechend ihre Komplemente, die F_σ-Mengen nicht gegenüber abzählbaren Durchschnitten.

Deshalb bildet man jetzt die sogenannten $G_{\delta\sigma}$- und *$F_{\sigma\delta}$-Mengen*. Eine $G_{\delta\sigma}$-Menge ist Vereinigung von abählbar vielen G_δ-Mengen, eine $F_{\sigma\delta}$-Menge Durchschnitt von abzählbar vielen F_σ-Mengen. Auch diese haben die Kardinalität des Kontinuums.

Nun ist klar, wie man weitermacht. Aber leider haben zwar die $G_{(\delta\sigma)^n}$- und $F_{(\sigma\delta)^n}$-Mengen für jedes $n \in \mathbb{N}$ (n Kopien $(\delta\sigma)$ bzw. $(\sigma\delta)$ im Index) immer noch die Kardinalität von $\mathbb{R}$, sind aber immer noch nicht abgeschlossen gegenüber abzählbaren Vereinigungen und Durchschnitten. Deshalb bildet man nun

$$G_\omega := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_{(\delta\sigma)^n}, \quad F_\omega := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_{(\sigma\delta)^n},$$

wobei man hier unter ω die natürlichen Zahlen mit ihrer natürlichen Ordnungsstruktur „$\leq$“ meint, $\omega = (\mathbb{N}, \leq)$, einer sogenannten „Ordinalzahl“. Ordinalzahlen sind Verallgemeinerungen von natürlichen Zahlen, die einem – grob gesprochen – auch das Weiterzählen bei unendlichen Mengen gestatten. Die erste *transfinite Ordinalzahl* ist ω.

Aber leider ist nun auch bei $G_\omega \cup F_\omega$ noch immer nicht Schluss. $\mathfrak{B}$ ist immer noch größer. Man muss jetzt noch „weiterzählen“ bis zur ersten überabzählbaren Ordinalzahl Ω (eine gewisse wohlgeordnete Menge, siehe Exkurs) deren Kardinalität man mit $\aleph_1$ bezeichnet. (Es ist also $\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}$.) Und dann zeigt man, dass $G_\Omega \cup F_\Omega$ immer noch die Kardinalität von $\mathbb{R}$ hat, dass sie aber zudem abgeschlossen unter Komplementbildung und gegenüber abzählbaren Vereinigungen (und Durchschnitten) ist und deshalb die Borelalgebra $\mathfrak{B}$ sein muss.

Nach dem Satz von Cantor ist $\mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ echt mächtiger als $\mathbb{R}^n$ (und $\mathbb{R}^n$ ist mächtiger als $\mathbb{R}$ (sogar gleichmächtig)). Es folgt, dass $\mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ echt mächtiger als $\mathfrak{B}_n$ und damit verschieden von $\mathfrak{B}_n$ ist.

[*Exkurs:* Eine *Ordinalzahl* soll eigentlich so etwas wie eine Äquivalenzklasse von *wohlgeordneten Mengen* $(X, \leq)$ sein (unter ordnungserhaltenden Bijektionen). Alle diese bilden aber keine Menge. Es gibt einfach zu viele „Kopien“. Hier hilft man sich mit einem Trick. Man wählt aus jeder Äquivalenzklasse eine besondere wohlgeordnete Menge aus, in dem man insbesondere verlangt, dass die Ordnungsrelation durch die Elementbeziehung zustande kommt. Eine *Wohlordnung $\leq$ auf einer Menge* ist eine lineare Ordnung $\leq$, bei der jede Teilmenge ein (dann eindeutig bestimmtes) kleinstes Element hat. So werden die natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ nach *J. von Neumann* etwa durch $0 = \emptyset$ und dann rekursiv durch $n + 1 = n \cup \{n\}$, also z.B. $5 = \{1, 2, 3, 4\}$, gegeben, und die natürliche Ordnung durch $k < n$, wenn $k \in n$ ist. Und so macht man es allgemein mit Ordinalzahlen $(X, \leq)$: Man verlangt, dass für alle $x \in X$ gilt:

$$x = \{y \in X : y < x\}.$$

Z.B. ist neben $n \in \mathbb{N}$ (für jedes n) auch $\mathbb{N}$ selbst eine Ordinalzahl, die man mit ω bezeichnet. Die nächste ist dann

$$\omega + 1 := \omega \cup \{\omega\} = \{1, 2, 3, \ldots; \omega\},$$

mit der naheliegenden Ordnung. Ordinalzahlen sind immer miteinander durch die Inklusion vergleichbar, und betrachtet man jene, die kleiner oder gleich einer gegebenen γ sind, so ist dies eine Menge, die selbst wohlgeordnet sind. (Alle Ordinalzahlen bilden keine Menge. Zu viele.) Die Menge

$$\{\alpha : \alpha \text{ ist Ordinalzahl mit } \alpha \leq \gamma \text{ und } \alpha \text{ ist überabzählbar}\}$$

(für ein überabzählbares γ) hat daher ein kleinstes Element, welches mit Ω (unabhängig von γ) bezeichnet wird.

Kardinalzahlen sind spezielle Ordinalzahlen, nämlich jeweils die kleinsten aller Ordinalzahlen mit der gleichen Mächtigkeit. Jede Menge X ist zu genau einer Kardinalzahl gleichmächtig, die dann mit $\mathrm{card}(X)$ bezeichnet wird. Das liegt daran, dass man wegen des *Auswahlaxioms* auf jeder Menge eine Wohlordnung finden kann. Ähnlich wie bei den Ordinalzahlen kann man auch hier nicht die Äquivalenzklasse aller Mengen nehmen, die untereinander gleichmächtig sind. Das ist zu viel. Durch die Ordinalzahlen kann man hier jeweils einen besonderen Repräsentanten auswählen. Auch Kardinalzahlen sind Verallgemeinerungen der natürlichen Zahlen. Man kann mit ihnen in gewisser Weise rechnen, indem man Addition durch Vereinigung, Multiplikation durch cartesisches Produkt und Potenz durch Abbildungen definiert. Ist z.B. $a = \mathrm{card}(A)$, $b = \mathrm{card}(B)$, so setzt man $a^b := \mathrm{card}(\mathrm{Abb}(b, a))$. Die ersten transfiniten Kardinalzahlen werden mit $\aleph_0 = \mathrm{card}(\omega)$, $\aleph_1 := \mathrm{card}(\Omega)$, $\aleph_2, \aleph_3, \ldots$ bezeichnet. Die berühmte *Kontinuumshypothese* besteht in der Aussage „$\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$“. Die spektakuläre Antwort darauf von *Gödel* und *Cohen* überlasse ich Ihnen zum Nachschlagen. (Siehe z.B. in *P. Halmos:* Naive Mengenlehre)]

Aufgabe 05. Sei X eine Menge sowie $A, B \in \mathfrak{P}(X)$ und $\mathfrak{M} := \{A, B\} \subseteq \mathfrak{P}(X)$.

(a) Sei mindestens eine von den vier Mengen $A \cap B$, $A \cap B^c$, $A^c \cap B$, $A^c \cap B^c$ leer. Zeigen Sie, dass dann das von $\mathfrak{M}$ erzeugte Dynkin-System $\mathfrak{D}$ mit der von $\mathfrak{M}$ erzeugten σ-Algebra $\mathfrak{A}$ übereinstimmt, $\mathfrak{D} = \mathfrak{A}$. (Hinweis: Suchen Sie einen durchschnittsstabilen Erzeuger für $\mathfrak{D}$.)

(b) Seien nun die Mengen $A \cap B$, $A \cap B^c$, $A^c \cap B$ und $A^c \cap B^c$ allesamt nicht-leer. Zeigen Sie, dass dann das von $\mathfrak{M}$ erzeugte Dynkin-System $\mathfrak{D}$ nicht mit der von $\mathfrak{M}$ erzeugten σ-Algebra $\mathfrak{A}$ übereinstimmt, $\mathfrak{D} \neq \mathfrak{A}$. (Hinweis: $\mathfrak{D}$ ist sehr klein.)

(c) Geben Sie ein Dynkin-System an, welches keine σ-Algebra ist.

Lösungsvorschlag. (a) Da ein Dynkin-System stets $\emptyset$ enthält und mit jedem C auch sein Komplement C^c, stimmen die Dynkin-Systeme, die von den folgenden vier Teilmengen von $\mathfrak{P}(X)$ erzeugt werden, alle mit $\mathfrak{D}$ überein:

$$\mathfrak{E}_1 = \{\emptyset, A, B\}, \mathfrak{E}_2 = \{\emptyset, A, B^c\}, \mathfrak{E}_3 = \{\emptyset, A^c, B\}, \mathfrak{E}_4 = \{\emptyset, A^c, B^c\}.$$

Ist nun eine der vier Teilmengen $A \cap B$, $A \cap B^c$, $A^c \cap B$, $A^c \cap B^c$ leer, so ist auch eine der vier Teilmengen $\mathfrak{E}_1, \ldots, \mathfrak{E}_4$ durchschnittsstabil. Damit hat also $\mathfrak{D}$ einen durchschnittsstabilen Erzeuger und deshalb ist $\mathfrak{D} = \mathfrak{A}$.

(b) Sind nun die Mengen $A \cap B$, $A \cap B^c$, $A^c \cap B$ und $A^c \cap B^c$ allesamt nicht-leer, so behaupten wir zunächst, dass das von $\mathfrak{M}$ erzeugte Dynkin-System aus den folgenden (paarweise verschiedenen) sechs Teilmengen von X besteht:

$$\emptyset, A, B, A^c, B^c, X.$$

Denn für $\mathfrak{D}' := \{\emptyset, A, B, A^c, B^c, X\}$ gilt offenbar, dass $\emptyset \in \mathfrak{D}'$ und mit jedem $C \in \mathfrak{D}'$ auch $C^c \in \mathfrak{D}'$ ist. Nun gibt es nicht viele Möglichkeiten für zwei Teilmengen $C_1, C_2 \in \mathfrak{D}'$, dass $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ ist. Das passiert nur, wenn eine der Mengen C_1, C_2 leer ist oder $C_1 = A, C_2 = A^c$ oder $C_1 = B, C_2 = B^c$ (oder die Rollen von C_1, C_2 vertauscht werden). In all diesen Fällen liegt aber $C_1 \dot\cup C_2$ wieder in $\mathfrak{D}'$. Es ist also $\mathfrak{D}'$ ein Dynkin-System, und sicher das Kleinste, welches $\mathfrak{M}$ enthält, also $\mathfrak{D}' = \mathfrak{D}$.

Die von $\mathfrak{M}$ erzeugte σ-Algebra $\mathfrak{A}$ ist aber echt größer, denn sie enthält z.B. $A \cap B$. Man prüft nämlich leicht nach, dass $A \cap B$ keine von den sechs Teilmengen aus $\mathfrak{D}$ ist.

(c) Wir versuchen X möglichst klein zu machen und zwei Teilmengen $A, B \in \mathfrak{P}(X)$ zu finden, die die Bedingung aus Teil (b) erfüllen. Das gelingt bereits bei einer 4-elementigen Teilmenge

$X = \{1,2,3,4\}$ mit den Teilmengen

$$A = \{1,2\} \text{ und } B = \{2,3\},$$

was man leicht nachprüft.

Aufgabe 06. Sei X eine Menge und $\mathfrak{P}(X)$ versehen mit ihrer Ringstruktur aus Aufgabe 01. Zeigen Sie: Eine Teilmenge $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ ist genau dann einen Mengenring, wenn sie ein (algebraischer) Unterring von $\mathfrak{P}(X)$ ist.

Lösungsvorschlag. „$\Rightarrow$“: Ist $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ ein Mengenring, so ist also $\emptyset \in \mathfrak{R}$ und mit $R, S \in \mathfrak{R}$ sind auch $R \setminus S$ und $R \cup S$ in $\mathfrak{R}$. Wegen $R \triangle S = (R \setminus S) \cup (S \setminus R)$ ist dann auch $R \triangle S$ in $\mathfrak{R}$, und wegen $R \cap S = R \setminus (R \setminus S)$ auch $R \cap S \in \mathfrak{R}$. Damit ist dann $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ also ein (algebraischer) Unterring von $\mathfrak{P}(X)$. (Eigentlich muss man auch zeigen, dass mit R in $\mathfrak{R}$ auch ihr Negatives $-R$ in $\mathfrak{R}$ ist, aber wegen $A + A = 0$ in diesem Ring (für alle $A \in \mathfrak{P}(X)$, $\mathfrak{P}(X)$ ist ja eine $\mathbb{F}_2$-Algebra) ist $-R = R$.

„$\Leftarrow$“: Ist umgekehrt $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ ein algebraischer Unterring von $\mathfrak{P}(X)$, so ist also $\emptyset \in \mathfrak{R}$ und mit $R, S \in \mathfrak{R}$ sind auch $R \triangle S$ und $R \cap S$ in $\mathfrak{R}$. Wegen $R \setminus S = (R \triangle S) \cap R$ ist dann zunächst auch $R \setminus S \in \mathfrak{R}$. Sind R und S disjunkt, $R \cap S = \emptyset$, so ist wegen $R \mathbin{\dot\cup} S = R \triangle S$ in diesem Fall auch $R \mathbin{\dot\cup} S \in \mathfrak{R}$. Im allgemeinen Fall ist aber

$$R \cup S = (R \triangle S) \mathbin{\dot\cup} (R \cap S)$$

und daher auch $R \cup S \in \mathfrak{R}$. $\mathfrak{R}$ ist damit also auch ein Mengenring.

Ein Maßraum $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ heißt *vollständig*, falls für jedes $M \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(M) = 0$ auch alle Teilmengen $N \subseteq M$ in $\mathfrak{A}$ liegen.

Aufgabe 07. Sei $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum. Wir setzen $\mathfrak{N} := \{N \in \mathfrak{P}(X) : \text{es gibt ein } M \in \mathfrak{A} \text{ mit } N \subseteq M \text{ und } \mu(M) = 0\}$ sowie $\hat{\mathfrak{A}} := \{A \cup N : A \in \mathfrak{A} \text{ und } N \in \mathfrak{N}\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\hat{\mathfrak{A}}$ eine σ-Algebra mit $\mathfrak{A} \subseteq \hat{\mathfrak{A}}$ ist.

(b) Definiere $\hat{\mu}: \hat{\mathfrak{A}} \to [0, \infty]$ durch $\hat{\mu}(A \cup N) := \mu(A)$. Zeigen Sie, dass $\hat{\mu}$ ein wohldefiniertes Maß auf $(X, \hat{\mathfrak{A}})$ mit $\hat{\mu}|\mathfrak{A} = \mu$ ist, und dass $(X, \hat{\mathfrak{A}}, \hat{\mu})$ vollständig ist. ($(X, \hat{\mathfrak{A}}, \hat{\mu})$ heißt *die Vervollständigung von* $(X, \mathfrak{A}, \mu)$.)

Lösungsvorschlag. (a) (i) Da $\emptyset \in \mathfrak{A}$ und $\mu(A) = 0$ ist, ist $\emptyset \in \mathfrak{N}$. Damit ist $X = X \cup \emptyset \in \hat{\mathfrak{A}}$.

(ii) Seien nun $A, M \in \mathfrak{A}$, $\mu(M) = 0$ und $N \subseteq M$. Es ist dann $M^c \subseteq N^c$ und daher

$$\begin{aligned}(A \cup N)^c &= A^c \cap N^c = A^c \cap (N^c \cap (M \cup M^c)) = A^c \cap ((N^c \cap M) \cup \underbrace{(N^c \cap M^c)}_{=M^c}) \\ &= (\underbrace{A^c \cap M^c}_{\in \mathfrak{A}}) \cup (\underbrace{A^c \cap N^c \cap M}_{\subseteq M}) \in \hat{\mathfrak{A}}.\end{aligned}$$

(iii) Seien $B_n \in \hat{\mathfrak{A}}$ ($n \in \mathbb{N}$). Dann gibt es also $A_n, M_n \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(M_n) = 0$ und $N_n \subseteq M_n$ mit $B_n = A_n \cup N_n$. Wir setzen

$$A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n, \quad M := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n, \quad N := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n.$$

Dann ist auch $M \in \mathfrak{A}$ und
$$\mu(M) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(M_n) = 0$$
sowie $N \subseteq M$. Außerdem ist $A \in \mathfrak{A}$ und für $B := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ ist
$$B = \bigcup_n (A_n \cup N_n) = \bigcup_n A_n \cup \bigcup_n N_n = A \cup N \in \hat{\mathfrak{A}}.$$

Es ist also $\hat{\mathfrak{A}}$ eine σ-Algebra. Schließlich ist $\emptyset \in \mathfrak{N}$ und $A = A \cup \emptyset$, für jedes $A \in \mathfrak{A}$. Also ist A auch in $\hat{\mathfrak{A}}$ und damit $\mathfrak{A} \subseteq \hat{\mathfrak{A}}$.

(b) (i) $\hat{\mu}$ ist wohldefiniert: Nehmen wir also an, dass $A, A', M, M' \in \mathfrak{A}$ sind, $\mu(M) = \mu(M') = 0$ sowie $N \subseteq M$, $N' \subseteq M'$ mit
$$A \cup N = A' \cup N' =: B.$$
Dann müssen wir zeigen, dass $\mu(A) = \mu(A')$ ist. Mit M und M' ist wegen
$$\mu(M \cup M') \leq \mu(M) + \mu(M') = 0 + 0 = 0$$
auch $M \cup M' \in \mathfrak{A}$ eine Nullmenge und daher
$$\mu(A) \leq \mu(A \setminus (M \cup M')) + \mu(M \cup M') = \mu(A \setminus (M \cup M')),$$
also wegen der Monotonie und $A \setminus (M \cup M') \subseteq A$ also sogar $\mu(A) = \mu(A \setminus (M \cup M'))$. Nun ist
$$\begin{aligned} A \setminus (M \cup M') &\overset{N\subseteq M}{=} (A \cup N) \setminus (M \cup M') = B \setminus (M \cup M') \\ &= (A' \cup N') \setminus (M \cup M') = A' \setminus (M \cup M'). \end{aligned}$$
Zusammen erhalten wir
$$\mu(A) = \mu(A \setminus (M \cup M')) = \mu(A' \setminus (M \cup M')) = \mu(A').$$

(ii) $\hat{\mu}$ ist ein Maß mit $\hat{\mu}|\mathfrak{A} = \mu$: Da $A = A \cup \emptyset$ und $\emptyset \in \mathfrak{N}$ ist, sieht man, dass $\hat{\mu}(A) = \mu(A)$, für alle $A \in \mathfrak{A}$, ist. Damit ist insbesondere $\hat{\mu}(\emptyset) = 0$.

Seien nun $B_n \in \hat{\mathfrak{A}}$ ($n \in \mathbb{N}$) paarweise disjunkt. Es gibt dann also $A_n, M_n \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(M_n) = 0$ und $N_n \subseteq M_n$, sowie $B_n = A_n \cup N_n$. Mit (B_n) ist dann auch (A_n) paarweise disjunkt. Wir setzen
$$B := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n, \quad A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n, \quad M := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n, \quad N := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n.$$
Es ist dann $\mu(M) \leq \sum_n \mu(M_n) = 0$ und $N \subseteq M$. Schließlich ist
$$B = \bigcup_n (A_n \cup N_n) = A \cup N$$
und damit
$$\hat{\mu}(B) = \mu(A) = \sum_n \mu(A_n) = \sum_n \hat{\mu}(B_n).$$

(iii) $(X, \hat{\mathfrak{A}}, \hat{\mu})$ ist vollständig: Sei dazu $B \in \mathfrak{A}$ mit $\hat{\mu}(B) = 0$ und $S \subseteq B$. Es existieren dann $A, M \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(M) = 0$ und $N \subseteq M$ mit $B = A \cup N$. Es folgt
$$S = S \cap B = S \cap (A \cup N) = (S \cap A) \cup (S \cap N).$$

Da $\mathfrak{N} \subseteq \hat{\mathfrak{A}}$ (denn $N = \emptyset \cup N$, für alle $N \in \mathfrak{N}$, und $\emptyset \in \mathfrak{A}$) sowie $\mu(A) = \hat{\mu}(B) = 0$ ist, folgt: $S \cap A \subseteq A$, also $S \cap A \in \mathfrak{N} \subseteq \hat{\mathfrak{A}}$. Außerdem ist $S \cap N \subseteq N$ also auch $S \cap N \in \mathfrak{N} \subseteq \hat{\mathfrak{A}}$, und damit auch $S \in \hat{\mathfrak{A}}$.

$(X, \hat{\mathfrak{A}}, \hat{\mu})$ ist damit vollständig (und nach Konstruktion in jeder vollständigen Erweiterung von $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ enthalten.)

Aufgabe 08. Sei X eine Menge und $\nu\colon \mathfrak{P}(X) \to [0, \infty]$ ein äußeres Maß auf X. Sei weiter $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ die σ-Algebra der ν-messbaren Mengen und $\mu := \nu|\mathfrak{A}$.

(a) Zeigen Sie, dass $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ vollständig ist.

(b) Sei $\mu^*\colon \mathfrak{P}(X) \to [0, \infty]$ das von μ induzierte äußere Maß nach Caratheodory. Zeigen Sie, dass i.A. $\mu^* = \nu$ nicht gilt. (Hinweis: Versuchen Sie es mal mit einem geschickten äußeren Maß ν auf der Menge $X = \{0, 1\}$.)

Lösungsvorschlag. (a) Sei $M \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(M) = 0$ und $N \subseteq M$. Für eine beliebige Teilmenge $S \subseteq X$ ist dann wegen $S \cap N \subseteq N \subseteq M$ zunächst

$$\nu(S \cap N) \leq \nu(M) = \mu(M) = 0.$$

Wegen $S \setminus N \subseteq S$ und der Monotonie von ν erhalten wir dann

$$\nu(S) \geq \nu(S \setminus N) = \nu(S \cap N) + \nu(S \setminus N) = \nu(S \cap N) + \nu(S \cap N^c).$$

Damit ist N also ν-messbar und damit in $\mathfrak{A}$.

(b) Wir definieren $\nu\colon \mathfrak{P}(X) \to [0, \infty]$ mit $X = \{0, 1\}$ durch

$$\nu(\emptyset) = 0, \quad \nu(\{0\}) = \nu(\{1\}) = 2, \quad \nu(X) = 3.$$

Dann sieht man recht schnell, dass ν ein äußeres Maß auf X ist. Die Teilmenge $\{0\} \in \mathfrak{P}(X)$ ist dann nicht ν-messbar, denn

$$\nu(X) = 3 \neq 2 + 2 = \nu(\{0\}) + \nu(\{1\}) = \nu(X \cap \{0\}) + \nu(X \cap \{0\}^c).$$

Deshalb ist auch $\{1\}$ nicht messbar, denn die ν-messbaren Mengen sind ja komplementstabil. Es folgt, dass $\mathfrak{A} = \{\emptyset, X\}$ ist. Ist nun $\mu^*\colon \mathfrak{P}(X) \to [0, \infty]$ das von $\mu = \nu|\mathfrak{A}$ induzierte äußere Maß (nach Caratheodory) auf X, so ist z.B.

$$\mu^*(\{0\}) = 3 \neq 2 = \nu(\{0\}),$$

also $\mu^* \neq \nu$.

Aufgabe 09. Sei λ^* das äußere Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$ und $M \subseteq \mathbb{R}$ eine λ^*-messbare Teilmenge (d.i.: *eine Lebesgue-Menge*). Sei weiter $\varepsilon > 0$ beliebig.

(a) Zeigen Sie, dass es eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}$ gibt mit $U \supseteq M$ und $\lambda^*(U \setminus M) < \varepsilon$. (Hinweis: Betrachte zunächst den Fall $\lambda^*(M) < \infty$ und im Fall $\lambda^*(M) = \infty$ dann die Durchschnitte $M_n = M \cap [-n, n]$ ($n \in \mathbb{N}$). Denken Sie auch immer an den „$2^{-n}\varepsilon$-Trick".)

(b) Zeigen Sie, dass es eine abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ mit $A \subseteq M$ und $\lambda^*(M \setminus A) < \varepsilon$ gibt. (Hinweis: Betrachte M^c und Teil (a).)

Lösungsvorschlag. (a) (i) Sei zunächst $\lambda^*(M) < \infty$. Nach Defnition des äußeren Lebesgue-Maßes auf $\mathbb{R}$ gibt es eine Intervallüberdeckung $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von M mit

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(I_n) < \lambda^*(M) + \frac{\varepsilon}{2},$$

wobei alle Intervalle beschränkt sind (1-dimensionale Quader). Durch eventuelle Hinzunahme der Randpunkte von I_n, die das Maß von I_n nicht verändern, können wir annehmen, dass I_n auch abgeschlossen und damit von der Form $I_n = [a_n, b_n]$ mit $a_n \leq b_n$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir vergrößern nun jedes dieser Intervalle kontrolliert, um es offen zu bekommen und setzen

$$J_n := (a_n - \varepsilon \cdot 2^{-(n+2)}, b_n + \varepsilon \cdot 2^{-(n+2)}).$$

Dann ist $U := \bigcup_n J_n \subseteq \mathbb{R}$ offen, und da $J_n \supseteq I_n$ und $\bigcup_n I_n \supseteq M$ ist, ist auch $U \supseteq M$. Damit ist U Borelsch, also insbesondere λ^*-messbar, und deshalb ist λ^* additiv auf $(U \setminus M) \,\dot{\cup}\, M = U$:

$$\lambda^*(U) = \lambda^*(U \setminus M) + \lambda^*(M).$$

Da $\lambda^*(M) < \infty$ ist, folgt:

$$\begin{aligned}
\lambda^*(U \setminus M) &= \lambda^*(U) - \lambda^*(M) \leq \lambda^*(\bigcup_n J_n) - \left(\sum_n \lambda(I_n) - \frac{\varepsilon}{2}\right) \\
&\leq \sum_n \lambda(J_n) - \left(\sum_n (b_n - a_n) - \frac{\varepsilon}{2}\right) \\
&= \sum_n \big((b_n + \varepsilon \cdot 2^{-(n+2)}) - (a_n - \varepsilon \cdot 2^{-(n+2)}\big) - \sum_n (b_n - a_n) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \sum_n (b_n - a_n) + 2\varepsilon \sum_n 2^{-(n+2)} - \sum_n (b_n - a_n) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} \sum_n (\frac{1}{2})^n + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

weil mit der geometrischen Reihe $\sum_n (\frac{1}{2})^n = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$ ist.

(ii) Im Fall $\lambda^*(M) = \infty$ setzen wir $M_n := M \cap [-n, n]$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann ist auch M_n λ^*-messbar und

$$\lambda^*(M_n) \leq \lambda([-n, n]) = 2n < \infty.$$

Nach Teil (i) können wir deshalb offene Mengen $U_n \subseteq \mathbb{R}$ mit $U_n \supseteq M_n$ und $\lambda^*(U_n \setminus M_n) < \varepsilon \cdot 2^{-n}$ finden. Wir setzen dann $U := \bigcup_n U_n$. Es folgt, dass U offen ist, dass $U \supseteq M$ ist und dass $U \setminus M = \bigcup_n (U_n \setminus M)$ ist. Schließlich ist

$$\begin{aligned}
\lambda^*(U \setminus M) &\leq \sum_n \lambda^*(U_n \setminus M) \leq \sum_n \lambda^*(U_n \setminus M_n) \\
&< \varepsilon \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

(b) Wegen Teil (a) existiert ein offenes $U \subseteq \mathbb{R}$ mit $U \supseteq M^c$ und $\lambda^*(U \setminus M^c) < \varepsilon$. Wir setzen $A := U^c$. Dann ist A abgeschlossen und $A = U^c \subseteq (M^c)^c = M$. Außerdem ist

$$M \setminus A = M \cap A^c = M \cap U = U \setminus M^c,$$

also

$$\lambda^*(M \setminus A) = \lambda^*(U \setminus M^c) < \varepsilon.$$

Aufgabe 10. Sei λ^* das äußere Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$ und λ seine Einschränkung auf die Borelsche σ-Algebra $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R})$.

(a) Zeigen Sie: Für jede Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ gibt es eine Borelsche Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}$ mit $B \supseteq A$ und $\lambda(B) = \lambda^*(A)$. (Hinweis: Wählen Sie eine Minimalfolge $((Q_{nk})_{k\in\mathbb{N}})_{n\in\mathbb{N}}$ von Quaderüberdeckungen für das äußere Maß $\lambda^*(A)$.)

(b) Sei nun $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ *die Lebesguesche σ-Algebra* der λ^*-messbaren Teilmengen von $\mathbb{R}$ und $\hat{\mathfrak{B}}$ die λ^*-Vervollständigung von $\mathfrak{B}$ (siehe Aufgabe 07). Zeigen Sie: $\mathfrak{L} = \hat{\mathfrak{B}}$. (Hinweis: Suche für $M \in \mathfrak{L}$ mit Aufgabe 09 eine Borelmenge $B \subseteq M$ mit $\lambda^*(M \setminus B) = 0$.)

Lösungsvorschlag. (a) Sei also $A \subseteq \mathbb{R}$ beliebig. Nach Defnition des äußeren Lebesgue-Maßes gibt es eine Folge von Intervallüberdeckungen $(\mathfrak{I}_n)$, $\mathfrak{I}_n = (I_{nk})_k$, so dass gilt:

$$\lambda^*(A) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda(I_{nk}) \right).$$

Wir setzen $B_n := \bigcup_k I_{nk}$ und $B := \bigcap_n B_n$. Dann ist B Borelsch und weil $B_n \supseteq A$ ist, für alle $n \in \mathbb{N}$, ist auch $B \supseteq A$. Wegen $B \subseteq B_n$ ist zunächst $\lambda^*(B) \leq \lambda^*(B_n)$ und daher auch

$$\begin{aligned} \lambda^*(B) &\leq \liminf_{n\to\infty} \lambda^*(B_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda(I_{nk}) \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda(I_{nk}) = \lambda^*(A). \end{aligned}$$

Wegen $A \subseteq B$ ist sowieso $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$, also: $\lambda^*(A) = \lambda^*(B)$.

(b) Wir wissen schon, dass $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}$ vollständig ist. Sei

$$\mathfrak{N} = \{N \subseteq \mathbb{R} : \exists M \in \mathfrak{B} : \lambda(M) = 0 \text{ und } N \subseteq M\}.$$

Damit ist also auch $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{L}$. Da $\hat{\mathfrak{B}}$ von $\mathfrak{B} \cup \mathfrak{N}$ erzeugt ist, folgt: $\hat{\mathfrak{B}} \subseteq \mathfrak{L}$. ($\hat{\mathfrak{B}}$ ist die kleinste Vervollständigung, die $\mathfrak{B}$ enthält.)

Um zu zeigen, dass auch $\mathfrak{L} \subseteq \hat{\mathfrak{B}}$ ist, sei $A \in \mathfrak{L}$ beliebig. Es gibt dann für jedes $n \in \mathbb{N}$ nach Aufgabe (9b) eine abgeschlossene Teilmenge $B_n \subseteq A$ mit $\lambda^*(A \setminus B_n) < \frac{1}{n}$. Wir setzen $B := \bigcup B_n$. Dann ist $B \in \mathfrak{B}$ und auch $B \subseteq A$. Außerdem ist wegen $A \setminus B \subseteq A \setminus B_n$:

$$\lambda^*(A \setminus B) \leq \lambda^*(A \setminus B_n) < \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

also $\lambda^*(A \setminus B) = 0$. Nach Teil (a) gibt es weiterhin ein $M \in \mathfrak{B}$ mit $M \supseteq A \setminus B$ und $\lambda^*(M) = \lambda^*(A \setminus B) = 0$, also $A \setminus B \in \mathfrak{N}$. Insgesamt ist also

$$A = B \cup (A \setminus B) \in \hat{\mathfrak{B}}.$$

Aufgabe 11. *Die Cantormenge* $C \subseteq [0,1]$ wird so konstruiert: Im ersten Schritt nimmt man aus $C_0 := [0,1]$ das (offene) mittlere Drittel heraus, $C_1 := C_0 \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Im zweiten Schritt nimmt aus den verbleibenden Intervallen $[0, \frac{1}{3}]$ und $[\frac{2}{3}, 1]$ wiederum das jeweils mittlere Drittel heraus, $C_2 := [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$. Bei jedem weiteren Schritt nimmt man aus den verbleibenden Intervallen jeweils das mittlere Drittel heraus und erhält so im n-ten Schritt $C_n \subseteq [0,1]$. Schließlich setzt man $C := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$.

(a) Zeigen Sie, dass C kompakt (und damit eine Borelmenge) mit $\lambda(C) = 0$ (und λ, wie immer, dem Borel-Lebesgueschen Maß) ist.

(b) Zeigen Sie, dass C gleichmächtig zu $[0,1]$ ist. (Hinweis: Betrachte die Darstellung der Zahlen in C im *ternären System*).

(c) Zeigen Sie, das die Lebesguesche σ-Algebra $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ gleichmächtig zu $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$ ist.

Lösungsvorschlag. **(a)** $C_0 = [0,1]$ ist abgeschlossen und in jedem Schritt wird von C_n auf C_{n+1} etwas Offenes herausgenommen. Damit ist C_{n+1} der Durchschnitt von C_n mit etwas Abgeschlossenem. Nehmen wir induktiv an, dass C_n abgeschlossen ist, so also auch C_{n+1}. Damit ist C_n abgeschlossen, für alle $n \in \mathbb{N}$, und deshalb auch der Durchschnitt $C = \bigcap_n C_n$. Da $C \subseteq [0,1]$ auch beschränkt ist, ist C also nach Heine-Borel kompakt (und damit insbesondere Borelsch).

Um das (Borel-Lebesguesche) Maß von C zu bestimmen, bestimmen wir das Maß der offenen Menge, die das Komplement von C in $[0,1]$ ist. Im ersten Schritt wird *ein* offenes Intervall der Länge $\frac{1}{3}$ herausgenommen. Aus den verbleibenden zwei Intervallen werden im zweiten Schritt *zwei* offene Intervalle der Länge $\frac{1}{9}$ heraugenommen. Die Anzahl der verbleibenden Intervalle verdoppeln sich von Schritt zu Schritt und die Länge der mittleren Intervalle, die jeweils herausgenommen werden, sind $\frac{1}{3}$ mal so groß wie im Schritt vorher. Im n. Schritt werden daher

$$2^{n-1} \text{ Intervalle der Länge } (\tfrac{1}{3})^n$$

herausgenommen. Wir erhalten damit, dass mit der geometrischen Reihe

$$\lambda(C) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} (\frac{1}{3})^n = 1 - \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2}{3})^{n-1} = 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 0$$

sein muss. (In Teil (b) werden wir sehen, dass beim Herausnehmen all dieser Intervalle trotzdem noch ziemlich viel stehen bleibt.)

(b) Wir überlegen uns, welche Zahlen bei jedem Schritt aus C_n herausgenommen werden und stellen diese Zahlen $x \in [0,1]$ im *Ternärsystem*

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots,$$

mit $a_n \in \{0,1,2\}$ ($n \in \mathbb{N}$), dar. Im ersten Schritt wird das mittlere Drittel herausgenommen. Das sind genau die Zahlen x, bei denen $a_1 = 1$ ist. (Bei den Randpunkten $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$, die zu C_1 gehören, machen wir es so, dass wir $\frac{1}{3}$ mit einem 2-er-Ende schreiben, $\frac{1}{3} = 0,0\overline{2}$, und $\frac{2}{3}$ mit einem 0-er-Ende, $\frac{2}{3} = 0,2$.) Im zweiten Schritt werden dann aus den verbleibenden Zahlen alle $x \in C_1$ herausgenommen, bei denen $a_2 = 1$ ist (mit einer entsprechenden Vereinbarung für die Randpunkte). Auf diese Weise erhält man, dass in C genau die Zahlen $x \in [0,1]$ liegen, die in ihrer Ternärdarstellung *keine Einsen* haben. Und das sind immer noch ziemlich viele. Wir definieren nämlich jetzt eine Abbildung

$$\varphi\colon C \to [0,1],\ x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots \mapsto y = 0, b_1 b_2 b_3 \ldots$$

so: Wir stellen $x \in C$ wie oben im Ternärsystem und $y = \varphi(x) \in [0,1]$ im *Dualsystem* (also $b_n \in \{0,1\}$) dar. Dann setzen wir

$$b_n = \begin{cases} 0, \text{ falls } a_n = 0 \\ 1, \text{ falls } a_n = 2 \end{cases}.$$

Es ist dann klar, dass φ bijektiv ist. (Na ja, *fast* klar, aber wegen der 2-er, 1-er und 0-er-Enden mache ich mir jetzt mal keine Gedanken, da es von denen ohnehin nur abzählbar viele gibt: Die Intervallgrenzen der herausgenommenen Intervalle bilden nur einen abzählbaren Teil von C, C ist aber offenbar viel größer.) C hat also Maß Null, hat aber die Kardinalität von $[0,1]$ und ist damit insbesondere überabzählbar. Das geht.

(c) Die Lebesguesche Algebra muss daher gleichmächtig zu $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$ sein. Wir hatten nämlich schon gesehen, dass $\mathbb{R} \sim [0,1] \sim C$ ist, also auch $\mathfrak{P}(\mathbb{R}) \sim \mathfrak{P}(C)$. Aber weil $\mathfrak{L}$ vollständig und C eine Nullmenge ist, sind alle Teilmengen von C auch in $\mathfrak{L}$. Es folgt: $\mathfrak{L} \sim \mathfrak{P}(C) \sim \mathfrak{P}(\mathbb{R})$, denn mächtiger als $\mathfrak{P}(C)$ kann $\mathfrak{L}$ natürlich auch nicht sein, da ja $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ ist.

Aufgabe 12. Sei λ^* das äußere Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$.

(a) Zeigen Sie, dass λ^* translationsinvariant ist.

(b) Sei $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ die Lebesguesche σ-Algebra der λ^*-messbaren Teilmengen in $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass das Beispiel einer Teilmenge $A \subseteq [0,1]^n$ aus der Vorlesung, das nicht Borelsch ist, auch nicht in $\mathfrak{L}$ liegt.

(c) Zeigen Sie, dass λ^* nicht σ-additiv sein kann.

Lösungsvorschlag. (a) Sei $p \in \mathbb{R}^n$ und $T_p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die Translation um p, $x \mapsto x + p$. Das Borel-Lebesguesche Prämaß λ auf den Elementarfiguren $\mathfrak{E}(\mathbb{R}^n)$ ist translationsinvariant, denn ist $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader, sagen wir

$$Q = \prod_{j=1}^{n} [a_j, b_j]$$

(im Falle, dass Intervallgrenzen nicht dazu gehören, verläuft das Argument genauso), so ist

$$T_p Q = Q + p = \prod_{j=1}^{n} [a_j + p_j, b_j + p_j],$$

also wieder ein Quader, und nach Definition von λ folgt

$$\lambda(T_p Q) = \prod_{j=1}^{n} ((b_j + p_j) - (a_j + p_j)) = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j) = \lambda(Q).$$

Ist dann $E \in \mathfrak{E}(\mathbb{R}^n)$ eine Elementarfigur und $E = Q_1 \,\dot\cup \cdots \dot\cup\, Q_r$ eine disjunkte Vereinigung von Quadern Q_i $(i = 1, \ldots, r)$, so ist auch $T_p E$ eine Elementarfigur und

$$T_p E = T_p Q_1 \,\dot\cup \cdots \dot\cup\, T_p Q_r$$

ebenfalls eine disjunkte Vereinigung von Quadern. Daher ist auch

$$\lambda(T_p E) = \sum_{i=1}^{r} \lambda(T_p Q_i) = \sum_{i=1}^{r} \lambda(Q_i) = \lambda(E).$$

Ist nun $A \subseteq \mathbb{R}^n$ beliebig, so ist $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Überdeckung von A mit Elementarfiguren, genau wenn $(T_pE_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Überdeckung von T_pA von Elementarfiguren ist. (Man erinnere sich, dass man mit T_{-p} auch wieder zurück kann.) Da aber

$$\sum_k \lambda(T_pE_k) = \sum_k \lambda(E_k)$$

ist, folgt auch

$$\begin{aligned}\lambda^*(T_pA) &= \inf\{\sum_k \lambda(T_pE_k) : \ (E_k) \text{ ist Überdeckung von } A \text{ mit Elementarfiguren}\}\\ &= \inf\{\sum_k \lambda(E_k) : \ (E_k) \text{ ist Überdeckung von } A \text{ mit Elementarfiguren}\} = \lambda^*(A).\end{aligned}$$

Es ist also λ^* translationsinvariant.

(b) Die Argumentation für die Nicht-Messbarkeit der Menge $A \subseteq [0,1] =: W$ aus der Vorlesung zeigt auch, dass A nicht in der Lebesgue-Algebra $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ liegen kann. Wir gehen die beiden Ungleichungsketten noch einmal durch. Mit $I = \mathbb{Q}^n \cap W$ und $J = \mathbb{Q}^n \cap [-1,2]^n$ hatten wir die Inklusionen

$$\dot{\bigcup}_{q\in I} (A+q) \subseteq [0,2]^n \subseteq \dot{\bigcup}_{q\in J} (A+q).$$

Aus der zweiten Inklusion konnten wir schließen:

$$2^n = \lambda^*([0,2]^n) \le \lambda^*\left(\dot{\bigcup}_{q\in J} (A+q)\right) \overset{\text{äuß. Maß}}{\le} \sum_{q\in J} \lambda^*(A+q) \overset{\text{Tr.-inv.}}{=} \sum_{q\in J} \lambda^*(A).$$

Daraus sieht man, dass $\lambda^*(A) > 0$ sein muss. Das gilt immer, egal, welche Regularität A hat, und da $A \subseteq W$ ist, zeigt das übrigens, dass $\lambda^*(A) \in (0,1]$ ist.

Die erste Ungleichung liefert andererseits

$$\sum_{q\in I} \lambda^*(A) \overset{\text{Tr.-Inv.}}{=} \sum_{q\in I} \lambda^*(A+q) \overset{\text{Maß}}{=} \lambda^*\left(\dot{\bigcup}_{q\in I} (A+q)\right) \le \lambda^*([0,2]^n) = 2^n < \infty,$$

und hier geht bei der zweiten Gleichung die Maßeigenschaft von $\lambda^*|\mathfrak{L}$ ein, wenn $A \in \mathfrak{L}$ wäre. Man schließt dann, weil I unendlich ist, dass $\lambda^*(A) = 0$ sein muss, was im Widerspruch zu oben steht. Es kann also A nicht in $\mathfrak{L}$ liegen.

(c) Das Beispiel zeigt auch, dass $\lambda^* \colon \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$ nicht σ-additiv sein kann. Es muss an der obigen Stelle

$$\lambda^*\left(\dot{\bigcup}_q (A+q)\right) < \sum_q \lambda^*(A+q)$$

sein, sonst ließe sich der Widerspruch nicht lösen. (Aber schon aus der Definition der λ^*-Messbarkeit folgt, dass es ein $B \subseteq \mathbb{R}^n$ geben muss mit

$$\lambda^*(B) \ne \lambda^*(B\cap A) + \lambda^*(B \cap A^c).$$

Also ist λ^* definitiv nicht σ-additiv, denn sonst wäre $\mathfrak{L} = \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$.

[Noch eine Anmerkung: Nach dem Eindeutigkeitssatz für Maße wissen wir, dass es nur ein Maß auf der Borelalgebra $\mathfrak{B}$ geben kann, welches auf den Quadern das elementargeometrische

Volumen ergibt. Auch die Fortsetzung auf die Vervollständigung $\mathfrak{L}$ ist eindeutig bestimmt. Das obige Argument zeigt nun, dass es eine *translationsinvariante* Fortsetzung zu einem Maß auf ganz $\mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ nicht geben kann. Man ist also nicht einfach nur zu einfallslos, um vielleicht eine andere Konstruktion als die von Caratheodory zu finden.]

Aufgabe 13. **(a)** Sei λ das Borel-Lebesguesche Maß auf $\mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. Geben Sie eine *offene* Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}$ an mit $U \supset \mathbb{Q}$ und $\lambda(U) < \varepsilon$ und begründen Sie das. (Hint: Benutzen Sie eine Abzählung von $\mathbb{Q}$.)

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$, λ das Borel-Lebesguesche Maß auf $\mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$. Sei weiter $H \subseteq \mathbb{R}^n$ die Hyperebene $H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$. Geben Sie eine *offene* Quaderüberdeckung $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von H an mit $\sum_k \lambda(Q_k) < \varepsilon$ und begründen Sie.

Lösungsvorschlag. **(a)** Wir benutzen eine Abzählung der rationalen Zahlen $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und setzen:

$$U := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (q_n - 2^{-(n+2)}\varepsilon, q_n + 2^{-(n+2)}\varepsilon).$$

Da $q_n \in U$ ist, für alle $n \in \mathbb{N}$, ist $\mathbb{Q} \subseteq U$. U ist als Vereinigung von offenen Intervallen auch offen. Die beteiligten Intervalle mögen überlappen, aber in jedem Fall gilt:

$$\lambda(U) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda((q_n - 2^{-(n+2)}\varepsilon, q_n + 2^{-(n+2}\varepsilon)) = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot 2^{-(n+2)}\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\right)\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon.$$

(b) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ betrachten wir den offenen Quader

$$Q_k := (-k, k)^{n-1} \times (-\frac{1}{(2k)^{n-1}} 2^{-(k+2)}\varepsilon, \frac{1}{(2k)^{n-1}} 2^{-(k+2)}\varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^n,$$

(wobei der erste Faktor nicht da sei bei $n = 1$). Dann ist $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Überdeckung von H, denn ist $x = (x_1, \ldots, x_n) \in H$ und $r := \|x\|_1 = \max([x_1|, \ldots, |x_n|)$, so ist $x \in Q_k$ für $k = [r]+1$. Schließlich ist

$$\lambda(Q_k) = (2k)^{n-1} \cdot (2 \cdot \frac{1}{(2k)^{n-1}} 2^{-(k+2)}\varepsilon) = 2^{-(k+1)}\varepsilon$$

und damit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(Q_k) \leq \frac{1}{2}(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}) = \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon.$$

Aufgabe 14. Wir betrachten die *Elementarmatrizen*

$$u(b) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad v(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix},$$

für jedes $b \in \mathbb{R}$, und setzen $M = \{u(b) \in \mathrm{SL}_2\mathbb{R} : b \in \mathbb{R}\} \cup \{v(b) \in \mathrm{SL}_2\mathbb{R} : b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathrm{SL}_2\mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ von M erzeugt wird. (Hint: Elementare Zeilenoperationen)

(b) Zeigen Sie, dass mit $s = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2}^{-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ und jedem $b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$u(b) = s \cdot u(b) \cdot s^{-1} \cdot u(-b).$$

(c) Zeigen Sie nun, dass $\mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ gleich seiner Kommutatoruntergruppe ist.

Lösungsvorschlag. **(a)** Sei $A \in \mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ beliebig. Wir wollen zeigen, dass es endlich viele $F_1, \dots, F_k \in M$ ($k \in \mathbb{N}_0$) mit $A = F_1 \cdots F_k$ gibt. Beachte, dass wir die Inversen von $F \in M$ nicht berücksichtigen brauchen, weil mit $B \in M$ auch $B^{-1} \in M$ ist. Das kann man direkt ausrechnen oder aber auch daran sehen, dass die Multiplikation mit $B \in M$ von links an A *eine elementare Zeilenoperation* (im Sinne das Gaußschen Algorithmus') ist:

- Multiplikation von links mit $u(b)$: Addiere das b-Fache der 2. Zeile zur 1. Zeile hinzu und schreibe das Ergebnis in die 1. Zeile.
- Multiplikation von links mit $v(b)$: Addiere das b-Fache der 1. Zeile zur 2. Zeile hinzu und schreibe das Ergebnis in die 2. Zeile.

Man beachte, dass $u(b), v(b) \in \mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ sind, für alle $b \in \mathbb{R}$. Die anderen elementaren Zeilenoperationen, nämlich die Multiplikation einer Zeile mit einem Faktor ungleich Null und das Vertauschen von zwei Zeilen, entspricht der Multiplikation mit Elementarmatrizen, die i.a. *nicht* in $\mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ liegen (und damit aus der Gruppe $\mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ herausführen). Diese wollen wir daher nicht benutzen, um A in die Einheitsmatrix $\mathbf{1}$ zu überführen.

Es ist nun auch klar, dass

$$u(-b) = u(b)^{-1}, \quad v(-b) = v(b)^{-1},$$

für alle $b \in \mathbb{R}$, ist.

(i) Wir produzieren zunächst ein Element ungleich Null unten links. Ist schon $a_{21} \neq 0$, so machen wir nichts, d.h. wir setzen $E_1 := \mathbf{1}$. Im Falle $a_{21} = 0$ muss $a_{11} \neq 0$ sein. weil $\det A \neq 0$ ist. Wir setzen dann $E_1 := v(1)$ und (in beiden Fällen) $B := E_1 A$, was für b_{21} bedeutet:
$$b_{21} = a_{11} + a_{21} = a_{11} \neq 0.$$

(ii) Nun produzieren wir eine 1 oben links. Wir setzen dazu $E_2 := u((1 - b_{11})/b_{21})$ und $C := E_2 B$. Das produziert für c_{11}:
$$c_{11} = b_{11} + \frac{1}{b_{21}}(b_{11} - 1) \cdot b_{21} = 1,$$
wie gewünscht.

(iii) Damit können wir nun in der bekannten Weise unten links eine Null produzieren (und oben links die Eins beibehalten). Wir setzen $E_3 := v(-c_{21})$ und $D := E_3 C$. Dann folgt tatsächlich: $d_{21} = c_{21} + (-c_{21}) \cdot 1 = 0$ und $d_{11} = 1$. Wir sind nun also bei
$$D = \begin{pmatrix} 1 & d_{12} \\ 0 & d_{22} \end{pmatrix}.$$
Da wir die ganze Zeit in $\mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ operieren, ist $\det D = 1$, woraus $d_{22} = 1$ folgt.

(iv) Im letzten Schritt produzieren wir in der üblichen Weise eine Null oben rechts (und lassen den Rest unverändert). Setze $E_4 := u(-d_{12})$ und $E := E_4 D$. Dann ist tatsächlich $e_{12} = d_{12} + (-d_{12}) \cdot 1 = 0$ und die anderen Einträge von D ändern sich nicht, es ist also $E = \mathbf{1}$.

Insgesamt ist also $E_4 E_3 E_2 E_1 \cdot A = \mathbf{1}$ und daraus

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} E_4^{-1} \in \langle M \rangle,$$

da, wie oben gesehen, auch $F_1 := E_1^{-1}, \dots, F_4 := E_4^{-1} \in M$ liegen.

(b) Ausmultiplizieren liefert tatsächlich für alle $b \in \mathbb{R}$:

$$u(b) = s \cdot u(b) \cdot s^{-1} \cdot u(-b).$$

Da nach Teil (a) $u(-b) = u(b)^{-1}$ ist, sieht man hier schon, dass $u(b)$ ein *Kommutator* ist, nämlich $u(b) = [s, u(b)]$. Transponiert man obige Gleichung und benutzt $v(b) = u(b)^T$, so sieht man, dass

$$v(b) = u(b)^T = u(-b)^T (s^{-1})^T u(b)^T s^T = v(-b) s^{-1} v(b) s,$$

also auch (für alle $b \in \mathbb{R}$) ein Kommutator ist.

(c) Kommutatoren in einer Gruppe G sind Elemente der Bauart

$$[a, b] := aba^{-1}b^{-1},$$

für $a, b \in G$. In abelschen Gruppen ist nur das neutrale Element 1 ein Kommutator. Das Inverse eines Kommutators $[a, b]$ ist wieder ein Kommutator, nämlich $[b, a]$, wie man durch Multiplikation von links und rechts an $[a, b]$ sofort sieht,

$$[b, a] \cdot [a, b] = [a, b] \cdot [b, a] = 1.$$

Die von den Kommutatoren erzeugte Untergruppe $K \subseteq G$ enthält daher gerade alle endlichen Produkte von Kommutatoren, also Elemente $g \in G$ der Form

$$g = [a_1, b_1] \cdots [a_k, b_k],$$

mit $k \in \mathbb{N}_0$, $a_1, b_1, \dots, a_k, b_k \in G$. *Diese Kommutatoruntergruppe* $K \subseteq G$, manchmal auch mit $K =: [G, G]$ bezeichnet, misst in gewisser Weise, wie „nicht-abelsch“ die Gruppe G ist. Aufgabe (c) behauptet in dieser Schreibweise:

$$[\mathrm{SL}_2\mathbb{R}, \mathrm{SL}_2\mathbb{R}] = \mathrm{SL}_2\mathbb{R}.$$

Na ja: Aber das folgt aus den Teilen (a) und (b). Denn ist $A \in \mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ beliebig, so gibt es, wie gesehen, $F_1, \dots, F_4 \in M$ mit

$$A = F_1 \cdots F_4.$$

Aber jedes der $F_i \in M$ $(i = 1, \dots, 4)$ ist nach Teil (b) ein Kommutator. Also ist $A \in K = [\mathrm{SL}_2\mathbb{R}, \mathrm{SL}_2\mathbb{R}]$.

[Anmerkung: Ähnlich sieht man auch für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $\mathrm{SL}_n\mathbb{R} = [\mathrm{SL}_n\mathbb{R}, \mathrm{SL}_n\mathbb{R}]$ ist.]

Aufgabe 15. Sei $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ die Lebesgue-Algebra auf $\mathbb{R}^n$ und $\lambda\colon \mathfrak{L} \to [0,\infty]$ das Lebesguesche Maß auf ihr (vgl. Aufgabe 10).

(a) Zeigen Sie die Transformationsformel für Isomorphismen $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ auch für alle $A \in \mathfrak{L}$: $TA \in \mathfrak{L}$ und $\lambda(TA) = |\det T|\lambda(A)$.

(b) Zeigen Sie nun, dass die Transformationsformel für alle $A \in \mathfrak{L}$ sogar für alle linearen Abbildungen $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gilt (wobei „$0 \cdot \infty := 0$“ gesetzt wird).

Lösungsvorschlag. **(a)** Sei also $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Isomorphismus und $A \in \mathfrak{L}$. Dann gibt es Teilmengen $B, M \in \mathfrak{B}$ mit $\lambda(M) = 0$ und $N \subseteq M$, so dass $A = B \cup N$ ist, denn $\mathfrak{L}$ ist die Vervollständigung der Borel-Algebra $\mathfrak{B}$ (siehe Aufgabe 10). Dann ist $TA = TB \cup TN$. Nun ist $TB \in \mathfrak{B}$ (da T^{-1} stetig, damit Borel-messbar und $TB = (T^{-1})^{-1}(B)$ ist). Ebenso ist $TM \in \mathfrak{B}$ und $TN \subseteq TM$. Nach der Transformationsformel für $\mathfrak{B}$ ist außerdem $\lambda(TM) = |\det T|\cdot\lambda(M) = 0$. Daran sieht man, dass auch $TA \in \mathfrak{L}$ ist. Schließlich ist nach Definition des vervollständigten Maßes sowie der Transformationsformel für $\mathfrak{B}$:

$$\lambda(TA) = \lambda(TB) = |\det T| \cdot \lambda(B) = |\det T| \cdot \lambda(A).$$

(b) Nach Aufgabe 13 gilt für die Koordinatenhyperebene $H \subseteq \mathbb{R}^n$, dass $H \in \mathfrak{B}$ und $\lambda(H) = 0$ ist. Das gilt dann auch für jede andere Hyperebene $V \subseteq \mathbb{R}^n$, d.h.: $\dim V = n-1$. Ist nämlich $(v_1,\dots,v_{n-1})$ eine Basis von V, so kann man diese zu einer Basis $(v_1,\dots,v_{n-1},v_n)$ von $\mathbb{R}^n$ ergänzen. Ist $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dann der Isomorphismus, der die kanonische Basis $(e_1,\dots,e_n)$ nach $(v_1\dots,v_n)$ abbildet, so ist $TH = V$. Die Transformationsfomel liefert dann

$$\lambda(V) = \lambda(TH) = |\det T| \cdot \lambda(H) = 0.$$

Ist nun $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine beliebige lineare Abbildung, so können wir $\operatorname{rg}(T) < n$ annehmen, denn für Isomorphismen haben wir die Transformationsformel schon bewiesen. Dann gibt es also eine Hyperebene $V \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $T\mathbb{R}^n \subseteq V$. Ist nun $A \in \mathfrak{L}$ beliebig, so ist $TA \subseteq V$ und da $\lambda(V) = 0$ ist, folgt $TA \in \mathfrak{L}$. Wegen $TA = \emptyset \cup TA$ ist schließlich nach Definition des vervollständigten Maßes

$$\lambda(TA) = \lambda(\emptyset) = 0 = 0 \cdot \lambda(A) = |\det T| \cdot \lambda(A),$$

denn wegen $\operatorname{rg}(T) < n$ ist $\det T = 0$.

Aufgabe 16. Seien $\mathrm{SL}_n\mathbb{R} \subseteq \mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ die *spezielle lineare Gruppe* und $\mathrm{SO}_n\mathbb{R} \subseteq \mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ die *spezielle orthogonale Gruppe*.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{SL}_n\mathbb{R}$ und $\mathrm{SO}_n\mathbb{R}$ Untergruppen von $\mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ sind.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{SO}_2\mathbb{R}$ genau aus den *Drehmatrizen*

$$u(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

mit $\theta \in [0, 2\pi]$ besteht. (Hint: In den Spalten einer speziellen orthogonalen Matrix steht eine positiv orientierte Orthonormalbasis.)

(c) Sei $S \in \mathrm{SO}_3\mathbb{R} \setminus \{\mathbf{1}\}$. Zeigen Sie, dass es einen 1-dimensionalen Unterraum $L \subseteq \mathbb{R}^3$ gibt mit $Sx = x$, für alle $x \in L$ (eine so genannte *Fixgerade*), und dass S das senkrechte Komplement

$E = L^\perp$ von L in sich abbildet und dort eine Drehung um einen Winkel $\theta \in (0, 2\pi)$ (bzgl. einer gewählten Orientierung von E) ist. (Hint: Zeigen Sie, dass $\lambda = 1$ ein Eigenwert von S ist.)

Lösungsvorschlag. (a) Ist G eine Gruppe, so ist eine nicht-leere Teilmenge $H \subseteq G$ eine Untergruppe von G, wenn mit $g, h \in G$ auch $gh \in G$ ist, und wenn mit $g \in G$ auch $g^{-1} \in G$ ist.

(i) Bei $G = \mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ und $H = \mathrm{SL}_n\mathbb{R}$ haben wir das in Aufgabe 14 schon ausgiebig benutzt. Nach dem Determinanten-Multiplikationssatz gilt nämlich für $S, T \in \mathrm{SL}_n\mathbb{R}$, dass

$$\det(S \cdot T) = \det(S) \cdot \det(T) = 1 \cdot 1 = 1$$

ist. Ebenso gilt für $U \in \mathrm{SL}_n\mathbb{R}$, dass auch

$$\det(U^{-1}) = (\det(U))^{-1} = 1^{-1} = 1$$

ist und damit auch $ST \in \mathrm{SL}_n\mathbb{R}$ sowie $U^{-1} \in \mathrm{SL}_n\mathbb{R}$. Da auch $\mathbf{1} \in \mathrm{SL}_n\mathbb{R}$ (und damit $\mathrm{SL}_n\mathbb{R} \neq \emptyset$) ist, ist also $\mathrm{SL}_n\mathbb{R}$ eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n\mathbb{R}$.

(ii) Die orthogonalen Matrizen $\mathrm{O}_n\mathbb{R} \subseteq \mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ sind durch die Bedingung

$$A^T \cdot A = \mathbf{1}$$

definiert. Das bedeutet, dass in ihren Spalten (und auch ihren Zeilen) eine Orthonormalbasis (ON-Basis) des $\mathbb{R}^n$ (bzgl. seines kanonischen Skalarproduktes) steht. Sind nun $A, B \in \mathrm{O}_n\mathbb{R}$, so ist

$$(AB)^T \cdot (AB) = (B^T A^T) \cdot (AB) = B^T \cdot \mathbf{1} \cdot B = \mathbf{1},$$

also auch $AB \in \mathrm{O}_n\mathbb{R}$. Ist $C \in \mathrm{O}_n\mathbb{R}$, so ist nach Multiplikation mit C^{-1} an $C^T C = \mathbf{1}$ von rechts: $C^T = C^{-1}$. Deshalb ist auch

$$(C^{-1})^T \cdot (C^{-1}) = (C^T)^T \cdot C^{-1} = C \cdot C^{-1} = \mathbf{1},$$

und damit auch $C^{-1} \in \mathrm{O}_n\mathbb{R}$. Da auch $\mathbf{1} \in \mathrm{O}_n\mathbb{R}$ ist, ist also $\mathrm{O}_n\mathbb{R}$ eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n\mathbb{R}$.

Der Durchschnitt $H_1 \cap H_2$ zweier Untergruppen $H_1, H_2 \subseteq G$ einer Gruppe G ist wieder eine Untergruppe, wie man unmittelbar sieht. Es folgt, dass auch $\mathrm{SO}_n\mathbb{R} = \mathrm{O}_n\mathbb{R} \cap \mathrm{SL}_n\mathbb{R}$ eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ ist.

(b) Ist

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2\mathbb{R},$$

so ist also mit $u_1 := \binom{u_{11}}{u_{21}}$ und $u_2 = \binom{u_{12}}{u_{22}}$ das Paar (u_1, u_2) eine ON-Basis von $\mathbb{R}^2$. Insbesondere ist damit

$$u_1 \in \mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}.$$

Es gibt daher ein $\theta \in [0, 2\pi)$, so dass

$$u_{11} = \cos\theta, \quad u_{21} = \sin\theta$$

ist. (θ ist der positiv orientierte Winkel zwischen den Strahlen $\mathbb{R}_{\geq 0}e_1$ und $\mathbb{R}_{\geq 0}u_1$.) Nun hat auch u_2 Länge 1 und er steht senkrecht auf u_1. Daher gibt es für u_2 nur zwei Möglichkeiten:

$$u_2 = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad u_2 = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Im ersten Fall ist (u_1, u_2) *positiv orientiert*, wie man sagt, d.h.

$$\det(U) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = +1.$$

Es ist dann also $U = u(\theta)$. Im zweiten Fall ist $U = v(\theta)$, wenn wir

$$v(\theta) := \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

setzen. Diese ist *negativ orientiert*, d.h.

$$\det v(\theta) = -\cos^2\theta - \sin^2\theta = -1.$$

Die Matrizen in $\mathrm{SO}_2\mathbb{R}$ sind also gerade die Drehmatrizen $u(\theta)$, für $\theta \in [0, 2\pi)$, und da $u(\theta+2\pi) = u(\theta)$ ist, für alle $\theta \in \mathbb{R}$, können wir auch $\theta \in \mathbb{R}$ zu nehmen.

[Anmerkung 1: $u(\theta)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dreht dann tatsächlich um den Winkel θ in positive Richtung, denn nach den Additionstheoremen für cos und sin gilt für $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ in Polardarstellung:

$$x = r \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

(mit $r > 0$ und $\varphi \in \mathbb{R}$). Es ist dann

$$\begin{aligned} u(\theta) \cdot x &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot r \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \\ &= r \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos(\varphi+\theta) \\ \sin(\varphi+\theta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Norm $r = \|x\|$ wird also beibehalten und der Winkel $\varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ geht in $\varphi + \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ über.]

[Anmerkung 2: $\mathrm{GL}_2\mathbb{R} \subseteq \mathrm{Mat}_2\mathbb{R} = \mathbb{R}^4$ ist eine offene (und dichte) Teilmenge in $\mathbb{R}^4$. Ihr Komplement wird durch die Gleichung $\det(S) = s_{11}s_{22} - s_{12}s_{21} = 0$ beschrieben, dem Nullstellengebilde eines Polynoms vom Grad 2 (ein gewisser Doppelkegel in $\mathbb{R}^4$). Innerhalb dieser 4-dimensionalen offenen Menge liegt die $\mathrm{SO}_2\mathbb{R} \subseteq \mathrm{GL}_2\mathbb{R}$ also als *eine 1-dimensionale Kreislinie* durch $\mathbf{1} \in \mathrm{GL}_2\mathbb{R}$.]

(c) Bevor wir uns mit den Elementen in $\mathrm{SO}_3\mathbb{R} \subseteq \mathrm{GL}_3\mathbb{R}$ beschäftigen (also einer gewissen Teilmenge in dem offenen und dichten $\mathrm{GL}_3\mathbb{R} \subseteq \mathrm{Mat}_3\mathbb{R} = \mathbb{R}^9$), untersuchen wir noch die Matrizen $S \in \mathrm{SO}_2\mathbb{R}$ mit $\det S = -1$. (Vorsicht: Diese bilden keine Untergruppe, da beipsielsweise $\mathbf{1}$ nicht enthalten ist.) Setzt man z.B.

$$S_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

das ist dann die Spiegelung an der x_1-Achse, so sieht man wegen des Determinantensatzes, dass

$$M = \{S \in \mathrm{O}_2\mathbb{R} : \det S = -1\}$$

nur *eine Verschiebung* von $\mathrm{SO}_2\mathbb{R}$ um S_0 im Sinne von

$$M = \mathrm{SO}_2\mathbb{R} \cdot S_0$$

ist, also wieder eine Kreislinie in $\mathrm{GL}_2\mathbb{R}$ (dieses Mal durch S_0). (Die $\mathrm{O}_2\mathbb{R}$ besteht daher aus zwei (disjunkten) Kreislinien in diesem 4-dimensionalen Raum.) Jedes $T \in M$ ist nämlich von der Form $T = S \cdot S_0$ mit einem eindeutig bestimmten $S \in \mathrm{SO}_2\mathbb{R}$ und umgekehrt ist für jedes $S \in \mathrm{SO}_2\mathbb{R}$ die Matrix $T = S \cdot S_0$ in M. (Multiplikation mit S_0 überführt gerade $u(\theta) \in \mathrm{SO}_2\mathbb{R}$ in $v(\theta) \in M$.)

Während man die Drehmatrizen $u(\theta) \in \mathrm{SO}_2\mathbb{R}$ nicht diagonalisieren kann (für $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$), da $u(\theta)$ Vektoren dreht und damit keine Vektoren streckt bzw. staucht und deshalb keinen Eigenwert haben kann, ist das bei den Matrizen $v(\theta) \in M$ anders. Das charakteristische Polynom $\chi_{v(\theta)}$ von $v(\theta)$ zerfällt nämlich hier:

$$\begin{aligned}
\chi_{v(\theta)}(t) &= \det \begin{pmatrix} \cos\theta - t & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta - t \end{pmatrix} \\
&= (\cos\theta - t)(-1)(\cos\theta + t) - \sin^2\theta \\
&= -(\cos^2\theta - t^2) - \sin^2\theta = t^2 - 1 = (t-1)(t+1).
\end{aligned}$$

Eigenvektoren v_1 bzw. v_2 in $\mathbb{R}^2$ bzgl. der Eigenwerte $+1$ und -1 berechnet man schnell mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ 1 - \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v(\theta) \cdot v_1 = v_1$$

und

$$v_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta - 1 \\ \sin\theta \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v(\theta) \cdot v_2 = -v_2.$$

Außerdem stehen (u, v) senkrecht aufeinander (was bei Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten von orthogonalen Matrizen immer so ist). Es ist also $v(\theta)$ die Spiegelung an der Geraden $L = \mathbb{R}v_1$ und $v(\theta)$ ein Konjugertes von S_0,

$$v(\theta) = T \cdot S_0 \cdot T^{-1},$$

mit einem $T \in \mathrm{SO}_2\mathbb{R}$ (wenn man die Eigenvektoren v_1, v_2 noch auf 1 ablängt und evtl. bei einem noch zum Negativen übergeht, so dass daraus eine positiv orientierte ON-Basis wird, die man spaltenweise in T hineinschreibt). In $\mathrm{SO}_2\mathbb{R}$ liegen also die Drehungen (um den Nullpunkt) und in M die Spiegelungen (an die Geraden durch den Nullpunkt).

Nun endlich zu Teil (c): Ist $S \in \mathrm{O}_3\mathbb{R}$, so sind die einzigen möglichen Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{R}$ von S die Zahlen $\lambda = \pm 1$. Denn weil S das kanonische Skalarprodukt erhält, erhält es auch die Längen von Vektoren. Ist dann $Sx = \lambda x$, für ein $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, ist

$$\lambda^2 \cdot \|x\|^2 = \|\lambda x\|^2 = \|Sx\|^2 = \|x\|^2,$$

also $\lambda^2 = 1$. Wir arbeiten beide Fälle ab.

(i) Ist $\lambda = 1$ ein Eigenwert und $x_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor dazu, so ist damit $L := \mathbb{R}x_0$ *eine Fixgerade* für S, d.h.: $Sx = x$, für alle $x \in L$. Sei $E = L^\perp$ das senkrechte Komplement zu L. Dann ist $S(E) \subseteq E$, weil aus $\langle y, x_0 \rangle = 0$ auch

$$\langle Sy, x_0 \rangle = \langle Sy, Sx_0 \rangle = \langle y, x_0 \rangle = 0$$

folgt. Nehmen wir nun an, dass $S \in \mathrm{SO}_3\mathbb{R}\backslash\{\mathbf{1}\}$ ist. Da $\dim E = 2$ und $S|E: E \to E$ speziell orthogonal ist, folgt mit Teil (b), dass $S|E: E \to E$ eine Drehung um den Nullpunkt und damit $S: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine Drehung um die Achse L ist. (Zerlege jeden Vektor eindeutig in eine Summe von Vektoren in L und E, $\mathbb{R}^3 = L \oplus E$.)

(ii) Im Falle $\lambda = -1$ und einem Eigenvektor $x_0 \in \mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ gilt für das senkrechte Komplement E von $L = \mathbb{R}x_0$ auch, dass S die Ebene E in sich überführt. Aber dieses Mal muss $S|E: E \to E$ eine Spiegelung sein, wenn $S \in \mathrm{SO}_3\mathbb{R}$ ist, denn

$$1 = \det S = (-1) \cdot \det(S|E), \text{ also } \det(S|E) = -1.$$

Aber dann hat $S|E$ auch eine Fixgerade L', nämlich die Spiegelungsachse in E. Wie oben sieht man dann, das S eine Drehung um L' sei muss.

Und jetzt fehlt uns noch ein Grund, warum S überhaupt einen Eigenwert haben muss (der dann, wie gesehen, $+1$ oder -1 sein muss). Na ja: Das charakteristische Polynom $\chi_S: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von S ist ein Polynom jetzt vom Grad 3 mit führendeM Koeffizienten $(-1)^3 = -1$, und erfüllt damit

$$\lim_{t\to-\infty} \chi_S(t) = +\infty, \quad \lim_{t\to\infty} \chi_S(t) = -\infty.$$

Nach dem Zwischenwertsatz hat χ_S deshalb eine Nullstelle, also S einen Eigenwert. Damit ist klar, dass S tatsächlich eine Drehung um eine Achse sein muss. Nach Konjugation mit einem geeigneten Element $T \in \mathrm{SO}_3\mathbb{R}$ sieht also S so aus:

$$TST^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[Anmerkung: Wir werden später in der Vorlesung sehen, dass $\mathrm{SO}_3\mathbb{R}$ eine kompakte 3-*dimensionale Untermannigfaltigkeit* von $\mathrm{Mat}_3\mathbb{R} = \mathbb{R}^9$ ist.]

[Wie die Elemente $S \in \mathrm{O}_3\mathbb{R}$ mit $\det S = -1$ aussehen, erspare ich Ihnen jetzt.]

Aufgabe 17. Sei $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $Y \in \mathfrak{A}$.

(a) Wir definieren *die Spuralgebra von* $\mathfrak{A}$ *auf* Y durch

$$\mathfrak{B} := \{A \cap Y \in \mathfrak{P}(Y) : \; A \in \mathfrak{A}\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathfrak{B}$ eine σ-Algebra auf Y ist und $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$.

(b) Nun defnieren wir $\nu: \mathfrak{B} \to [0, \infty]$ durch $\nu := \mu|\mathfrak{B}$. Zeigen Sie, dass ν ein Maß auf $(Y, \mathfrak{B})$ ist.

(c) Sei $f: X \to \bar{\mathbb{R}}$ $\mathfrak{A}$-messbar. Zeigen Sie, dass dann auch $f|Y: Y \to \bar{\mathbb{R}}$ $\mathfrak{B}$-messbar ist. Sei nun zusätzlich $f \geq 0$ und $\chi_Y: X \to \mathbb{R}$ die charakteristische Funktion von Y. Zeigen Sie dann:

$$\int f|Y \, d\nu = \int f \cdot \chi_Y \, d\mu.$$

(Diese Zahl in $[0, \infty]$ wird mit $\int_Y f \, d\mu$ bezeichnet.)

Lösungsvorschlag. (a) Mit $A := X$ folgt $A \cap Y = Y$ also ist $Y \in \mathfrak{B}$. Sei $B \in \mathfrak{B}$. Dann ist also $B = A \cap Y$ mit $A \in \mathfrak{A}$. Es folgt

$$Y \setminus B = Y \setminus (A \cap Y) = Y \setminus A = A^c \cap Y \in \mathfrak{B},$$

da $A^c \in \mathfrak{A}$ ist. Seien $B_n \in \mathfrak{B}$ $(n \in \mathbb{N})$, also $B_n = A_n \cap Y$ mit $A_n \in \mathfrak{A}$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann ist auch $\bigcup_n B_n = (\bigcup_n A_n) \cap Y \in \mathfrak{B}$, da $\bigcup_n A_n \in \mathfrak{A}$ ist. Damit ist $\mathfrak{B}$ also eine σ-Algebra auf Y (und dies ist auch für ein beliebiges $Y \subseteq X$, welches nicht notwendig messbar ist, richtig.) Schließlich ist für jedes $B \in \mathfrak{B}$,weil $B = A \cap Y$ für ein $A \in \mathfrak{A}$ ist (und $Y \in \mathfrak{A}$), auch $B \in \mathfrak{A}$. Es ist also $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$.

(b) Es ist $\nu(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$ und

$$\nu(\dot{\bigcup_n} B_n) = \mu(\dot{\bigcup_n} B_n) = \sum_n \mu(B_n) = \sum_n \nu(B_n),$$

falls $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Teilmengen in $\mathfrak{B}$ ist.

(c) Ist $f \colon X \to [0, \infty] \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathfrak{A}$-messbar und $C \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ (Borel-) messbar, so ist $(f|Y)^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cap Y \in \mathfrak{B}$, da $f^{-1}(C) \in \mathfrak{A}$ ist. Es ist also $f|Y \colon Y \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathfrak{B}$-messbar.

Sei nun zunächst $s \colon X \to [0, \infty)$ eine ($\mathfrak{A}$-) messbare Treppenfunktion. Es gibt dann ein $r \in \mathbb{N}_0$ sowie $\alpha_j \geq 0$ und $A_j \in \mathfrak{A}$ $(j = 1, \ldots r)$ mit $s = \sum_{j=1}^r \alpha_j \chi_{A_j}$. Wir nehmen s in ihrer *reduzierten Form* an, d.h.: $\alpha_j > 0$, für alle $j = 1, \ldots, r$, und $A_i \cap A_j = \emptyset$, für $1 \leq i \neq j \leq r$. Nehmen wir nun weiter an, das $s(x) = 0$ ist, für alle $x \in X \setminus Y$. Dann ist $A_j \subseteq Y$ und daher auch

$$s|Y = \sum_{j=1}^r \alpha_j \chi_{A_j}.$$

Es folgt:

$$\int s|Y \, d\nu = \sum_{j=1}^r \alpha_j \nu(A_j) = \sum_{j=1}^r \alpha_j \mu(A_j) = \int s \, d\mu.$$

Sei jetzt $f \geq 0$. Dann ist auch das Produkt $f\chi_Y \geq 0$ (und $\mathfrak{A}$-messbar). Es gibt deshalb eine Folge (s_n) von $\mathfrak{A}$-messbaren Treppenfunktionen mit $(s_n) \nearrow f\chi_Y$. Da $0 \leq s_n(x) \leq f(x)\chi_Y(x) = 0$ für $x \in X \setminus Y$ ist, ist jedes s_n von der obigen Form. Weil nun schließlich auch $(s_n|Y)$ eine Folge von ($\mathfrak{B}$-messbaren) Treppenfunktionen mit $(s_n|Y) \nearrow f|Y$ ist, folgt mit Levis Satz

$$\int f|Y \, d\nu = \lim_{n\to\infty} \int s_n|Y \, d\nu = \lim_{n\to\infty} \int s_n \, d\mu = \int f\chi_Y \, d\mu.$$

Aufgabe 18. Sei $(X, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$ ein Maßraum, $\mathfrak{A}_2 \subseteq \mathfrak{A}_1$ eine σ-Unteralgebra und es sei $\mu_2 := \mu_1|\mathfrak{A}_2$.

(a) Zeigen Sie, dass auch $(X, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$ ein Maßraum ist.

(b) Sei $f \colon X \to [0, \infty]$ $\mathfrak{A}_2$-messbar. Zeigen Sie, dass f dann auch $\mathfrak{A}_1$-messbar ist und es gilt:

$$\int f \, d\mu_1 = \int f \, d\mu_2.$$

Lösungsvorschlag. (a) Das ist sehr ähnlich zu Aufgabe 17.b.

(b) Ist $f\colon X \to [0,\infty]$ $\mathfrak{A}_2$-messbar, so gilt für jedes messbare $C \subseteq [0,\infty]$, dass $f^{-1}(C) \in \mathfrak{A}_2 \subseteq \mathfrak{A}_1$ ist, also ist f auch $\mathfrak{A}_1$-messbar.

Sei nun zunächst $s\colon X \to [0,\infty)$ eine $\mathfrak{A}_2$-messbare Treppenfunktion. Dann gibt es $r \in \mathbb{N}_0$, $\alpha_j \geq 0$ und $A_j \in \mathfrak{A}_2$ $(j = 1,\dots,r)$ mit $s = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \chi_{A_j}$. Es ist dann s auch $\mathfrak{A}_1$-messbar und nach Definition ist

$$\int s\,d\mu_1 = \sum_{k=1}^{r} \alpha_j \mu_1(A_j) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \mu_2(A_j) = \int s\,d\mu_2.$$

Jetzt sei $f\colon X \to [0,\infty]$ $\mathfrak{A}_2$-messbar, aber ansonsten beliebig. Wir können dann eine monotone Folge $\mathfrak{A}_2$-messbarer Treppenfunktionen (s_n) finden mit $(s_n) \nearrow f$. Nach Levis Satz, zweimal angewendet, ist dann

$$\int f\,d\mu_1 = \lim_{n\to\infty} \int s_n\,d\mu_1 = \lim_{n\to\infty} \int s_n\,d\mu_2 = \int f\,d\mu_2.$$

Aufgabe 19. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend. Zeigen Sie, dass f (Borel-) messbar ist.

Lösungsvorschlag. Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig. Für die Messbarkeit von $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ reicht es zu zeigen, dass $B := f^{-1}((-\infty,a])$ messbar ist. Dazu betrachten wir $\sup B \in [-\infty,\infty]$ und unterscheiden die beiden folgenden Fälle:

(i) $\sup B \in B$: Dann ist zunächst sicher $B \subseteq (-\infty,\sup B]$. Andererseits ist auch $(-\infty,\sup B] \subseteq B$, denn ist $x \leq \sup B$, so ist auch $f(x) \leq f(\sup B) \leq a$, also $x \in B$. Es ist also $B = (-\infty,\sup B]$ und damit messbar.

(ii) $\sup B \notin B$: Der Fall $\sup B = -\infty$ ist zunächst mal trivial, weil dann $B = \emptyset$ und damit messbar ist. In jedem Fall ist hier nun $B \subseteq (-\infty,\sup B)$. Aber andererseits ist auch $(-\infty,\sup B) \subseteq B$, denn ist $x < \sup B$, so gibt es ein $y \in B$ mit $x < y$. Aber dann ist $f(x) \leq f(y) \leq a$, also auch $x \in B$. Es folgt $B = (-\infty,\sup B)$ und damit ist auch hier B messbar.

Aufgabe 20. Sei $(X,\mathfrak{A},\mu)$ ein Maßraum und $g\colon X \to [0,\infty]$ messbar.

(a) Zeigen Sie, dass durch $\nu\colon \mathfrak{A} \to [0,\infty]$,

$$\nu(A) = \int_A g\,d\mu$$

(vgl. Aufgabe 17) ein Maß auf $(X,\mathfrak{A})$ gegeben wird. (Dieses wird *das mit g gewichtete Maß μ* genannt und manchmal (wegen Teil (b)) auch mit $d\nu = g \cdot d\mu$ bezeichnet.)

(b) Sei $f\colon X \to [0,\infty]$ messbar. Zeigen Sie:

$$\int f\,d\nu = \int f \cdot g\,d\mu.$$

Lösungsvorschlag. (a) Es ist $\chi_\emptyset = 0$ und daher

$$\nu(\emptyset) = \int_\emptyset g\,d\mu = \int g\chi_\emptyset\,d\mu = \int 0\,d\mu = 0.$$

Sei nun $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von paarweise disjunkten Teilmengen $A_n \in \mathfrak{A}$ $(n \in \mathbb{N})$, $A_m \cap A_n = \emptyset$ für $m \neq n$. Es ist dann für $A := \dot{\bigcup}_n A_n$:

$$\chi_A = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n},$$

wobei für jedes $x \in A$ auf der rechten Seite eigentlich nur ein Summand von Null verschieden ist. Aber trotzdem ist χ_A i.a. keine Treppenfunktion. Allerdings sind die Partialsummen

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} \chi_{A_k}$$

Treppenfunktionen und es gilt $(s_n) \nearrow \chi_A$. Da $g \geq 0$ ist, gilt damit auch $(s_n g) \nearrow \chi_A g$. Wegen der Additivität des Integrals und Levis Satz ist deshalb

$$\begin{aligned}
\nu(A) &= \int_A g\, d\mu = \int g\chi_A\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int s_n g\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \sum_{k=1}^{n} \chi_{A_k} g\, d\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} (\sum_{k=1}^{n} \int g\chi_{A_k}\, d\mu) = \lim_{n\to\infty} (\sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} g\, d\mu) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \nu(A_k) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n).
\end{aligned}$$

Also ist ν ein Maß.

(b) Ist nun $f\colon X \to [0,\infty]$ messbar, so auch $f \cdot g\colon X \to [0,\infty]$. Sei nun (wie üblich) $f = s$ zunächst eine Treppenfunktion, also $s = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \chi_{A_j}$ (mit $r \in \mathbb{N}_0$, $\alpha_j \geq 0$ und $A_j \subseteq X$ wie üblich). Dann ist

$$\int s\, d\nu = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \nu(A_j) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \int g\chi_{A_j}\, d\mu = \int (\sum_{j=1}^{r} \alpha_j \chi_{A_j}) g\, d\mu = \int sg\, d\mu.$$

Ist schließlich nun $f \geq 0$ beliebig (aber messbar), so wählen wir wieder eine Folge von Treppenfunktionen (s_n), die monoton wachsend gegen f konvergiert, $(s_n) \nearrow f$. Wegen $g \geq 0$ gilt dann auch $(s_n g) \nearrow fg$. Mit der zweifachen Anwendung von Beppo Levis Satz erhalten wir dann auch

$$\int f\, d\nu = \lim_{n\to\infty} \int s_n\, d\nu = \lim_{n\to\infty} \int s_n g\, d\mu = \int fg\, d\mu.$$

Aufgabe 21. Seien $(X, \mathfrak{A})$ und $(Y, \mathfrak{B})$ Messräume und $\Phi\colon X \to Y$ messbar. Sei weiter μ ein Maß auf $(X, \mathfrak{A})$. Dann definieren wir $\nu\colon \mathfrak{B} \to [0,\infty]$ durch $\nu(B) = \mu(\Phi^{-1}(B))$.

(a) Zeigen Sie, dass ν ein Maß auf $(Y, \mathfrak{B})$ ist. (Wir nennen ν *das Bildmaß von* μ *unter* Φ und notieren es so: $\nu =: \Phi_*\mu$.)

(b) Sei nun $g\colon Y \to [0,\infty]$ messbar. Zeigen Sie, dass dann auch $f := g \circ \Phi\colon X \to [0,\infty]$ messbar ist und für alle $B \in \mathfrak{B}$ gilt (vgl. Aufgabe 17):

$$\int_B g\, d\nu = \int_{\Phi^{-1}(B)} f\, d\mu.$$

Lösungsvorschlag. (a) Es ist

$$\nu(\emptyset) = \mu(\Phi^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$$

und für eine Folge paarweise disjunkter Elemente in $\mathfrak{B}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ist auch $(\Phi^{-1}(B_n))$ $(n \in \mathbb{N})$ eine Folge in $\mathfrak{A}$, die paarweise disjunkt ist. Da μ ein Maß ist, folgt

$$\nu(\dot{\bigcup_n} B_n) = \mu(\Phi^{-1}(\dot{\bigcup_n} B_n)) = \mu(\dot{\bigcup_n} \Phi^{-1}(B_n)) = \sum_n \mu(\Phi^{-1}(B_n)) = \sum_n \nu(B_n).$$

Also ist auch ν ein Maß.

(b) Ist $g: Y \to [0,\infty]$ messbar und $f = g \circ \Phi: X \to [0,\infty]$, so ist f messbar, denn Verkettungen messbarer Abbildungen sind messbar: Für alle messbaren $C \subseteq [0,\infty]$ ist

$$f^{-1}(C) = \Phi^{-1}(\underbrace{g^{-1}(C)}_{\in\mathfrak{B}}) \in \mathfrak{A}.$$

Sei nun zunächst $g = t$ eine Treppenfunktion auf Y. Es gibt dann also ein $r \in \mathbb{N}_0$, $\beta_j \geq 0$ und $B_j \in \mathfrak{B}$ $(j = 1, \ldots, r)$ mit $t = \sum_j \beta_j \chi_{B_j}$. Dann ist auch

$$s := t \circ \Phi = \sum_j \beta_j \chi_{B_j} \circ \Phi = \sum_j \beta_j \chi_{\Phi^{-1}(B_j)}$$

eine Treppenfunktion, denn für $B \subseteq Y$ ist $\chi_B \circ \Phi = \chi_{\Phi^{-1}(B)}$. Dann ist nach Definition des Integrals über Treppenfunktionen

$$\int t\, d\nu = \sum_j \beta_j \nu(B_j) = \sum_j \beta_j \mu(\Phi^{-1}(B_j)) = \int s\, d\mu.$$

Schließlich fixieren wir $B \in \mathfrak{B}$ und ein messbares $g: Y \to [0,\infty]$. Dann wählen wir eine monoton wachsende Folge (t_n) von Treppenfunktionen auf Y mit $(t_n) \nearrow g\chi_B$. Die Folge von Treppenfunktionen (s_n) mit $s_n := t_n \circ \Phi$ konvergiert dann monoton gegen

$$(g\chi_B) \circ \Phi = (g \circ \Phi) \cdot (\chi_B \circ \Phi) = f\chi_{\Phi^{-1}(B)}.$$

Mit Levis Satz erhalten wir deshalb

$$\int_B g\, d\nu = \int g\chi_B\, d\nu = \lim_n \int t_n\, d\nu = \lim_n \int s_n\, d\mu = \int f\chi_{\Phi^{-1}(B)}\, d\mu = \int_{\Phi^{-1}(B)} f\, d\mu.$$

Aufgabe 22. Sei $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $\hat{\mathfrak{A}}$ die bzgl. μ vervollständigte σ-Algebra von $\mathfrak{A}$ (siehe Aufgabe 07).

(a) Sei $g: X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathfrak{A}$-messbar und $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion mit $f = g$ μ-fast-überall. Zeigen Sie, dass f dann $\hat{\mathfrak{A}}$-messbar ist.

(b) Sei nun $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\hat{\mathfrak{A}}$-messbar. Zeigen Sie, dass es dann $\mathfrak{A}$-messbare Funktionen $g_1, g_2: X \to \overline{\mathbb{R}}$ gibt mit $g_1 = g_2$ μ-fast-überall und $g_1 \leq f \leq g_2$. (Hinweis: Zeigen Sie das zunächst für $\hat{\mathfrak{A}}$-messbare Treppenfunktionen.)

Lösungsvorschlag. (a) Sei $N := \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$. Nach Voraussetung gibt es ein $M \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(M) = 0$ und $N \subseteq M$. Sei nun $B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Dann ist $f^{-1}(B) \cap M^c = g^{-1}(B) \cap M^c$, denn auf $M^c \subseteq N^c$ stimmen f und g überein. Es folgt

$$f^{-1}(B) = (f^{-1}(B) \cap M^c) \cup (f^{-1}(B) \cap M) = (\underbrace{g^{-1}(B) \cap M^c}_{\in \mathfrak{A}}) \cup (\underbrace{f^{-1}(B) \cap M}_{\subseteq M}) \in \hat{\mathfrak{A}}.$$

Also ist f $\hat{\mathfrak{A}}$-messbar.

(b) (i) Sei $f = s\colon X \to [0, \infty)$ zunächst eine $\hat{\mathfrak{A}}$-Treppenfunktion. Es gibt dann $r \in \mathbb{N}_0$, $\alpha_j \geq 0$ und $A_j \in \hat{\mathfrak{A}}$ $(j = 1, \ldots, r)$ mit $s = \sum_j \alpha_j \chi_{A_j}$. Da $A_j \in \hat{\mathfrak{A}}$ ist, gibt es weiterhin $B_j, M_j \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(M_j) = 0$ sowie $N_j \subseteq M_j$ mit $A_j = B_j \cup N_j$ (für $j = 1, \ldots, r$). Wir setzen dann $C_j := B_j \cup M_j \in \mathfrak{A}$ $(j = 1, \ldots, r)$ und

$$t_1 := \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \chi_{B_j}, \quad t_2 := \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \chi_{C_j}.$$

Dann sind t_1, t_2 $\mathfrak{A}$-Treppenfunktionen und wegen $B_j \subseteq A_j \subseteq C_j$ ist $\chi_{B_j} \leq \chi_{A_j} \leq \chi_{C_j}$ und damit

$$t_1 = \sum_j \alpha_j \chi_{Bj} \leq \sum_j \alpha_j \chi_{A_j} = s \leq \sum_j \alpha_j \chi_{C_j} = t_2.$$

Schließlich ist mit $M := \bigcup_j M_j$ sicher $t_1(x) = t_2(x)$ für $x \in M^c$, denn $B_j \cap M^c = C_j \cap M^c$ für $j = 1, \ldots, r$. Da $0 \leq \mu(M) \leq \sum_j \mu(M_j) = \sum_j 0 = 0$ ist, ist M eine Nullmenge und damit gilt: $t_1 = t_2$ f.ü..

(ii) Sei nun $f\colon X \to [0, \infty]$ $\hat{\mathfrak{A}}$-messbar. Dann gibt es eine monoton wachsende Folge (s_n) von $\hat{\mathfrak{A}}$-messbaren Treppenfunktionen mit $(s_n) \nearrow f$. Nach (i) gibt es $\mathfrak{A}$-messbare Treppenfunkionen $t_n^{(1)}, t_n^{(2)}$ mit $t_n^{(1)} \leq s_n \leq t_n^{(2)}$ und $t_n^{(1)} = t_n^{(2)}$ f.ü.. Wir setzen

$$g_1 := \liminf_{n \to \infty} t_n^{(1)}, \quad g_2 := \liminf_{n \to \infty} t_n^{(2)}.$$

Dann sind g_1 und g_2 $\mathfrak{A}$-messbar und es ist

$$g_1 = \liminf_n t_n^{(1)} \leq \liminf_n s_n = \lim_n (s_n) = f \leq \liminf_n t_n^{(2)} = g_2.$$

Setzen wir schließlich $M_n := \{x \in X : t_n^{(1)}(x) \neq t_n^{(2)}(x)\} \in \mathfrak{A}$, so ist das eine Nullmenge und daher auch $M := \bigcup_n M_n$. Für alle $x \in M^c$ ist dann $t_n^{(1)}(x) = t_n^{(2)}(x)$, und daher auch

$$g_1(x) = \liminf_n t_n^{(1)}(x) = \liminf_n t_n^{(2)}(x) = g_2(x).$$

Es ist also $g_1 = g_2$ f.ü..

(iii) Ist nun schließlich $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\hat{\mathfrak{A}}$-messbar, so existieren $h_1, h_2, k_1, k_2\colon X \to [0, \infty]$ $\mathfrak{A}$-messbar mit $h_1 \leq f_+ \leq h_2$ und $k_1 \leq f_- \leq k_2$ sowie $h_1 = h_2$ f.ü. und $k_1 = k_2$ f.ü.. Wir setzen $g_1 := h_1 - k_2$ und $g_2 := h_2 - k_1$. Dann sind g_1, g_2 $\mathfrak{A}$-messbar, es ist auch $g_1 = g_2$ f.ü. und

$$g_1 = h_1 - k_2 \leq f_+ - f_- = f \leq h_2 - k_1 = g_2.$$

Aufgabe 23. Sei X ein Maßraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f\colon X \times I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass folgendes gilt:

(i) Für jedes $s \in I$ ist die Funktion $f(\cdot, s)\colon X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x,s)$, integrierbar;

(ii) für jedes $y \in X$ ist die Funktion $f(y, \cdot)\colon I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(y,t)$, differenzierbar.

Zudem existiere eine integrierbare Funktion $g\colon X \to [0,\infty]$, so dass für alle $x \in X$ und $t \in I$ gilt: $|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)| \leq g(x)$. Zeigen Sie: Dann ist

(a) die Funktion $\frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t)\colon X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$, für jedes $t \in I$ integrierbar (also insbesondere messbar),

(b) die Funktion $h\colon I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \int f(\cdot, t)\, d\mu$, differenzierbar, und es gilt für alle $t \in I$:

$$\frac{d}{dt}\int f(\cdot,t)\, d\mu = \int \frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t)\, d\mu.$$

Lösungsvorschlag. (a) Sei $t_0 \in I$ fest und (t_n) eine Folge in I mit $(t_n) \to t_0$ und $t_n \neq t_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir setzen dann $h_n\colon X \to \mathbb{R}$,

$$h_n(x) := \frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0}.$$

Dann ist h_n eine Linearkombination der integrierbaren Funktionen $f(\cdot, t_n)$ und $f(\cdot, t_0)$ und damit auch integrierbar (insbesondere messbar). Für festes $x \in X$ konvergiert $(h_n(x))$ offenbar gegen $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0)$, denn $f(x, \cdot)$ ist differenzierbar in t_0. Wir haben also punktweise Konvergenz von (h_n) gegen $\frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t_0)$. Damit ist auch $\frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t_0)$ messbar und wegen $|\frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t_0)| \leq g$ mit einem integrierbaren g ist $\frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t_0)$ sogar integrierbar.

(b) Nun sind aber sogar die integrierbaren Funktionen h_n betragsweise alle durch g majorisiert, denn für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $x \in X$ existiert nach dem Mittelwertsatz ein $\xi_{n,x}$ zwischen t_n und t_0 mit

$$h_n(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(x, \xi_{n,x}),$$

also ist auch $|h_n(x)| \leq g(x)$, für alle $x \in X$. Nach Lebesgues Satz ist daher für die Funktion $H\colon I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \int f(\cdot, t)\, d\mu$

$$\begin{aligned}\int \frac{\partial f}{\partial t_0}(\cdot, t_0)\, d\mu &= \lim_n \int h_n\, d\mu = \lim_n \frac{1}{t_n - t_0}(\int f\cdot, t_n)\, d\mu - \int f(\cdot, t_0)\, d\mu)\\ &= \lim_n \frac{H(t_n) - H(t_0)}{t_n - t_0}.\end{aligned}$$

H ist also in t_0 differenzierbar und

$$\frac{dH}{dt}(t_0) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t_0)\, d\mu.$$

Aufgabe 24. Sei $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Einschränkung $f|[0,n]$ Riemann-integrierbar ist.

(a) Zeigen Sie, dass f Lebesgue-messbar ist. (Hinweis: Bitte verwenden Sie die (unbewiesene) Bemerkung aus der Vorlesung, dass (für alle $n \in \mathbb{N}$) $f|[0,n]$ Lebesgue-messbar ist.)

(b) Zeigen Sie nun: Ist $f \geq 0$, so ist f genau dann Lebesgue-integrierbar, wenn das uneigentliche Riemann-Integral $\int_0^\infty f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^n f(x)\,dx$ existiert und dann gilt:

$$\int_{[0,\infty)} f\,d\lambda = \int_0^\infty f(x)\,dx.$$

Lösungsvorschlag. (a) Wir benutzen, dass aus der Riemann-Integrierbarkeit von $f|[0,n]$ (mit $n \in \mathbb{N}$) die Lebesgue-Messbarkeit folgt (siehe auch die Anmerkung im Anschluss an diese Aufgabe). Hierbei ist mit der Lebesgue-Algebra auf $[0,n]$ stets die Spuralgebra von $\mathfrak{L} = \hat{\mathfrak{B}}$ auf $[0,n] \subseteq \mathbb{R}$ gemeint (siehe Aufgabe 17). $\mathfrak{B}$ notiert hier wie üblich die Borelsche und $\mathfrak{L}$ die Lebesguesche σ-Algebra auf $\mathbb{R}$. Für jedes (Borel-) messbare $C \subseteq \mathbb{R}$ ist nun

$$(f\chi_{[0,n]})^{-1}(C) = \left((f\chi_{[0,n]})^{-1}(C) \cap [0,n]\right) \cup \left((f\chi_{[0,n]})^{-1}(C) \cap (n,\infty)\right).$$

Die erste Klammer ist gerade $(f|[0,n])^{-1}(C)$ und liegt damit in $\mathfrak{L}$ und die zweite ist leer, falls $0 \notin C$ ist oder (n,∞), falls $0 \in C$ ist. Damit liegt die Menge rechts vom Gleichheitszeichen in $\mathfrak{L}$, d.h.: $f\chi_{[0,n]}$ ist Lebesgue-messbar. Aber f ist offenbar der punktweise Limes von $(f\chi_{[0,n]})$ und damit auch $\mathfrak{L}$-messbar.

(b) Vorbemerkung: Hier verwenden wir – und das habe ich in der Aufgabenstellung vergessen zu erwähnen (sorry!) – dass ein Riemann-integrierbares $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ (mit einem nicht-leeren, abgeschlossenen und beschränkten Intervall $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$) nicht nur Lebesgue-messbar, sondern auch Lebesgue-integrierbar ist und es gilt:

$$\int_{[a,b]} f\,d\lambda = \int_a^b f(x)\,dx.$$

(λ ist hier das Lebesguesche Maß auf der Spuralgebra der Lebesgueschen σ-Algebra $\mathfrak{L}$ von $\mathbb{R}$ auf $[a,b]$.) In der Vorlesung wurde diese Aussage nur für stetige Integranden bewiesen. (Siehe auch die Anmerkung im Anschluss an diese Aufgabe.)

(i) Sei also zunächst f Lebesgue-integrierbar. Dann konvergieren die $\mathfrak{L}$-messbaren Funktion (siehe Teil (a)) $f\chi_{[0,n]}$ $(n \in \mathbb{N})$ punkweise gegen f und $|f\chi_{[0,n]}| \leq |f|$. Nach Lebesgues Satz sind dann alle $f\chi_{[0,n]}$ Lebesgue-integrierbar $(n \in \mathbb{N})$ und es gilt:

$$\int_{[0,\infty)} f\,d\lambda = \lim_n \int_{[0,\infty)} f\chi_{[0,n]}\,d\lambda = \lim_n \int_{[0,n]} f\,d\lambda = \lim_n \int_0^n f(x)\,dx.$$

Das zeigt, dass f auch uneigentlich Riemann-integrierbar ist und es gilt:

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \int_{[0,\infty)} f\,d\lambda.$$

[Anmerkung: Diese Richtung gilt auch für Funktionen, die nicht notwendig nicht negativ $(f \geq 0)$ sind. Allerdings muss man hier etwas genauer hinsehen, was die Definition des uneigentlichen Riemann-Integrals betrifft. Die Definition dieses Integrals verlangt ja eigentlich, dass $f|[0,b]$

Riemann-integrierbar ist, für alle $b > 0$, was aber äquivalent dazu ist, dass $f|[0,n]$ Riemann-integrierbar ist, für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann verlangt man, dass der Grenzwert $\lim_{b\to\infty} \int_0^b f(x)\,dx$ existiert. Im Falle, dass $f \geq 0$ ist, ist das wegen der Monotonie der Funktion $b \mapsto \int_0^b f(x)\,dx$ aber äquivalent zur Existenz des Grenzwertes $\lim_{n\to\infty} \int_0^n f(x)\,dx$. Falls nun aber f nicht notwendig nicht-negativ ist, könnte es z.B. sein, dass die Integrale $\int_0^n f(x)\,dx$ „zufällig" gerade mal Null sind (für $n \in \mathbb{N}$), der Grenzwert für $n \to \infty$ also existiert, während der für $b \to \infty$ (mit $b \in \mathbb{R}_+$) nicht existiert. Die obige Argumentation könnte man dann aber für alle Folgen (b_n) mit $(b_n) \to \infty$ machen und dann ist die Aussage, dass jede Lebesgue-integrierbare Funktion auf $[0,\infty)$, die auf $[0,n]$ Riemann-inegrierbar ist, auch uneigentlich Riemann-integrierbar ist, richtig. (Danke an Jonathan Walz für diesen Hinweis.) Auf dem nächsten Übungsblatt werden wir eine Aufgabe sehen, dass die Umkehrung, wie jetzt gleich unter (b), dann aber i.a. nicht richtig ist.]

(ii) Ist nun $f \geq 0$, so beobachten wir, dass $(f\chi_{[0,n]})$ eine Folge nicht-negativer Lebesgue-messbarer Funktionen ist, die sogar monoton wachsend gegen f konvergiert. Deshalb ist mit Levis Satz

$$\int_{[0,\infty)} f\,d\lambda = \lim_n \int_{[0,\infty)} f\chi_{[0,n]}\,d\lambda = \lim_n \int_{[0,n]} f\,d\lambda = \lim_n \int_0^n f(x)\,dx.$$

Ist daher nun f uneigentlich Riemann-integrierbar, so ist dieser Grenzwert endlich, damit f Lebesgue-integrierbar und es gilt

$$\int_{[0,\infty)} f\,d\lambda = \int_0^\infty f(x)\,dx.$$

[**Anmerkung.** Wir beweisen hier noch den folgenden

Satz. Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so ist f Lebesgue-integrierbar und es gilt:

$$\int_{[a,b]} f\,d\lambda = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Beweis. Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zunächst beschränkt. Unmittelbar aus der Definition des Oberintegrals von f wissen wir, dass wie eine Folge von Riemannschen Treppenfunktionen (ψ_n) mit $\psi_n \geq f$ wählen können, so dass für deren Integrale $d_n := \int_a^b \psi_n(x)\,dx$ gilt: $(d_n) \searrow \int_a^{*b} f(x)\,dx$. Ebenso können wir eine Folge von Riemannschen Treppenfunktionen (φ_n) mit $\varphi_n \leq f$ wählen, so dass mit $c_n := \int_a^b \varphi_n(x)\,dx$ gilt: $(c_n) \nearrow \int_{*a}^b f(x)\,dx$. Ist nun f Riemann-integrierbar, so ist

$$\int_{*a}^b f(x)\,dx = \int_a^{*b} f(x)\,dx =: \int_a^b f(x)\,dx.$$

Wegen $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ ist $\psi_n - \varphi_n \geq 0$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir setzen nun

$$Q := \liminf_n (\psi_n - \varphi_n) \geq 0.$$

Da φ_n, ψ_n (für alle $n \in \mathbb{N}$) insbesondere Borel-messbar sind, ist dies auch für Q so und nach Fatous Lemma ist

$$0 \leq \int Q\,d\lambda \leq \liminf_n \int (\psi_n - \varphi_n)\,d\lambda.$$

Nun ist aber das Riemann- und das Lebesgue-Integral auf Riemannschen Treppenfunktionen $s\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gleich, denn ist $\mathfrak{Z} = (x_0, \dots, x_n)$ eine Zerlegung von $[a,b]$ und ist $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ so, dass $s|(x_{j-1}, x_j) = \alpha_j$ ist ($j = 1, \dots, n$), so ist

$$\int_a^b s(x)\,dx = \sum_j \alpha_j (x_j - x_{j-1}) = \sum_j \alpha_j \lambda((x_{j-1}, x_j)) = \int_{[a,b]} s\,d\lambda$$

(wobei man im Lebesgue-Fall eigentlich s noch in Positiv- und Negativteil zerlegen und auch noch die Nullmenge $\{x_0, \dots, x_n\} \subseteq [a,b]$ diskutieren müsste). Wenden wir diesen Zusammenhang zwischen Riemann- und Lebesgue-Integral an, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int Q\,d\lambda \leq \liminf_n \int (\psi_n - \varphi_n)\,d\lambda = \liminf_n (\int \psi_n\,d\lambda - \int \varphi_n\,d\lambda) \\
&= \liminf_n (\int_a^b \psi_n(x)\,dx - \int_a^b \varphi_n(x)\,dx) = \lim_n (d_n) - \lim_n (c_n) \\
&= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = 0.
\end{aligned}$$

Es folgt, dass $Q = 0$ f.ü. ist. Nennen wir nun $M := \{x \in [a,b] : Q(x) \neq 0\}$, so gilt also außerhalb dieser Nullmenge für alle $x \in M^c$:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \liminf_n \psi_n(x) - \limsup_n \varphi_n(x) = \liminf_n \psi_n(x) + \liminf_n (-\varphi_n(x)) \\
&\leq \liminf_n (\psi_n(x) - \varphi_n(x)) = Q(x) = 0.
\end{aligned}$$

Setzen wir nun

$$g := \limsup_n \varphi_n \leq f, \quad h := \liminf_n \psi_n \geq f,$$

so erhalten wir, dass g, h Borel-messbar sind, $g \leq f \leq h$ ist und $g = h$ f.ü.. Damit ist auch $g = f$ f.ü. und f dann nach Aufgabe 22 tatsächlich Lebesgue-messbar.

Im Folgenden notiere also λ stets das Lebesguesche Maß auf der Lebesgueschen Algebra $\mathfrak{L}$ bzw. ihrer Spuralgebra auf $[a,b]$. Da f beschränkt ist, ist also $|f| \leq M$, für ein $M > 0$, und da die konstante Funktion M auf $[a,b]$ integrierbar ist, ist auch f Lebesgue-integrierbar. Um nun die Gleichheit der beiden Integralbegriffe einzusehen, wenden wir noch zweimal Fatous Lemma an und benutzen, dass die Integrale auf Riemannschen Treppenfunktionen übereinstimmen.

Wegen $f - \varphi_n \geq 0$ ist auch $f - g = f - \limsup_n(\varphi_n) \geq 0$ und

$$0 \leq f - g = f - \limsup_n \varphi_n = f + \liminf_n (-\varphi_n) = \liminf_n (f - \varphi_n).$$

Fatou impliziert daher

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int \liminf_n (f - \varphi_n)\,d\lambda \leq \liminf_n \int (f - \varphi_n)\,d\lambda = \liminf_n (\int f\,d\lambda - \int \varphi_n\,d\lambda) \\
&= \int f\,d\lambda + \liminf_n (-\int \varphi_n\,d\lambda) = \int f\,d\lambda + \liminf_n (-\int_a^b \varphi_n(x)\,dx) \\
&= \int f\,d\lambda + \lim_n (-c_n) = \int f\,d\lambda - \int_a^b f(x)\,dx,
\end{aligned}$$

also

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int f\,d\lambda.$$

Aber ebenso ist auch $\psi_n - f \ge 0$ und damit auch $h - f = \liminf_n(\psi) - f$, also

$$0 \le h - f = \liminf_n(\psi_n) - f = \liminf_n(\psi_n - f).$$

Zum letzten Mal für heute folgt mit Fatou:

$$\begin{aligned} 0 &\le \int \liminf_n(\psi_n - f)\,d\lambda \le \liminf_n \int(\psi_n - f)\,d\lambda = \liminf_n(\int \psi_n\,d\lambda - \int f\,d\lambda) \\ &= \liminf_n(\int \psi_n\,d\lambda) - \int f\,d\lambda = \liminf_n(\int_a^b \psi_n(x)\,dx) - \int f\,d\lambda = \lim_n(d_n) - \int f\,d\lambda \\ &= \int_a^b f(x)\,dx - \int f\,d\lambda, \end{aligned}$$

also

$$\int f\,d\lambda \le \int_a^b f(x)\,dx.$$

Insgesamt ist also:

$$\int_{[a,b]} f\,d\lambda = \int_a^b f(x)\,dx.]$$

Aufgabe 25. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Zeigen Sie:

(a) Ist $f''(x) \le 0$, für alle $x \in I$, so ist f konkav.

(b) Ist f konkav, so ist $f''(x) \le 0$, für alle $x \in I$.

(Hinweis: Zu (a): Ist $x_1 < x_2$ und $x = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$ mit $\lambda \in (0,1)$, so wende man den Mittelwertsatz auf $f|[x_1, x]$ und $f|[x, x_2]$ an. Zu (b): Sei $f''(x_0) > 0$ (für ein $x_0 \in I$). Betrachten Sie dann die Hilfsfunktion $I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) - f'(x_0)(x - x_0)$.)

Lösungsvorschlag. (a) Seien $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ und $x \in (x_1, x_2)$, also $x = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$ mit einem $\lambda \in (0,1)$. Wir wollen zeigen:

$$f(x) \ge (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2).$$

Den Mittelwertsatz auf $f|[x_1, x]$ und $f|[x, x_2]$ angewendet, liefert Zwischenstellen $\xi_1 \in (x_1, x)$ und $\xi_2 \in (x, x_2)$ mit

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}, \quad f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Da $f'' \le 0$ ist, ist f' monoton fallend. Wegen $\xi_1 < x < \xi_2$ ist deshalb $f'(\xi_2) \le f'(\xi_1)$. Wegen

$$\begin{aligned} x_2 - x &= x_2 - (1-\lambda)x_1 - \lambda x_2 = (1-\lambda)(x_2 - x_1) \\ x - x_1 &= (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 - x_1 = \lambda(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

erhalten wir

$$\frac{f(x_2) - f(x)}{(1-\lambda)(x_2 - x_1)} \le \frac{f(x) - f(x_1)}{\lambda(x_2 - x_1)}$$

und daraus

$$\lambda(f(x_2) - f(x)) \leq (1-\lambda)(f(x) - f(x_1)).$$

Ausmultiplizieren und Sortieren liefert dann tatsächlich

$$(1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2) \leq f(x).$$

(b) Angenommen $f''(x_0) > 0$ für ein $x_0 \in I$. Wir zeigen, dass es dann ein $h > 0$ gibt mit $x_0 - h, x_0 + h \in I$ und

$$f(x_0) < \frac{1}{2}f(x_0 - h) + \frac{1}{2}f(x_0 + h).$$

Mit $x_1 = x_0 - h$, $x_2 = x_0 + h$ (und $\lambda = \frac{1}{2}$) zeigt das dann, dass f nicht konkav sein kann.

Dazu transformieren wir f zunächst so, dass die Tangente an den Graphen von f horizontal ist. Sei nämlich $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\varphi(x) = f(x) - f'(x_0)(x - x_0).$$

(Wir ziehen von f ihr Taylorpolynom in x_0 vom Grad 1 ab und ignorieren den konstanten Anteil.) Dann ist auch φ zweimal differenzierbar und es gilt:

$$\varphi(x_0) = f(x_0), \quad \varphi'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0, \quad \varphi''(x_0) = f''(x_0) > 0.$$

Es hat φ deshalb in x_0 ein striktes lokales Minimum (siehe auch die Anmerkung im Anschluss der Aufgabe). Wir finden deshalb ein $h > 0$, so dass $x_0 - h$ und $x_0 + h$ in I sind und gilt:

$$\varphi(x_0 - h) > \varphi(x_0), \quad \varphi(x_0 + h) > \varphi(x_0).$$

Deshalb ist

$$\begin{aligned}
&f(x_0 - h) + f(x_0 + h) \\
&\quad = \ [\varphi(x_0 - h) + f'(x_0)((x_0 - h) - x_0)] + [\varphi(x_0 + h) + f'(x_0)((x_0 + h) - x_0)] \\
&\quad = \ \varphi(x_0 - h) + \varphi(x_0 + h) > 2\varphi(x_0) = 2f(x_0).
\end{aligned}$$

[**Anmerkung.** Es gibt hier eine Feinheit, die Ihnen vielleicht aufgefallen ist. Wir hatten in Analysis-I den Satz, dass eine Funktion $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $\varphi'(x_0) = 0$ und $\varphi''(x_0) > 0$, für ein $x_0 \in I$, in x_0 ein striktes lokales Minimum hat, nur für zweimal *stetig* differenzierbare Funktionen bewiesen (und auch die Striktheit des Minimums nicht formuliert, obwohl sie der Beweis lieferte). Das lag daran, dass wir die Aussage im Anschluss an den Satz von Taylor bewiesen haben, für den wir die *stetige* Differenzierbarkeit bis zu einer gewissen Stufe brauchten. Ich hätte in dieser Aufgabe deshalb gleich auch die Stetigkeit der 2. Ableitung verlangen sollen. Sorry. Nun ist es aber tatsächlich so, dass die Aussage auch für Funktionen gilt, die nur zweimal differenzierbar sind, ohne also die Stetigkeit ihrer 2. Ableitung zu verlangen. Der Beweis dafür ist elementar und beruht im Wesentlichen auf dem Mittelwertsatz. Wir fügen ihn hier interessehalber hinzu.

Aus $\varphi''(x_0) > 0$ folgt aus der Definition des Grenzwertes des Differenzenquotienten unmittelbar, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq I$ und

$$\frac{\varphi'(x) - \varphi'(x_0)}{x - x_0} > 0$$

ist, für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Weil aber $\varphi'(x_0) = 0$ ist, bedeutet das:

$$\begin{aligned} \varphi'(x) < 0 \quad &\text{für} \quad x \in (x_0 - \delta, x_0), \\ \varphi'(x) > 0 \quad &\text{für} \quad x \in (x_0, x_0 + h). \end{aligned}$$

Aber dann ist $\varphi|(x_0 - \delta, x_0]$ streng monoton fallend und $f|[x_0, x_0 + \delta)$ streng monoton wachsend. Daher ist x_0 ein striktes Minimum von $f|(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.]

Aufgabe 26. Wir betrachten die Funktion $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$, die durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{für } x > 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

gegeben ist.

(a) Sei $g\colon [1, \infty) \to [0, \infty)$ uneigentlich Riemann-integrierbar und $h\colon [1, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $|h| \leq g$ und so, dass $h|[1, a]$ für alle $a \in (1, \infty)$ Riemann-integrierbar ist. Zeigen Sie, dass h dann auch uneigentlich Riemann-integrierbar ist. (Hinweis: Aufgabe 24 und der Satz von Lebesgue)

(b) Zeigen Sie nun mit Hilfe von Teil (a), dass f uneigentlich Riemann-integrierbar ist. (Hinweis: Machen Sie, bevor Sie (a) anwenden, noch eine partielle Integration.)

(c) Zeigen Sie schließlich, dass f nicht Lebesgue-integrierbar ist. (Hinweis: Integrieren Sie $|f|$ jeweils von $k\pi$ bis $(k+1)\pi$ (für $k \in \mathbb{N}$) und schätzen Sie dann $\int |f| \, d\lambda$ nach unten durch die harmonische Reihe ab.)

Lösungsvorschlag. (a) Erinnerung. Sei $h\colon [1, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass $h|[1, b]$, für alle $b > 1$, Riemann-integrierbar ist. Es heißt dann h *uneigentlich Riemann-integrierbar*, wenn der Grenzwert

$$\lim_{b \to \infty} \int_1^b f(x) \, dx \ \in \mathbb{R}$$

existiert und dieser wird dann mit $\int_1^\infty f(x) \, dx$ bezeichnet. Äquivalent ist, dass

$$\lim_{n \to \infty} \int_1^{b_n} f(x) \, dx$$

existiert, und zwar für alle Folgen (b_n) in $[1, \infty)$ mit $(b_n) \to \infty$. Diese Grenzwerte sind dann notwendig alle gleich und werden mit $\int_1^\infty f(x) \, dx$ bezeichnet.

Sei daher (b_n) eine Folge in $[1, \infty)$ mit $(b_n) \to \infty$. Da $h|[1, b_n]$ Riemann-integrierbar ist, ist $h|[1, b_n]$ auch Lebesgue-messbar und damit auch die Funktionen $h_n := h \cdot \chi_{[1, b_n]}$ auf $[0, \infty)$. Nun ist $|h_n| \leq |h| \leq g$ mit einem uneigentlich Riemann-integrierbaren $g\colon [1, \infty) \to [0, \infty)$. Dieses ist dann nach Aufgabe 24 auch Lebesgue-integrierbar. Deshalb können wir auf die Folge (h_n) den Konvergenzsatz von Lebesgue anwenden. Da $(h_n) \to h$ punktweise konvergiert, folgt damit, dass h Lebesgue-integrierbar ist und

$$\int_{[1, \infty)} h \, d\lambda = \lim_{n \to \infty} \int_{[1, \infty)} h_n \, d\lambda = \lim_{n \to \infty} \int_{[1, b_n]} h \, d\lambda = \lim_{n \to \infty} \int_1^{b_n} h(x) \, dx.$$

Der Grenzwert existiert also (eigentlich) für alle solchen Folgen, d.h.: h ist uneigentlich Riemann-integrierbar.

(b) Wegen $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (z.B. mit der Regel von de l'Hospital), ist f auf $[0,\infty)$ stetig und damit auf $[0,1]$ Riemann-integrierbar. Wegen

$$\int_0^b f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^b f(x)\,dx,$$

für alle $b > 1$, ist damit f genau dann uneigentlich Riemann-integrierbar, wenn $f|[1,\infty)$ es ist. Um nun $\int_1^b f(x)\,dx$ abzuschätzen, machen wir zunächst eine partielle Integration mit $u, v\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}$,

$$u(x) = \frac{1}{x}, \quad v(x) = -\cos x.$$

Es ist dann $\frac{\sin x}{x} = u(x)v'(x)$ und $u'(x)v(x) = \frac{-\cos x}{-x^2}$, also ist

$$\int_1^b \frac{\sin x}{x}\,dx = \Big[-\frac{\cos x}{x}\Big]_1^b - \int_1^b \frac{\cos x}{x^2}\,dx.$$

Aber $[1,\infty) \to [0,\infty)$, $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, ist offenbar uneigentlich Riemann-integrierbar, denn

$$\int_1^b \frac{dx}{x^2} = \Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^b = -\frac{1}{b} + 1 \overset{b\to\infty}{\longrightarrow} 1 < \infty,$$

und $|\frac{\cos x}{x^2}| \leq \frac{1}{x^2}$, für alle $x \in [1,\infty)$. Deshalb ist nach Teil (a) auch $[1,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\cos x}{x^2}$, uneigentlich Riemann-integrierbar. Es folgt, dass der Grenzwert

$$\lim_{b\to\infty} \left(-\frac{\cos b}{b} + \cos(1) - \int_1^b \frac{\cos x}{x^2}\,dx\right)$$

existiert, denn $\frac{\cos b}{b} \to 0$ für $b \to \infty$, und damit existiert auch der Grenzwert

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

[**Anmerkung.** Den Grenzwert $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ werden wir im nächsten Semester mit Mitteln der sogenannten Funktionentheorie berechnen, obwohl es keine elementare Stammfunktion von $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ gibt.]

(c) Um zu zeigen, dass f nicht Lebesgue-integrierbar ist, müssen wir also $\int_{[0,\infty)} |f|\,d\lambda = \infty$ nachweisen. Da $(|f| \cdot \chi_{[0,n\pi]})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend gegen $|f|$ konvergiert, wissen wir mit Levi, dass

$$\int_{[0,\infty)} |f|\,d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,n\pi]} |f|\,d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_0^{n\pi} |f(x)|\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |f(x)|\,dx.$$

Die Integrale $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ schätzen wir aber nun so nach unten ab:

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{(k+1)\pi}\,dx = \frac{1}{(k+1)\pi}|\underbrace{[\cos x]_{k\pi}^{(k+1)\pi}}_{=\pm 2}| = \frac{2}{(k+1)\pi}.$$

Es ist also

$$\int_{[0,\infty)} |f|\,d\lambda \geq \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1} = \infty.$$

Aufgabe 27. Sei $X = \mathbb{N}$, $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge nicht-negativer Zahlen und $\mu_\alpha\colon \mathfrak{P}(\mathbb{N}) \to [0,\infty]$ das Maß auf der vollen Potenzalgebra von X, welches $\mu_\alpha(\{n\}) = \alpha_n$ (für alle $n \in \mathbb{N}$) erfüllt (siehe Aufgabe 02).

(a) Zeigen Sie, dass jede Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (also eine reelle Zahlenfolge (x_n), wenn $x_n = f(n)$ notiert wird) messbar ist und für nicht negatives $f = (x_n)$ (also $x_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$) gilt:

$$\int f\,d\mu_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n.$$

(b) Sei nun $\alpha_n = \frac{1}{n^3}$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $f = (x_n)$ mit $x_n = n$ zwar μ_α-integrierbar ist, aber $f^2 = (x_n^2)$ nicht μ_α-integrierbar ist.

Lösungsvorschlag. (a) Handelt es sich bei einem Messraum $(X,\mathfrak{A})$ um die volle Potenzalgebra $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(X)$, so ist nach Definition jede Abbildung $f\colon X \to Y$ in einen Messraum Y messbar. Das ist hier bei $X = \mathbb{N}$ der Fall.

Eine nicht-negative Zahlenfolge $f = (x_n)$ ist nun i.a. keine Treppenfunktion, aber ihre *Abschnitte* $s_n := f \cdot \chi_n$, wo $\chi_n\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ die charakteristische Funktion von $\{1,\dots,n\}$ bezeichne. Für diese ist nach Definition

$$\int s_n\,d\mu_\alpha = \sum_{k=1}^{n} x_k\mu_\alpha(\{k\}) = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k.$$

Nun konvergiert (s_n) offenbar monoton wachsend gegen f, $(s_n) \nearrow f$. Deshalb ist mit Levis Satz

$$\int f\,d\mu_\alpha = \lim_{n\to\infty}\int s_n\,d\mu_\alpha = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n.$$

(b) Ist $\alpha_n = \frac{1}{n^3}$ für $n \in \mathbb{N}$, so erhalten wir für die Folge (x_n) mit $x_n = n$:

$$\begin{aligned}\int f\,d\mu_\alpha &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\cdot n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty\\ \int f^2\,d\mu_\alpha &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\cdot n^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty.\end{aligned}$$

Es ist also f μ_α-integrierbar, nicht aber f^2 (also $\mathfrak{L}^1(\mu_\alpha) \not\subseteq \mathfrak{L}^2(\mu_\alpha)$).

[**Anmerkung.** Beachten Sie auch, dass eine Folge $f = (x_n)$ bezüglich des Zählmaßes auf $\mathbb{N}$ (also mit $\alpha = (\alpha_n)$ und $\alpha_n = 1$, für alle $n \in \mathbb{N}$), genau dann integrierbar ist, wenn sie *absolut konvergiert* (und $\int |f|\,d\mu = \sum_1^\infty |x_n|$ in diesem Fall). Für eine nur bedingt konvergente Reihe (vgl. z.B. das Weihnachtsblatt in Analysis-I) gibt es gar kein Integral. Die Lebesguesche Integrationstheorie ignoriert die Ordnung auf $\mathbb{N}$ oder anderen Maßräumen wie z.B. auch auf $\mathbb{R}$. Wie Aufgabe 26 zeigt, gibt es daher kein Lebesgue-Integral für nur „bedingt integrable

Funktionen" wie $x \mapsto (\sin x)/x$, die bzgl. der Riemann-Integrals, welches Rücksicht auf die Ordnung in $\mathbb{R}$ nimmt, integrierbar sind.]

Aufgabe 28. Sei (X, μ) ein Maßraum. Eine messbare Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ heißt *wesentlich beschränkt*, wenn es ein $c > 0$ gibt, so dass $\{x \in X : |f(x)| > c\} =: \{|f| > c\}$ eine Nullmenge ist. Man setzt dann

$$\|f\|_\infty := \inf\{c \geq 0 : \ \mu(\{|f| > c\}) = 0\} \in [0, \infty).$$

(a) Sei $\mathfrak{L}^\infty(\mu)$ die Menge aller wesentlich beschränkten Funktionen auf X. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{L}^\infty(\mu)$ eine Untervektorraum aller (messbaren) Funktionen auf X ist.

(b) Sei $\mathfrak{N}(\mu)$ der Unterraum aller messbaren Funktionen, die fast-überall gleich Null sind. Dann ist $\mathfrak{N}(\mu) \subseteq \mathfrak{L}^\infty(\mu)$ und man setzt $L^\infty(\mu) := \mathfrak{L}^\infty(\mu)/\mathfrak{N}(\mu)$. Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|\colon L^\infty(\mu) \to [0, \infty)$, $[f] \mapsto \|f\|_\infty$ wohldefiniert und eine Norm auf $L^\infty(\mu)$ ist. (Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\{|f| > \|f\|_\infty\}$ eine Nullmenge ist.)

Lösungsvorschlag. Wir notieren für diese Aufgabe mal mit $\mathfrak{M}(X)$ den $\mathbb{R}$-Vektorraum aller messbaren Funktionen auf X. Er ist ein Unterraum aller reellwertigen Funktionen auf X. Weiter notieren wir für jedes $f \in \mathfrak{M}(X)$ und $c \geq 0$

$$M_c(f) := \{x \in X : \ |f(x)| > c\}.$$

Schließlich setzen wir für jedes $f \in \mathfrak{M}(X)$

$$\|f\|_\infty := \inf\{c \geq 0 : \ \mu(M_c(f)) = 0\} \in [0, \infty].$$

Dann ist offenbar $f \in \mathfrak{M}(X)$ genau dann in $\mathfrak{L}^\infty(\mu)$, wenn $\|f\|_\infty < \infty$ ist, denn diese *Unendlich-Norm* ist offenbar genau dann gleich unendlich, wenn die Menge, über die das Infimum gebildet wird, leer ist, die Funktion also gerade nicht wesentlich beschränkt ist. (Die „Pseudormormen" $\|\cdot\|_p$, für $p \in [0, \infty)$, hatten wir auch auf ganz $\mathfrak{M}(X)$ erklärt und $f \in \mathfrak{M}(X)$ ist genau dann in $\mathfrak{L}^p(\mu)$, wenn $\|f\|_p < \infty$ ist.)

(a) (i) Für die Nullfunktion $0 \in \mathfrak{M}(X)$ gilt offenbar $\|0\|_\infty = 0 < \infty$. Also ist $0 \in \mathfrak{L}^\infty(\mu)$.

(ii) Seien $f, g \in \mathfrak{L}^\infty(\mu)$. Dann gibt es also $c, d \in [0, \infty)$ mit

$$\mu(M_c(f)) = 0, \quad \mu(M_d(g)) = 0.$$

Sei nun $x \in M_{c+d}(f + g)$. Dann ist

$$c + d < |f + g|(x) = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|.$$

Daraus folgt

$$|f(x)| > c \quad \text{oder} \quad |g(x)| > d,$$

also $x \in M_c(f)$ oder $x \in M_d(g)$, d.i.: $M_{c+d}(f + g) \subseteq M_c(f) \cup M_d(g)$. Da aber $M_c(f) \cup M_d(g)$ eine Nullmenge ist, ist das also auch für $M_{c+d}(f+g)$ der Fall. Es ist also $\|f+g\|_\infty \leq c+d < \infty$.

(iii) Sei $f \in \mathfrak{L}^\infty(\mu)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gibt es also ein $c \geq 0$ mit $\mu(M_c(f)) = 0$. Es folgt für $x \in M_{|\lambda|c}(\lambda f)$:

$$|\lambda|c < |\lambda f|(x) = |\lambda| \cdot |f(x)|,$$

also bei $\lambda \neq 0$ auch $|f(x)| > c$. Also ist $M_{|\lambda|c}(\lambda f) \subseteq M_c(f)$ und damit ist auch $M_{|\lambda|c}(\lambda f)$ eine Nullmenge. Es ist also $\|\lambda f\|_\infty \leq |\lambda| c < \infty$ und diese Ungleichungen gelten offenbar auch im Fall $\lambda = 0$.

Insgesamt ist damit also $\mathfrak{L}^\infty(\mu)$ ein Untervektorraum von $\mathfrak{M}(X)$.

(b) Nach Definition der Menge $\{c \geq 0 : \mu(M_c(f)) = 0\}$ und der offensichtlichen Inklusion $M_c(f) \supseteq M_d(f)$, für alle $c \leq d$, ist für jedes $f \in \mathfrak{M}(X)$ nach Definition des Infimums

$$\{c \geq 0 : \; \mu(M_c(f)) = 0\} = [\|f\|_\infty, \infty) \quad \text{oder} \quad \{c \geq 0 : \; \mu(M_c(f)) = 0\} = (\|f\|_\infty, \infty).$$

Wir zeigen zunächst mal, dass für $f \in \mathfrak{L}^\infty(\mu)$ immer der erste Fall eintritt, dass also dann das Infimum angenommen wird. Das sieht man daran, dass

$$M_{\|f\|_\infty}(f) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_{\|f\|_\infty + \frac{1}{n}}(f)$$

ist, denn ist $|f(x)| > \|f\|_\infty$ für ein $x \in X$, so gibt es auch ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $|f(x)| > \|f\|_\infty + \frac{1}{n}$ ist. Damit ist $M_{\|f\|_\infty}(f)$ abzählbare Vereinigung von Nullmengen und damit selbst eine Nullmenge. Das vereinfacht im Folgenden etwas die Argumentation.

(i) Seien nun $f, g \in \mathfrak{L}^\infty(\mu)$. Dann zeigt Teil (a.ii), dass dort mit $c = \|f\|_\infty$ und $d = \|g\|_\infty$ gilt:

$$\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

(ii) Sei nun $f \in \mathfrak{L}^\infty(\mu)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann zeigt Teil (a.iii), dass $\|\lambda f\|_\infty \leq |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$ ist. Für $\lambda \neq 0$ bedeutet das aber auch

$$\|f\|_\infty = \|\frac{1}{\lambda}(\lambda f)\|_\infty \leq |\frac{1}{\lambda}| \cdot \|\lambda f\|_\infty$$

und damit $\|\lambda f\|_\infty \geq |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$. Also ist $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$ (und diese Gleichung gilt offenbar auch für $\lambda = 0$).

(iii) Ist nun $f \in \mathfrak{N}(\mu)$, so ist offenbar $\|f\|_\infty = 0$, weil

$$M_0(f) = \{x \in X : \; |f(x)| > 0\}$$

eine Nullmenge ist. Ist umgekehrt $f \in \mathfrak{M}(X)$ und $\|f\|_\infty = 0$, so muss also $M_0(f)$ eine Nullmenge sein, also ist $f \in \mathfrak{N}(\mu)$. Für eine Äquivalenzklasse $[f] \in L^\infty(\mu)$ ist nun $\|[f]\|_\infty := \|f\|_\infty$ wohldefiniert, denn ist $g \in [f]$, so ist also $g - f \in \mathfrak{N}(\mu)$ und daher

$$\|g\|_\infty = \|(g - f) + f\|_\infty \leq \|g - f\|_\infty + \|f\|_\infty = \|f\|_\infty$$

nach der Dreiecksungleichung aus (i), und aus Symmetriegründen muss dann auch $\|f\|_\infty \leq \|g\|_\infty$ und damit $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty$. sein. Die Homogenität von $\|\cdot\|_\infty \colon L^\infty(\mu) \to [0, \infty)$ und die Dreiecksungleichung folgen aus den Eigenschaften für $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathfrak{L}^\infty(\mu)$ (siehe (i) und (ii)). Und ist $\|[f]\|_\infty = 0$, so ist wie gesehen $f \in \mathfrak{N}(\mu)$, also $[f] = 0$ (und $\|0\|_\infty = 0$ sowieso). Daher ist $\|\cdot\|_\infty \colon L^\infty(\mu) \to [0, \infty)$ eine Norm auf $L^\infty(\mu)$.

Aufgabe 29. Sei X ein Maßraum.

(a) Sei $f \in \mathfrak{L}^1(X)$ und $g \in \mathfrak{L}^\infty(X)$ (vgl. Aufgabe 28). Zeigen Sie, dass dann $f \cdot g \in \mathfrak{L}^1(X)$ ist und die Hölderungleichung auch für die Fälle $p = 1$ und $q = \infty$ gilt:

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty.$$

(b) Zeigen Sie, dass auch $(L^\infty(X), \|\cdot\|_\infty)$ (vgl. Aufgabe 28) vollständig ist. (Hinweis: Vergleichen Sie auch die „Pfingstaufgabe“ (Aufgabe 32) aus Analysis-II.)

Lösungsvorschlag. (a) [**Vorbemerkung.** Ist $X = A \dot\cup B$ eine disjunkte Zerlegung von X in zwei messbare Teilmengen $A, B \subseteq X$, so gilt für jedes messbare $f\colon X \to [0,\infty]$:

$$\int_X f\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_B f\,d\mu,$$

denn $\chi_A + \chi_B$ ist offenbar die konstante Funktion 1 und damit $f = f\chi_A + f\chi_B$. Es folgt

$$\int_A f\,d\mu + \int_B f\,d\mu = \int f\chi_A\,d\mu + \int f\chi_B\,d\mu = \int f\chi_A + f\chi_B\;d\mu = \int f\,d\mu.$$

Für eine Nullmenge $M \subseteq X$ und jedem messbaren $f\colon X \to [0,\infty]$ ist $\int_M f\,d\mu = 0$, weil $f\chi_M = 0$ f.ü. ist. Es folgt, dass für jedes messbare $f\colon X \to [0,\infty]$ gilt:

$$\int f\,d\mu = \int_{X\setminus M} f\;d\mu.]$$

Seien nun $f \in \mathfrak{L}^1(X)$ und $g \in \mathfrak{L}^\infty(X)$. Wir setzen $M = \{x \in X : |g(x)| > \|g\|_\infty\}$. Dann wissen wir (aus dem Beweis von Aufgabe 28), dass M eine Nullmenge ist. Für alle $x \in X \setminus M$ ist nun $|g(x)| \le \|g\|_\infty$ und daher

$$\int_X |fg|\,d\mu = \int_{X\setminus M} |fg|\,d\mu \le \int_{X\setminus M} |f|\cdot\|g\|_\infty\,d\mu = \|g\|_\infty \int_{X\setminus M} |f|\,d\mu = \|g\|_\infty \int_X |f|\,d\mu.$$

Es folgt, dass $fg \in \mathfrak{L}^1(\mu)$ ist und es gilt:

$$\|f\cdot g\|_1 \le \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty.$$

[**Anmerkung.** Die Ungleichung

$$\|f\cdot g\|_1 \le \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty$$

gilt auch für alle messbaren $f, g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$. Ist nämlich $\|f\|_1 = \infty$ oder $\|g\|_\infty = \infty$ und der andere Faktor nicht Null, so steht auf der rechten Seite ∞, und damit stimmt die Ungleichung. Ist $\|f\|_1 = 0$ oder $\|g\|_\infty = 0$, so ist $f = 0$ f.ü. oder $g = 0$ f.ü., und damit stimmt die Ungleichung auch, weil auf beiden Seiten Null steht.]

(b) (i) Es reicht zu zeigen, dass jede Cauchy-Folge (f_n) in $\mathfrak{L}^\infty(X)$ konvergiert. Ist nämlich (a_n) eine Cauchy-Folge in $L^\infty(X)$ und $f_n \in \mathfrak{L}^\infty(X)$ eine Repräsentantenwahl, $a_n = [f_n]$ $(n \in \mathbb{N})$, so ist wegen $\|a_n - a_m\|_\infty = \|f_n - f_m\|_\infty$, für alle $m, n \in \mathbb{N}$, auch (f_n) eine Cauchy-Folge in $\mathfrak{L}^\infty(X)$. Sei f ihr Grenzwert und $a := [f]$. Dann konvergiert (a_n) auch gegen a, denn $\|a_n - a\|_\infty = \|f_n - f\|_\infty$, für alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Sei also (f_n) eine Cauchy-Folge in $\mathfrak{L}^\infty(X)$. Wir defnieren die messbaren Mengen A_n, B_{mn} und C in X durch

$$A_n := \{|f_n| > \|f_n\|_\infty\}, \quad B_{mn} := \{|f_n - f_m| > \|f_n - f_m\|_\infty\}$$

und

$$C := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \cup \bigcup_{m,n\in\mathbb{N}} B_{mn}.$$

Dann sind A_n und B_{mn} $(m,n \in \mathbb{N})$ Nullmengen (siehe Aufgabe 28) und damit auch C. Für alle $x \in X \setminus C$ und alle $m,n \in \mathbb{N}$ ist nun

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty,$$

und daher ist $(f_n(x))$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$. Diese konvergiert und wir können $f\colon X \to \mathbb{R}$ so definieren:

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} f_n(x) & \text{für} \quad x \in X \setminus C \\ 0 & \text{für} \quad x \in C \end{cases}.$$

Setzen wir noch $D := X \setminus C$, so stellen wir zunächst fest, dass f der punktweise Limes von $(f_n\chi_D)$ ist und damit messbar.

(iii) Die reelle Folge $(\|f_n\|_\infty)$ muss wegen

$$|\|f_n\|_\infty - \|f_m\|_\infty| \leq \|f_n - f_m\|_\infty$$

$(m,n \in \mathbb{N})$ auch eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ sein und ist damit insbesondere beschränkt. Sei $M > 0$ mit $\|f_n\|_\infty \leq M$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Für alle $x \in D$ ist nun

$$|f(x)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x)| \leq \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_\infty \leq M,$$

und damit ist $\{|f| > M\} = \emptyset$ (denn $f = 0$ auf $X \setminus D$). Es ist also $f \in \mathfrak{L}^\infty(X)$.

(iv) Jetzt zeigen wir noch, dass $(f_n) \to f$ in $\mathfrak{L}^\infty(X)$ konvergiert, also

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$$

ist. Sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann wählen wir zunächst ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m,n \geq n_0$ gilt:

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Danach wählen wir zu jedem $x \in D$ eine $N_x \geq n_0$ so, dass

$$|f_{N_x}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Jetzt folgt für alle $x \in D$ und $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= |(f_n(x) - f_{N_x}(x)) + (f_{N_x}(x) - f(x)| \\ &\leq |f_n(x) - f_{N_x}(x)| + |f_{N_x}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

und damit also $\|f_n\chi_D - f\|_\infty \leq \varepsilon$, für alle $n \geq n_0$, d.i.:

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\chi_D - f\|_\infty = 0.$$

Die ∞-Norm bleibt unverändert bei Änderung der Funktion auf einer Nullmenge, wie wir aus Aufgabe 28 wissen, weshalb für alle messbaren $g\colon X \to \mathbb{R}$ gilt: $\|g\chi_D\|_\infty = \|g\|_\infty$. Das ergibt wegen $f = f\chi_D$:

$$0 = \lim_n \|f_n\chi_D - f\|_\infty = \lim_n \|f_n\chi_D - f\chi_D\|_\infty = \lim_n \|(f_n - f)\chi_D\|_\infty = \lim_n \|f_n - f\|_\infty.$$

Aufgabe 30. Sei (X,μ) ein Maßraum und $1 \le p < q \le \infty$.

(a) Sei $p < r < q$ und $\lambda \in (0,1)$ durch die Bedingung $\frac{1}{r} = (1-\lambda)\frac{1}{q} + \lambda\frac{1}{p}$ gegeben. Zeigen Sie: Ist $f \in \mathfrak{L}^p(X) \cap \mathfrak{L}^q(X)$, so ist $f \in \mathfrak{L}^r(X)$ und es gilt:

$$\|f\|_r \le \|f\|_p^{\lambda} \cdot \|f\|_q^{1-\lambda}.$$

(Hinweis: Wenden Sie Hölders Ungleichung auf geeignete Potenzen von $|f|$ an.)

(b) Sei nun $\mu(X) < \infty$ und $f \in \mathfrak{L}^q(X)$. Zeigen Sie, dass dann $f \in \mathfrak{L}^p(X)$ ist, für alle $1 \le p \le q$, und es gilt:

$$\|f\|_p \le \mu(X)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \cdot \|f\|_q.$$

(Hinweis: Die konstante Funktion 1 ist jetzt in $\mathfrak{L}^r$, für alle $r \in [1,\infty]$.)

Lösungsvorschlag. Wir können o.E. annehmen, dass $f \ge 0$ ist, denn sonst wenden wir die folgende Argumentation auf $|f|$ an. So sparen wir einige Betragsstriche.

(a) Zu gegebenen $1 \le p < r < q \le \infty$ gibt es genau ein $\lambda \in (0,1)$ mit

$$\frac{1}{r} = (1-\lambda)\frac{1}{q} + \lambda\frac{1}{p}$$

(auch im Fall $q = \infty$, wo diese Gleichung als $\frac{1}{r} = \lambda\frac{1}{p}$ zu lesen ist ($\frac{1}{\infty} = 0$)). Es folgt dann, dass

$$1 = \frac{r\cdot\lambda}{p} + \frac{r\cdot(1-\lambda)}{q}$$

ist, insbesondere sind $\frac{p}{r\lambda} \ge 1$ und $\frac{q}{r(1-\lambda)} \ge 1$. Nun bedeutet $f \in \mathfrak{L}^p(X)$ dasselbe, wie $f^{r\lambda} \in \mathfrak{L}^{\frac{p}{r\lambda}}(X)$ und im Fall $q < \infty$ ist $f \in \mathfrak{L}^q(X)$ gleichbedeutend mit $f^{r(1-\lambda)} \in \mathfrak{L}^{\frac{q}{r(1-\lambda)}}(X)$. Im Fall $q = \infty$ ist $f \in \mathfrak{L}^\infty(X)$ ebenfalls gleichbedeutend mit $f^{r(1-\lambda)} \in \mathfrak{L}^\infty(X)$, da $\|f^{r(1-\lambda)}\|_\infty = \|f\|_\infty^{r(1-\lambda)}$ ist. Es ist nämlich für jede Potenz $s > 0$ und jedem $c > 0$: $\{|f| > c\} = \{[f|^s > c^s\}$. Die Höldersche Ungleichung wenden wir nun auf $f^{r\lambda} \in \mathfrak{L}^{\frac{p}{r\lambda}}(X)$ und $f^{r(1-\lambda)} \in \mathfrak{L}^{\frac{q}{r(1-\lambda)}}(X)$ an und erhalten, dass $f^r = f^{r\lambda}\cdot f^{r(1-\lambda)} \in \mathfrak{L}^1(X)$, also $f \in \mathfrak{L}^r(X)$, ist, und es gilt:

$$\begin{aligned}
\|f\|_r &= (\|f^r\|_1)^{\frac{1}{r}} \le \left(\|f^{r\lambda}\|_{\frac{p}{r\lambda}} \cdot \|f^{r(1-\lambda)}\|_{\frac{q}{r(1-\lambda)}}\right)^{\frac{1}{r}} \\
&= \left[\left(\int (f^{r\lambda})^{\frac{p}{r\lambda}}\, d\mu\right)^{\frac{r\lambda}{p}} \cdot \left(\int (f^{r(1-\lambda)})^{\frac{q}{r(1-\lambda)}}\, d\mu\right)^{\frac{r(1-\lambda)}{q}}\right]^{\frac{1}{r}} \\
&= \left[\left(\left(\int f^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right)^{r\lambda} \cdot \left(\left(\int f^q\, d\mu\right)^{\frac{1}{q}}\right)^{r(1-\lambda)}\right]^{\frac{1}{r}} \\
&= \|f\|_p^{\lambda} \cdot \|f\|_q^{1-\lambda}.
\end{aligned}$$

(b) (i) Wir betrachten zunächst den Fall $q = \infty$. Ist $f \in \mathfrak{L}^\infty(X)$, so ist auch $f^p \in \mathfrak{L}^\infty(X)$, denn $\|f^p\|_\infty = \|f\|_\infty^p$ (vgl. das Argument dafür in Teil (a)). Wegen $\mu(X) < \infty$ ist nun die konstante Funktion 1 in $\mathfrak{L}^1(X)$, und deshalb ist $f^p = 1\cdot f^p$ nach Hölders Ungleichung (siehe Aufgabe 29.a) auch in $\mathfrak{L}^1(X)$, also $f \in \mathfrak{L}^p(X)$, und

$$\|f\|_p = (\|f^p\|_1)^{\frac{1}{p}} \le (\|1\|_1 \cdot \|f^p\|_\infty)^{\frac{1}{p}} = \mu(X)^{\frac{1}{p}} \cdot (\|f\|_\infty^p)^{\frac{1}{p}} = \mu(X)^{\frac{1}{p}}\|f\|_\infty.$$

(ii) Sei jetzt $q < \infty$. Dann ist $p' := \frac{q}{p} \geq 1$. Setzen wir $q' \in [1, \infty]$ konjugiert zu p', d.h.

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = 1.$$

Nun ist $f \in \mathfrak{L}^q(C)$, also $f^p \in \mathfrak{L}^{p'}(X)$, und $1 \in \mathfrak{L}^{q'}(X)$ und damit nach Hölders Ungleichung $f^p = 1 \cdot f^p \in \mathfrak{L}^1(X)$, d.i. $f \in \mathfrak{L}^p(X)$, mit

$$\|f\|_p = (\|f^p\|_1)^{\frac{1}{p}} \leq (\|1\|_{q'} \cdot \|f^p\|_{p'})^{\frac{1}{p}} = (\int 1^{q'} \, d\mu)^{\frac{1}{q'p}} \cdot (\int (f^p)^{p'} \, d\mu)^{\frac{1}{p'p}}.$$

Wegen

$$\frac{1}{q'p} = (1 - \frac{1}{p'})\frac{1}{p} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} \cdot \frac{p}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$$

und

$$p \cdot p' = p \cdot \frac{q}{p} = q$$

folgt:

$$\|f\|_p \leq \mu(X)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \cdot \|f\|_q.$$

[**Anmerkung.** Wie unter Aufgabe 29.a für die dortige Höldersche Ungleichung angemerkt, gelten die Formeln unter (a) und (b) in dieser Aufgabe auch für alle messbaren Funktionen f. Die Fälle, wo f nicht in $\mathfrak{L}^q(X)$ oder $\mathfrak{L}^p(X)$ ist, führen wie bei Aufgabe 29 dazu, dass auf der rechten Seite der Ungleichung ∞ steht oder auf beiden Seiten der Ungleichung Null. Die Aussagen, dass f in gewissen L^p-Räumen liegt, kann man dann auch als Konsequenz der Ungleichung lesen.]

Aufgabe 31. Sei $\mathfrak{L}^1$ die Lebesgue-Algebra auf $\mathbb{R}$ und $\mathfrak{L}^2$ die Lebesgue-Algebra auf $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie:

(a) $\mathfrak{L}^1 \otimes \mathfrak{L}^1 \subseteq \mathfrak{L}^2$;

(b) $\mathfrak{L}^1 \otimes \mathfrak{L}^1 \neq \mathfrak{L}^2$. (Hinweis: Verwenden Sie ein $C \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}) \setminus \mathfrak{L}^1$.)

Lösungsvorschlag. (a) Seien $A_1, A_2 \in \mathfrak{L}^1$. Wir zeigen, dass $A_1 \times A_2 \in \mathfrak{L}^2$ ist. Da $\mathfrak{L}^2$ eine σ-Algebra ist und $\mathfrak{L}^1 \otimes \mathfrak{L}^1$ die kleinste σ-Algebra ist, die alle Produkte $A_1 \times A_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ (mit $A_1, A_2 \in \mathfrak{L}^1$) enthält, folgt dann: $\mathfrak{L}^1 \otimes \mathfrak{L}^1 \subseteq \mathfrak{L}^2$.

Da $\mathfrak{L}^1$ die Vervollständigung der Borelschen σ-Algebra $\mathfrak{B}^1$ auf $\mathbb{R}$ ist, existieren Borelsche Teilmengen B_1 und M_1 von $\mathbb{R}$ mit $\lambda^1(M_1) = 0$ und eine Teilmenge $N_1 \subseteq M_1$, so dass $A_1 = B_1 \cup N_1$ ist. λ^1 bzeichnet hier das Borel-Lebesguesche Maß auf der Borelalgebra $\mathfrak{B}^1$. Nun sind $B_1 \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$ und $M_1 \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$ Borelsch, d.h. in der Borelschen σ-Agebra $\mathfrak{B}^2 = \mathfrak{B}^1 \otimes \mathfrak{B}^1$ auf $\mathbb{R}^2$, und für das Borel-Lebesguesche Maß λ^2 auf $\mathfrak{B}^2$ gilt: $\lambda^2 = \lambda^1 \otimes \lambda^1$. Deshalb ist $M_1 \times \mathbb{R}$ eine Borelsche Nullmenge, denn

$$\lambda^2(M_1 \times \mathbb{R}) = \lambda^1 \otimes \lambda^1(M_1 \times \mathbb{R}) = \lambda^1(M_1) \cdot \lambda^1(\mathbb{R}) = 0 \cdot \infty = 0.$$

Nun ist $N_1 \times \mathbb{R} \subseteq M_1 \times \mathbb{R}$ und daher ist, wegen

$$A_1 \times \mathbb{R} = (B_1 \cup N_1) \times \mathbb{R} = B_1 \times \mathbb{R} \cup N_1 \times \mathbb{R},$$

$A_1 \times \mathbb{R}$ in der Vervollständigung von $\mathfrak{B}^2$ auf $\mathbb{R}^2$, d.i.: $A_1 \times \mathbb{R} \in \mathfrak{L}^2$.

Genauso ist (aus Symmetriegründen) auch $\mathbb{R} \times A_2 \in \mathfrak{L}^2$ und damit ist auch

$$A_1 \times A_2 = A_1 \times \mathbb{R} \cap \mathbb{R} \times A_2 \in \mathfrak{L}^2.$$

(Wir vereinbaren hier, dass „$\times$“ stärker bindet als „$\cup$“ und „$\cap$“.)

(b) Wir wissen bereits, dass $\mathfrak{L}^1 \neq \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ ist und wählen ein nicht-messbares $C \subseteq \mathbb{R}$, also $C \notin \mathfrak{L}^1$. Nun ist

$$D := C \times \{0\} \subseteq \mathbb{R} \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2,$$

und $\mathbb{R} \times \{0\}$ ist eine Borelsche Nullmenge. Das wissen wir bereits aus Aufgabe 13, können wir hier aber auch noch mal wegen $\lambda^2 = \lambda^1 \otimes \lambda^1$ (auf $\mathfrak{B}^2 = \mathfrak{B}^1 \otimes \mathfrak{B}^1$) sehen:

$$\lambda^2(\mathbb{R} \times \{0\}) = \lambda^1 \otimes \lambda^1(\mathbb{R} \times \{0\}) = \lambda^1(\mathbb{R}) \cdot \lambda^1(\{0\}) = \infty \cdot 0 = 0.$$

Damit liegt D in $\mathfrak{L}^2$, weil $\mathfrak{L}^2$ die Vervollständigung von $\mathfrak{B}^2$ ist.

Wäre nun andererseits D in $\mathfrak{L}^1 \otimes \mathfrak{L}^1$, so wäre auch der Schnitt von D mit $\{y = 0\}$,

$$D_0 = \{x \in \mathbb{R} : \ (x, 0) \in D\} = C,$$

in $\mathfrak{L}^1$, was er aber nicht ist. Es ist also $D \notin \mathfrak{L}^1 \otimes \mathfrak{L}^1$.

Aufgabe 32. Sei $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ die Borelsche σ-Algebra auf $\mathbb{R}$ und λ das Borel-Lebesguesche Maß auf $\mathfrak{B}$. Sei weiter $\mu : \mathfrak{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ das Zählmaß auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

(i) die Diagonale $\triangle = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = y\}$ in $\mathfrak{B} \otimes \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ liegt;

(ii) für jedes $x \in \mathbb{R}$ der Schnitt $\triangle_x \in \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ und für jedes $y \in \mathbb{R}$ der Schnitt $\triangle_y \in \mathfrak{B}$ liegt;

(iii) die Funktionen $s : \mathbb{R} \to [0, \infty]$, $s(x) = \mu(\triangle_x)$, und $t : \mathbb{R} \to [0, \infty]$, $t(y) = \lambda(\triangle_y)$, messbar sind;

(iv) aber gilt:

$$\int s \, d\lambda \neq \int t \, d\mu.$$

Wieso widerspricht das nicht dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Produktmaße?

Lösungsvorschlag. (i) Wir bezeichnen wie üblich mit $\mathfrak{B}^n$ die Borelsche σ-Algebra auf $\mathbb{R}^n$ ($n = 1, 2$). Da

$$\mathfrak{B}^2 = \mathfrak{B}^1 \otimes \mathfrak{B}^1 \subseteq \mathfrak{B}^1 \otimes \mathfrak{P}(\mathbb{R})$$

ist, und die Diagonale $\triangle \subseteq \mathbb{R}^2$ abgeschlossen und damit Borelsch ist, folgt: $\triangle \in \mathfrak{B}^1 \otimes \mathfrak{P}(\mathbb{R})$.

(ii) Der Schnitt

$$\triangle_x = \{y \in \mathbb{R} : \ (x, y) \in \triangle\} = \{x\} \subseteq \mathbb{R}$$

ist als Teilmenge von $\mathbb{R}$ natürlich ein Element von $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$, für alle $x \in \mathbb{R}$. Der Schnitt

$$\triangle_y = \{x \in \mathbb{R} : \ (x, y) \in \triangle\} = \{y\} \subseteq \mathbb{R}$$

ist abgeschlossen und damit in $\mathfrak{B}^1$, für alle $y \in \mathbb{R}$. (Beachte hier, dass die Schreibweise für die Schnitte etwas verkürzt und damit vielleicht verwirrend ist. $\triangle_x$ liegt hier im 2. Faktor $\mathbb{R}$ von $\mathbb{R}^2$

und man sollte besser $\triangle_x^{(2)}$ schreiben. $\triangle_y$ liegt dagegen im 1. Faktor, so dass hier $\triangle_y^{(1)}$ besser wäre.)

(iii) Da nun also $\triangle_x = \{x\}$ und $\triangle_y = \{y\}$ ist, für alle $x, y \in \mathbb{R}$, ist

$$s\colon \mathbb{R} \to [0,\infty], \quad s(x) = \mu(\triangle_x) = \mu(\{x\}) = 1$$

und

$$t\colon \mathbb{R} \to [0,\infty], \quad t(x) = \lambda(\triangle_y) = \lambda(\{y\}) = 0.$$

Also sind s und t beide konstant und damit sicher messbar (s bzgl. $\mathfrak{B}$ und t bzgl. $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$).

(iv) Nun ist

$$\int t\, d\mu = \int 0\, d\mu = 0,$$

aber

$$\int s\, d\lambda = \int 1\, d\lambda = \lambda(\mathbb{R}) = \infty.$$

Also stimmen die beiden Integrale nicht überein.

Um hier kein Gegenbeispiel zum Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Produktmaße zu bekommen, kannn nur noch die Bedingung der σ-Endlichkeit der beiden beteiligten Maßräume nicht erfüllt sein. Dass aber $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, \lambda)$ σ-endlich ist, wissen wir schon. Bleibt damit nur noch, dass das Zählmaß μ auf $\mathbb{R}$ das Tripel $(\mathbb{R}, \mathfrak{P}(\mathbb{R}), \mu)$ nicht zu einem σ-endlichen Maßraum macht. Dafür ist die Aufgabe eigentlich schon ein Beweis. Man sieht das aber in der Tat auch direkt. Denn eine maß-endliche Teilmenge von $\mathbb{R}$ bedeutet für das Zählmaß, dass sie einfach endlich ist. Eine maß-endliche Ausschöpfung von $\mathbb{R}$ würde damit bedeuten, dass $\mathbb{R}$ eine abzählbare Vereinigung von endlichen Teilmengen wäre und damit wäre $\mathbb{R}$ abzählbar, was es aber nicht ist, wie wir es schon lange von Herrn Cantor gelernt haben. Kein Widerspruch also.

Aufgabe 33. Sei $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und $f\colon X \to [0,\infty]$ eine messbare Funktion. Sei weiter λ das Borel-Lebesguesche Maß auf der Borel-Algebra $\mathfrak{B}$ von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass der *Subgraph von* f, d.i. die Teilmenge

$$G_f := \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} :\ 0 \le t \le f(x)\} \subseteq X \times \mathbb{R},$$

in $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{P}(X \times \mathbb{R})$ ist und bezüglich des Produktmaßes $\mu \otimes \lambda$ auf $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ gilt:

$$\int f\, d\mu = \mu \otimes \lambda(G_f).$$

Lösungsvorschlag. (i) Die Abbildung $F\colon X \times \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$, $F(x,t) = f(x)$, ist $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$-messbar, denn für eine Borelmenge $B \subseteq \bar{\mathbb{R}}$ ist zunächst $f^{-1}(B) \in \mathfrak{A}$, da f messbar ist, und deshalb ist $F^{-1}(B) = f^{-1}(A) \times \mathbb{R} \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$. Auch $G\colon X \times \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$, $G(x,t) = t$, ist messbar, weil $g\colon \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$, $g(t) = t$, es ist. Nun ist mit $H := F - G : X \times \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$, $(x,t) \mapsto f(x) - t$,

$$G_f = H^{-1}([0,\infty]) \cap X \times [0,\infty) \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B},$$

weil mit F und G auch H $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$-messbar ist und $X \times [0,\infty) \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ ist. Also ist $G_f \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$.

(ii) Da neben μ auch das Borel-Lebesguesche Maß λ auf $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ σ-endlich ist, existiert das Produktmaß $\mu \otimes \lambda$ auf $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ und es erfüllt

$$\mu \otimes \lambda(G_f) = \int_X \lambda((G_f)_x)\, d\mu.$$

Der Schnitt $(G_f)_x \subseteq \mathbb{R}$ ist aber gerade

$$(G_f)_x = \{t \in \mathbb{R} :\ 0 \leq t \leq f(x)\} = [0, f(x)]$$

(bzw. $[0, \infty)$, falls $f(x) = \infty$ ist) und hat deshalb λ-Maß (wir sagen auch „Länge“)

$$\lambda((G_f)_x) = f(x).$$

Es folgt:

$$\mu \otimes \lambda(G_f) = \int_X f\, d\mu.$$

Aufgabe 34. **(a)** Sei K ein Kreiskegel mit einer Grundscheibe vom Radius $r > 0$ und Höhe $h > 0$. Berechnen Sie mit Cavalieries Prinzip das Volumen von K.

(b) Sei $f\colon [a, b] \to [0, \infty)$ stetig $(-\infty < a < b < \infty)$ und $K \subseteq [a, b] \times \mathbb{R}^2$ der Rotationskörper, der entsteht, wenn man den Graphen von f um die x-Achse rotiert,

$$K = \{(x, y, z) \in [a, b] \times \mathbb{R}^2 :\ y^2 + z^2 \leq f(x)^2\}.$$

Begründen Sie, warum $K \subseteq \mathbb{R}^3$ Borelsch ist und bzgl. des Borel-Lebesgueschen Maßes λ auf $\mathbb{R}^3$ gilt:

$$\lambda(K) = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx.$$

Lösungsvorschlag. **(a)** Wir legen die Koordinaten des Euklidischen Raumes so, dass die Spitze des Kreiskegels K im Nullpunkt und die Rotationsachse (die Verbindungslinie zwischen Kegelspitze und Mittelpunkt der Grundscheibe) die x-Achse ist. Dann ist K der Rotationskörper der stetigen Funktion $f\colon [0, h] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{r}{h}x$$

(siehe auch Teil (b)), d.h., wenn der Graph von f um die x-Achse rotiert:

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \leq x \leq h,\ y^2 + z^2 \leq (\frac{r}{h}x)^2\}.$$

Da $K \subseteq \mathbb{R}^3$ abgeschlossen ist, ist K auch Borelsch und damit λ^3-messbar. Der x-Schnitt von K ist dann eine Kreisscheibe vom Radius $\frac{r}{h}x \geq 0$, für $0 \leq x \leq h$, und hat daher λ^2-Maß (wir sagen auch „Flächeninhalt“)

$$\lambda^2(K_x) = \pi \cdot (\frac{r}{h}x)^2 = \frac{\pi r^2}{h^2}x^2.$$

Nach Cavalieris Prinzip hat daher K das λ^3-Maß (wir sagen auch das „Volumen“)

$$\lambda^3(K) = \int_{[0,h]} \lambda^2(K_x)\, d\lambda^1 = \int_0^h \frac{\pi r^2}{h^2}x^2\, dx = \frac{\pi r^2}{h^2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^h = \frac{1}{3}\frac{\pi r^2}{h^2} \cdot h^3 = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

(b) Teil (a) ist ein Spezialfall von Teil (b), aber Teil (b) ist auch nicht wesentlich schwieriger. Als Urbild der abgeschlossenen Menge $[0,\infty) \subseteq \mathbb{R}$ unter der stetigen Funktion $F\colon [a,b] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x,y,z) = f(x)^2 - y^2 - z^2$, ist K auch abgeschlossen (und sogar kompakt, da auch beschränkt) und damit Borelsch. Der x-Schnitt von K für $x \in [a,b]$ ist eine Kreisscheibe vom Radius $f(x)$,

$$K_x = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : \ y^2 + z^2 \leq f(x)^2\},$$

und hat daher Flächeninhalt $\lambda^2(K_x) = \pi f(x)^2$. Nach Cavalieris Prinzip hat daher K das Volumen

$$\lambda^3(K) = \int_a^b \lambda^2(K_x)\, dx = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx,$$

denn die Funktion $[a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \lambda^2(K_x)$, ist stetig und daher kann man das Lebesgue-Integral über $[a,b]$ durch das Riemann-Integral von a bis b ersetzen.

[**Anmerkung.** Die „Wahl von Koordinaten im Euklidischen Raum“ kann man z.B. so verstehen: Zunächst sei $K \subseteq \mathbb{R}^3$ irgendein Kreiskegel (mit Grundflächeninhalt πr^2 und Höhe h) und wir nennen die Koordinaten von $\mathbb{R}^3$ mal $y = (y_1, y_2, y_3)$. Dann machen wir „einen euklidischen Koordinatenwechsel“, soll heißen: Wir betrachten ein affin-lineares $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$y = T(x) = Sx + b,$$

mit einem $S \in \mathbb{O}(3) \subseteq \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ (der orthogonalen Gruppe) und $b \in \mathbb{R}^3$. Man spricht auch von einer „Bewegung“. Diese kann man so einrichten, dass $T^{-1}(K)$ (also K in den neuen Koordinaten $x = (x_1, x_2, x_3)$ des Euklidischen Raumes) die angegebene Teilmenge als Rotationskörper um die x_1-Achse ist. Den Verschiebungsvektor $b \in \mathbb{R}^3$ setzt man dabei so, dass die Spitze des Kegels in den x-Koordinaten in den Nullpunkt fällt (d.h.: b ist einfach die Kegelspitze in den ursprünglichen y-Koordinaten). Dann bestimmt man den Verbindungsvektor von Kegelspitze zum Mittelpunkt der Grundscheibe (d.i. die Differenz dieser beiden Vektoren im y-Raum) und längt diesen dann auf die Länge 1 ab. Diesen Einheitsvektor schreibt man in die erste Spalte der Matrix S. Dann hat man etwas Freiheit und ergänzt diesen Vektor zu einer Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ (bezüglich des kanonischen Skalarproduktes, das Bestandteil des „Euklidischen Raumes“ ist) und schreibt diese beiden ergänzten Vektoren in die Spalten 2 und 3 von S und erhält so eine orthogonale Matrix S. Diese Bewegung überführt dann offenbar gerade den Rotationskörper aus dem Lösungsvorschlag nach K (nachdem man die neuen Koordinaten $x = (x_1, x_2, x_3)$ in $x := x_1$, $y := x_2$ und $z := x_3$ umbenannt hat). Nach der Transformationsformel für Isomorphismen (des Vektorraumes $\mathbb{R}^3$) und der Translationsinvarianz von λ^3 bleibt λ^3 sogar unter der Gruppe

$$G = \{T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \ T(x) = Sx + b, \text{ mit } S \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}),\, b \in \mathbb{R}^3 \text{ und } |\det S| = 1\}$$

invariant und die Bewegungsgruppe $\mathrm{Bew}_3(\mathbb{R})$ aller Bewegungen ist eine Untergruppe von G. Es reicht daher das Volumen von $T^{-1}(K)$ (also K in den neuen Koordinaten) zu bestimmen.]

Aufgabe 35. Zeigen Sie, dass für das Volumen V eines Torus' T mit Radien $0 < r < R$ gilt:

$$V = 2\pi^2 r^2 R.$$

Lösungsvorschlag. (i) Wir machen ein kleine Vorbemerkung, die wir gleich (und in ähnlicher Form auch anderswo) gut gebrauchen können. Bei der Volumenberechnung des Rotationskörpers aus Aufgabe 34.b ist es egal, ob man in der Ungleichung „$\leq$“ oder „$<$“ verlangt, denn die *Mantelfläche*

$$M = \{(x,y,z) \in [a,b] \times \mathbb{R}^2 : \ y^2 + z^2 = f(x)^2\}$$

hat λ^3-Maß Null. Das kann man z.B. wiederum mit Cavalieri sehen. Dazu beobachten wir zunächst einmal, dass der Flächeninhalt $\lambda^2(\triangle)$ einer Kreisscheibe $\triangle \subseteq \mathbb{R}^2$ der gleiche ist, egal, ob man den Rand der Kreisscheibe, die Kreislinie, mit hinzunimmt oder nicht. Der Schnitt mit einer parallelen Geradenschar (die wir nach Koordinatenwahl als horizontal annehmen dürfen) besteht nämlich aus höchstens zwei Punkten und hat daher λ^1-Maß (Länge) Null. Nach Cavalieri ist damit eine Kreislinie im $\mathbb{R}^2$ eine λ^2-Nullmenge. Die x-Schnitte von M sind aber nun gerade Kreislinien, und daher folgt, dass M eine λ^3-Nullmenge ist.

(ii) Um nun das Volumen eines Torus' (Rettungsring oder auch Doughnut genannt) zu berechnen, legen wir zunächst unsere Koordinaten im Euklidischen Raum so, dass wir den Torus als einen Rotationskörper im Sinne von Aufgabe 34.b bekommen. (Zur Koordinatenwahl siehe auch die Anmerkung im Anschluss an Aufgabe 34.) Die Koordinaten entsprechend gewählt, bekommt man den Torus als Rotationsfläche um die x-Achse, wenn man die Kreisscheibe in der xy-Ebene mit Mittelpunkt $(0,R)$ und Radius r um die x-Achse rotieren lässt. Nun ist die Kreislinie

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + (y-R)^2 = r^2\}$$

nicht der Graph einer stetigen Funktion, weshalb wir nur den oberen Teil durch den Graphen von $f\colon [-r,r] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = R + \sqrt{r^2 - x^2}$ und den unteren Teil durch den Graphen von $g\colon [-r,r] \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = R - \sqrt{r^2 - x^2}$ beschreiben. Dann erhalten wir den Torus T als Differenzmenge

$$T = K_f \setminus \tilde{K_g},$$

wobei wir mit $K_f \subseteq \mathbb{R}^3$ den (abgeschlossenen) Rotationskörper aus 34.b zu f und mit $\tilde{K_g}$ den Rotationskörper ohne Mantelfläche zu g meinen. Da $\tilde{K_g} \subseteq K_f$ ist, wissen wir nach den Eigenschaften eines Maßes und der Vorbemerkung, dass $\lambda^3(\tilde{K_g}) = \lambda^3(K_g)$ ist:

$$\lambda^3(T) = \lambda^3(K_f) - \lambda^3(\tilde{K_g}) = \lambda^3(K_f) - \lambda^3(K_g) = \pi \int f^2(x) - g^2(x)\, dx.$$

Der Rest ist nun Routine:

$$f^2(x) - g^2(x) = 4R\sqrt{r^2 - x^2}.$$

Da dies eine gerade Funktion in r ist, reicht es, das Integral von 0 bis $+r$ zu nehmen, und dieses am Ende zu verdoppeln. Wir machen wegen der Wurzel noch die Substitution $\frac{x}{r} = \sin\varphi$, für $x \in [0,r]$, also $\varphi \in [0, \pi/2]$, und finden dann

$$\frac{dx}{d\varphi} = r\cos\varphi,$$

also

$$\int_0^r 4R\sqrt{r^2 - x^2}\, dx = 4Rr \int_0^r \sqrt{1 - (\frac{x}{r})^2}\, dx = 4Rr \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2\varphi} \cdot r\cos\varphi\, d\varphi.$$

Im Bereich $[0, \pi/2]$ ist aber $\sqrt{1 - \sin^2\varphi} = +\cos\varphi$, so dass wir

$$V = 2\pi \int_0^r 4R\sqrt{r^2 - x^2}\, dx = 8\pi r^2 R \int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi\, d\varphi$$

erhalten. Das Integral $\int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi \, d\varphi$ kann man mit partieller Integration schließlich schnell zu

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{4}$$

berechnen, so dass insgesamt tatsächlich folgt:

$$V = 2\pi^2 r^2 R.$$

Aufgabe 36. (a) Sei $K \subseteq \mathbb{R}^3$ kompakt mit $\overset{\circ}{K} \neq \emptyset$. ($\overset{\circ}{K}$ bezeichnet hier das Innere von K.) Begründen Sie, dass K Borelsch ist und für das Lebesguesche Maß $\lambda^3(K) = V$ gilt: $0 < V < \infty$.

(b) *Der Schwerpunkt* $S_K = (s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^3$ *eines Körpers* $K \subseteq \mathbb{R}^3$ (d.h.: K ist kompakt mit $\overset{\circ}{K} \neq \emptyset$) wird definiert durch ($\operatorname{vol}(K) := \lambda^3(K)$)

$$s_i := \frac{1}{\operatorname{vol}(K)} \int_K x_i \, dx \quad (i = 1, 2, 3).$$

Sei nun $S = S_{\mathbb{B}^3_+} = (s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^3$ der Schwerpunkt der oberen Halbkugel $\mathbb{B}^3_+ = \{x \in \mathbb{B}^3 : x_3 \geq 0\}$.

(i) Begründen Sie mit Hilfe der Transformationsformel für lineare Diffeomorphismen, dass $s_1 = s_2 = 0$ ist.

(ii) Berechnen Sie mit Hilfe von Tonellis Satz s_3.

Lösungsvorschlag. (a) Ist $K \subseteq \mathbb{R}^3$ beschränkt (insbesondere also, wenn K kompakt ist), so gibt es ein $R > 0$, so dass K Teilmenge des Würfels W_R mit Kantenlänge $2R$ ist, $W_R = [-R, R]^3$. Es folgt mit der Monotonie von λ^3:

$$\lambda^3(K) \leq \lambda^3(W_R) = (2R)^3 < \infty.$$

Ist $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und nicht-leer, so enthält U einen Würfel

$$W_\varepsilon(p) = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ |x_j - p_j| \leq \varepsilon, \ j = 1, 2, 3\},$$

mit einem $p = (p_1, p_2, p_3) \in U$ und einem $\varepsilon > 0$. Wegen der Monotonie des Maßes folgt:

$$0 < (2\varepsilon)^3 = \lambda^3(W_\varepsilon(p)) \leq \lambda^3(U).$$

Ist nun K kompakt, so ist also einerseits $V = \lambda^3(K) < \infty$, und hat zudem K nicht-leeres Inneres, $\overset{\circ}{K} \neq \emptyset$, so ist, weil $\overset{\circ}{K} \subseteq K$ und $\overset{\circ}{K}$ offen ist, auch

$$\lambda^3(K) \geq \lambda^3(\overset{\circ}{K}) > 0.$$

(b) [**Vorbemerkung.** Der Schwerpunkt $S_K \in \mathbb{R}^3$ eines Körpers $K \subseteq \mathbb{R}^3$ ist wohldefiniert. Denn einerseits ist $\operatorname{vol}(K) \in (0, \infty)$ nach Teil (a), und andererseits ist eine stetige Funktion

$f\colon K \to \mathbb{R}$ auf einem Kompaktum K auch Lebesgue-integrierbar, weil $|f|$ nach dem Satz von Weierstraß beschränkt ist. Ist nämlich etwa $|f| \leq c$, für ein $c > 0$, so ist

$$\int_K |f|\,dx \leq \int_K c\,dx = c \cdot \mathrm{vol}(K) < \infty,$$

also f integrierbar. Die Projektionen $\pi_i\colon K \to \mathbb{R}$, $\pi_i(x) = x_i$ $(i = 1, 2, 3)$, sind stetig und damit ist $S_K \in \mathbb{R}^3$ wohldefiniert.]

(i) „Aus Symmetriegründen" muss der Schwerpunkt von $K = \mathbb{B}^3_+ = \{x \in \mathbb{B}^3 : x_3 \geq 0\}$ auf der x_3-Achse liegen. Dieses Argument können wir mit der Transformationsformel für lineare Diffeomorphismen so präzisieren: Sei $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Spiegelung an der x_2x_3-Ebene, also

$$T(y_1, y_2, y_3) = (-y_1, y_2, y_3) = (x_1, x_2, x_3).$$

Dann ist $\det T = -1$, also $|\det T| = 1$, und es ist $T(\mathbb{B}^3_+) = \mathbb{B}^3_+$, denn $y \in \mathbb{B}^3_+ \Leftrightarrow Ty \in \mathbb{B}^3_+$. Es ist deshalb mit $\pi_1(x) = x_1$:

$$\mathrm{vol}(\mathbb{B}^3_+) \cdot s_1 = \int_{\mathbb{B}^3_+} x_1\,dx = \int_{T^{-1}(\mathbb{B}^3_+)} \pi_1 \circ T(y) \cdot |\det T|\,dy = \int_{\mathbb{B}^3_+} -y_1\,dy = -\mathrm{vol}(\mathbb{B}^3_+) \cdot s_1,$$

und daher $s_1 = 0$. Mit der Spiegelung an der x_1x_3-Ebene argumentiert man genauso und erhält $s_2 = 0$. Man hat also nur die Symmetrie von $\mathbb{B}^3_+$ gegenüber diesen beiden Spiegelungen ausgenutzt.

(ii) An der x_1x_2-Ebene können wir nun nicht mehr spiegeln, da dies $\mathbb{B}^3_+$ nicht in sich überführt. (Das Argument würde aber zeigen, dass der Schwerpunkt von $\mathbb{B}^3$ im Mittelpunkt liegt. Na ja.) Ich denke, dass wir s_3 jetzt wirklich ausrechnen müssen. Das machen wir naheliegender Weise mit Tonellis Satz, in dem wir die π_3-Schnitte in x_3-Richtung betrachten. Für jedes $t \in [0, 1]$ ist nämlich $(\pi_3)_t\colon (\mathbb{B}^3_+)_t \to [0, \infty)$ konstant gleich t und

$$(\mathbb{B}^3_+)_t = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 :\ x_1^2 + x_2^2 \leq 1 - t^2\},$$

also eine Kreisscheibe vom Radius $r(t) = \sqrt{1 - t^2}$, und hat daher Flächeninhalt

$$\lambda^2((\mathbb{B}^3_+)_t) = \pi r^2(t) = \pi(1 - t^2).$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(\mathbb{B}^3_+) \cdot s_3 &= \int_0^1 \left(\int_{(\mathbb{B}^3_+)_t} t\,dx_1dx_2 \right) dt = \int_0^1 t \left(\int_{\mathbb{B}^3_+)_t} 1\,dx_1dx_2 \right) dt \\
&= \int_0^1 t \cdot \pi(1 - t^2)\,dt = \pi \int_0^1 t - t^3\,dt = \pi \left[\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}t^4 \right]_0^1 = \pi(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) = \frac{1}{4}\pi.
\end{aligned}$$

Mit dem halben Kugelvolumen

$$\mathrm{vol}(\mathbb{B}^3_+) = \frac{1}{2}\mathrm{vol}(\mathbb{B}^3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$$

folgt:

$$s_3 = \frac{\frac{1}{4}\pi}{\frac{2}{3}\pi} = \frac{3}{8}.$$

Aufgabe 37. Wir betrachten die Kugelkoordinaten $\Phi\colon G \to \mathbb{R}^3$ mit $G = (0,1) \times (0,\pi) \times (0, 2\pi)$ und

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = (r \sin\theta \cos\varphi, r \sin\theta \sin\varphi, r\cos\theta).$$

Wir benutzen von Aufgabe 44.b aus Analysis II, dass Φ injektiv ist.

(a) Berechnen Sie die Jacobische $J_\Phi\colon G \to [0, \infty)$, argumentieren Sie möglichst sauber mit dem Umkehrsatz, dass $D = \Phi(G)$ ein Gebiet ist, bestimmen Sie D und begründen Sie, warum $\Phi\colon G \to D$ ein Diffeomorphismus ist.

(b) Begründen Sie, warum $\mathbb{B}^3 \setminus D$ eine Borelsche Nullmenge ist. (Hint: Z.B. mit der Transformationsformel oder auch mit Cavalieri wie in der Musterlösung-10 von Aufgabe 35.)

(c) Zeigen Sie nun (erneut) mit Hilfe dieser Kugelkoordinaten, dass für das Volumen V der Einheitskugel $\mathbb{B}^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| \leq 1\}$ gilt:

$$V = \frac{4}{3}\pi.$$

Lösungsvorschlag. **(a)** Zunächst berechnen wir die Jacobi-Matrix von Φ in jedem Punkt $y = (r, \theta, \varphi) \in G$:

$$\operatorname{Jac}(\Phi)(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Zur Berechnung der Determinante entwickeln wir mit Laplace nach der letzten Spalte:

$$\begin{aligned}
&\det(\operatorname{Jac}(\Phi))(r,\theta,\varphi) = \\
&\qquad -r\sin\theta\sin\varphi(-r\sin^2\theta\sin\varphi - r\cos^2\theta\sin\varphi) \\
&\qquad -r\sin\theta\cos\varphi(-r\sin^2\theta\cos\varphi - r\cos^2\theta\cos\varphi) \\
&= \quad r^2\sin\theta\sin^2\varphi(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + r^2\sin\theta\cos^2\varphi(\sin^2\theta+\cos^2\theta) \\
&= \quad r^2\sin\theta(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = r^2\sin\theta.
\end{aligned}$$

Da sin auf dem Intervall $(0, \pi)$ positiv ist, erhalten wir also schließlich

$$J_\Phi(r,\theta,\varphi) = |\det(\operatorname{Jac}(\Phi))(r,\theta,\varphi)| = r^2\sin\theta > 0,$$

für alle $y = (r, \theta, \varphi) \in G$. Damit ist das Differential $D\Phi(y)$ in jedem Punkt $y = (r, \theta, \varphi) \in G$ invertierbar. Der Umkehrsatz liefert dann, dass $D = \Phi(G) \subseteq \mathbb{R}^3$ offen ist und dass Φ um jeden Punkt $y \in G$ *lokal* umkehrbar ist. Aber wir wissen schon, dass $\Phi\colon G \to \mathbb{R}^3$ injektiv und damit $\Phi\colon G \to D$ bijektiv ist. Deshalb ist für jedes $x \in D$ und offenen Umgebungen $U \subseteq G$ von $y = \Phi^{-1}(x) \in G$ und $V \subseteq D$ von x, so dass $\Phi(U) = V$ und $\Phi|U\colon U \to V$ Diffeomorphismus ist:

$$(\Phi|U)^{-1} = \Phi^{-1}|V.$$

Deshalb ist Φ^{-1} auch stetig differenzierbar und damit $\Phi\colon G \to D$ ein *globaler* Diffeomorphismus. Da G wegzusammenhängend ist, ist es auch D und damit $D \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Gebiet.

Wegen $r \in (0,1)$ ist

$$D \subseteq \{x \in \mathbb{B}^3 :\ 0 < \|x\| < 1\},$$

wegen $\varphi \in (0, 2\pi)$ ist mit

$$H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{B}^3 : \ x_2 = 0, \ x_1 \geq 0\}$$

$D \cap H = \emptyset$ und die Punkte, wo $\theta = 0$ bzw. $\theta = \pi$ ist (wenn man Φ auch dort durch die gleiche Vorschrift definieren würde), liegen auf der x_3-Achse und sind daher schon in der Halbebene H enthalten. Alle anderen Punkte aus $\mathbb{B}^3$ werden getroffen, so dass

$$D = \mathbb{B}^3 \setminus (\mathbb{S}^2 \cup H)$$

ist.

(b) Wir wissen bereits aus Aufgabe 13.b, dass H eine Nullmenge ist, da sie Teilmenge der Ebene $\{x_2 = 0\}$ ist. Dass auch die 2-Sphäre

$$\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ \|x\| = 1\}$$

eine Nullmenge ist, können wir wieder mit Cavalieri sehen. Es sind nämlich die Schnitte

$$\mathbb{S}^2_t = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ (x_1, x_2, t) \in \mathbb{S}^2\}$$

für $t \in (-1, 1)$ Kreislinien in $\mathbb{R}^2$ und damit Nullmengen (siehe auch die Anmerkung in der Musterlösung-10 von Aufgabe 35, wo Cavalieri noch mal angewendet wird), für $t = \pm 1$ ist der Schnitt ein Punkt, und für $|t| > 1$ ist er sogar leer. In allen Fällen ist er damit eine Nullmenge und deshalb $\mathbb{S}^2$ auch. Insgesamt ist damit $\mathbb{B}^3 \setminus D$ eine Nullmenge, daher $\lambda^3(\mathbb{B}^3) = \lambda^3(D)$ und wir können dann $\omega_3 = \lambda^3(\mathbb{B}^3)$ mit Hilfe der Transformationsformel zu

$$\omega_3 = \int_G J_\Phi(y)\, dy$$

berechnen.

(c) Um das zu tun, brauchen wir erneut eine Feinheit, die nun Nullmengen in $\bar{G}$ betrifft. Der Rand von G ist erneut eine Nullmenge, weil er aus sechs Teilen besteht, die jeweils in einer Ebene liegen. Die Funktion J_Φ hat auf $\bar{G}$ eine stetige Fortsetzung durch die gleiche Funktionsvorschrift $(r, \theta, \varphi) \mapsto r^2 \sin\theta$. Deshalb können wir nun J_Φ auch über $\bar{G}$ integrieren und dieses Integral nach Tonelli dann als ein dreifaches Integral in jeweils einer Variable einer stetigen Funktion über einem kompakten Intervall berechnen. Letztere sind dann aber Riemann-Integrale, die wir mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung endgültig ausrechnen können. Das machen wir jetzt noch:

$$\begin{aligned} V &= \int_G J_\Phi(y)\, dy = \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta \, dr d\theta d\varphi = (\int_0^{2\pi} d\varphi) \cdot (\int_0^1 r^2\, dr) \cdot (\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta) \\ &= 2\pi \cdot [\frac{1}{3} r^3]_0^1 \cdot [-\cos\theta]_0^\pi = 2\pi \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}\pi. \end{aligned}$$

Aufgabe 38. Wir betrachten nun die Polarkoordinaten $\Phi\colon G \to \mathbb{R}^2$ mit $G = (0, \infty) \times (0, 2\pi)$ und

$$\Phi(r, \varphi) = (r \cos\varphi, r \sin\varphi).$$

(a) Berechnen Sie die Jacobische J_Φ von Φ, das Bild $D \subseteq \mathbb{R}^2$ von Φ und begründen Sie, warum $\Phi\colon G \to D$ ein Diffeomorphismus ist.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe von Polarkoordinaten die Integrale

$$\int_{\mathbb{B}^2} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy, \qquad \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\, dxdy,$$

und zeigen Sie mit Hilfe des 2. Integrals (erneut):

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

Lösungsvorschlag. (a) Das ist ähnlich wie in Aufgabe 37.a, nur einfacher. Für die Jacobische von Φ finden wir

$$\Phi(r,\varphi) = |\det\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}| = |r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)| = r > 0.$$

Deshalb ist $D = \Phi(G)$ offen. Wir wissen von früher (siehe Aufgabe 44.a, Analysis-II), dass Φ injektiv ist und wegen des Umkehrsatzes ist Φ dann ein Diffeomorphismus auf sein Bild. Aus der Definition von Φ sieht man, dass $D = \mathbb{R}^2 \setminus H$ mit

$$H = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 :\ x_2 = 0,\ x_1 \geq 0\}$$

ist.

(b) Da H eine Nullmenge ist (und auch $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^2$), kann man die angegebenen Integrale mittels der Transformationsformel über $\tilde{G} := (0,1)\times(0,2\pi)$ bzw. über G berechnen bzw. sogar, ähnlich wie bei 37.b, die stetigen Fortsetzungen über $\bar{\tilde{G}}$ bzw. $\bar{G}$ und dann Tonellis Satz verwenden, und schließlich durch iterierte Riemann-Integrale ausrechnen.

(i)

$$I := \int_{\mathbb{B}^2} \exp(\sqrt{x^2+y^2})\, dxdy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \exp(r)\cdot r dr d\varphi = 2\pi \int_0^1 re^r\, dr.$$

Mit partieller Integration $u(r) = r$ und $v'(r) = e^r$ führt dies zu

$$\frac{1}{2\pi} I = [re^r]_0^1 - \int_0^1 e^r\, dr = e - [e^r]_0^1 = e - (e-1) = 1,$$

also

$$I = 2\pi.$$

(ii)

$$\begin{aligned} J &:= \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-x^2-y^2)\, dxdy = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-r^2}\cdot r dr d\varphi = 2\pi \int_0^\infty \frac{d}{dr}(-\frac{1}{2}e^{-r^2})\, dr \\ &= 2\pi[-\frac{1}{2}e^{-r^2}]_0^\infty = -\pi(0-1) = \pi. \end{aligned}$$

Mit Tonelli ist

$$\begin{aligned} (\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\, dx)^2 &= (\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx)(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\, dy) = \int_{\mathbb{R}}(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}e^{-y^2}\, dy)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}}(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}e^{-y^2}\, dx)dy = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\, dxdy = J, \end{aligned}$$

also

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Aufgabe 39. **(a)** Sei λ das Borel-Lebesguesche Maß auf $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$), $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein (achsenparalleler) Quader und sei $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie, dass es ein $r \in \mathbb{N}$ und (achsenparallele) Würfel $W_1, \dots, W_r \subseteq \mathbb{R}^n$ gibt mit $Q \subseteq W_1 \cup \dots \cup W_r$ und

$$\sum_{j=1}^{r} \lambda(W_j) < \lambda(Q) + \varepsilon.$$

(Hinweis: Prüfen Sie das zunächst für Quader mit rationalen Eckpunkten und approximieren Sie dann Q mit solchen von außen.)

(b) Zeigen Sie nun, dass man das äußere Lebesgue-Maß λ^* auf $\mathbb{R}^n$ auch mit Würfelüberdeckungen an Stelle von Quaderüberdeckungen definieren könnte, d.h.: für alle $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist

$$\lambda^*(A) = \inf\{\sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda(W_j) \in [0,\infty] : \ (W_j)_{j\in\mathbb{N}} \text{ ist eine Würfelüberdeckung von } A\}.$$

Lösungsvorschlag. **(a)** Sei also $Q = \prod_{j=1}^n I_j \subseteq \mathbb{R}^n$ ein (achsenparalleler) Quader. Da λ translationsinvariant ist, dürfen wir annehmen, dass die linke Intervallgrenze von I_j Null ist, also

$$Q = \prod_{j=1}^{n} [0, b_j].$$

Hier haben wir o.B.d.A. auch angenommen, dass Q abgeschlossen ist, da sich das Maß von Q nicht ändert, wenn Teile des Randes von Q nicht zu Q gehören.

(i) Sei zunächst $b_j \in \mathbb{Q}$, für alle $j = 1, \dots, n$. Dann können wir sogar endlich viele Würfel $W_1, \dots, W_r \subseteq \mathbb{R}^n$ finden, die Q überdecken und

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda(W_i) = \lambda(Q)$$

erfüllen. Wenn wir alle $b_j \geq 0$ nämlich auf einen gemeinsamen Hauptnenner $l \in \mathbb{N}$ bringen, dürfen wir also annehmen, dass $b_j = m_j/l$ mit $m_j \in \mathbb{N}_0$, für alle $j = 1, \dots, n$, ist. Dann betrachten wir für jedes $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ mit $k_j \leq m_j$ ($j = 1, \dots, n$) den Würfel

$$W_k := \prod_{j=1}^{n} [\frac{k_j - 1}{l}, \frac{k_j}{l}].$$

Diese haben alle Kantenlänge $1/l$ und damit Volumen $1/l^n$, und es gibt $m_1 \cdots m_n$ davon, so dass

$$\sum_k \lambda(W_k) = m_1 \cdots m_n \cdot \frac{1}{l^n} = \prod_{j=1}^{n} \frac{m_j}{l} = \prod_{j=1}^{n} b_j = \lambda(Q)$$

ist. Außerdem ist offenbar

$$Q = \bigcup_k W_k,$$

so dass also Q von $(W_k)_k$ überdeckt wird. (Die verschiedenen W_k's schneiden sich allenfalls in Nullmengen.)

(ii) Sei nun $b_j \in [0,\infty)$ beliebig ($j = 1,\dots,n$) und $\varepsilon > 0$ auch. Wir wählen für jedes $j = 1,\dots,n$ eine monoton fallende Folge rationaler Zahlen $(r_{jl})_{l\in\mathbb{N}}$, die gegen b_j konvergiert, $(r_{jl})_{l\in\mathbb{N}} \searrow b_j$. Dann betrachten wir für jedes $l \in \mathbb{N}$ den Quader

$$P_l := \prod_{j=1}^{n} [0, r_{jl}] \subseteq \mathbb{R}^n,$$

der nun offenbar rationale Eckpunkte hat. Es existiert nun ein $l_0 \in \mathbb{N}$, so dass mit $P_0 := P_{l_0}$

$$\lambda(P_0) - \lambda(Q) = \prod_{j=1}^{n} r_{jl_0} - \prod_{j=1}^{n} b_j < \varepsilon$$

ist, denn $(\prod_j r_{jl})_l$ konvergiert gegen $\prod_j b_j$. Nun gibt es nach Teil (i) Würfel $W_1,\dots,W_r$ ($r \in \mathbb{N}$), so dass $\bigcup_{i=1}^{r} W_i = P_0 \supseteq Q$ und

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda(W_i) = \lambda(P_0) < \lambda(Q) + \varepsilon$$

ist.

(b) Da für jede Würfelüberdeckung $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von $A \subseteq \mathbb{R}^n$ wegen $A \subseteq \bigcup_k W_k$ natürlich

$$\lambda^*(A) \leq \sum_k \lambda(W_k)$$

ist, reicht es zu zeigen, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Würfelüberdeckung (W_k) von A gibt mit

$$\sum_k \lambda(W_k) < \lambda^*(A) + \varepsilon.$$

Aber nach Defnition von $\lambda^*(A)$ gibt es eine Quaderüberdeckung $(Q_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von A mit

$$\sum_j \lambda(Q_j) < \lambda^*(A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Für jedes $j \in \mathbb{N}$ finden wir nach Teil (a) eine Würfelüberdeckung $(W_{ji})_{i=1,\dots,r_j}$ (mit einem $r_j \in \mathbb{N}$), so dass

$$\sum_{i=1}^{r_j} \lambda(W_{ji}) < \lambda(Q_j) + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}.$$

Die abzählbare Würfelfamilie $(W_{ji})_{j\in\mathbb{N}, i=1,\dots,r_j}$ überdeckt dann A, denn

$$\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \bigcup_{i=1}^{r_j} W_{ji} \supseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j \supseteq A,$$

und es gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{r_j} \lambda(W_{ji}) &< \sum_{j\in\mathbb{N}} (\lambda(Q_j) + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda(Q_j) + \frac{1}{2}\varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^j \\
&< (\lambda^*(A) + \frac{\varepsilon}{2}) + \frac{\varepsilon}{2} = \lambda^*(A) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Aufgabe 40. (a) Sei $N \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge (bzgl. des äußeren Lebesgue-Maßes auf $\mathbb{R}^n$) und $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie, dass es eine Kugelüberdeckung $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von N gibt mit $\sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda(B_k) < \varepsilon$.

(b) Zeigen Sie, dass man das äußere Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$ auch mit Kugelüberdeckungen bekommt: Für alle $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist

$$\lambda^*(A) = \inf\{\sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda(B_j) \in [0,\infty] : \ (B_j)_{j\in\mathbb{N}} \text{ ist eine Kugelüberdeckung von } A\}.$$

(Hinweis: Benutzen Sie das (noch unbewiesene) Lemma aus der Vorlesung, dass man einen Quader Q zu einem gegebenen $\varepsilon > 0$ so mit einer Kugelüberdeckung $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Q versehen kann, dass $\sum_k \lambda(B_k) < \lambda(Q) + \varepsilon$ ist.)

Lösungsvorschlag. (a) Sei $W_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ der (abgeschlossene) Einheitswürfel (d.h.: mit Kantenlänge 1) und Mittelpunkt $0 \in \mathbb{R}^n$,

$$W_0 = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^n.$$

Die Umkugel von W ist dann die (abgeschlossene) Kugel B_0 mit Mittelpunkt $0 \in \mathbb{R}^n$ und Radius

$$r_0 = \|(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})\| = \sqrt{n \cdot \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

Ihr Volumen ist

$$\mathrm{vol}(B_0) = \omega_n \cdot r_0^n = \frac{n^{n/2}}{2^n}\omega_n =: c_n,$$

wo $\omega_n \in \mathbb{R}_+$ das Volumen der Einheitskugel bezeichnet, $\omega_n = \mathrm{vol}(\mathbb{B}^n)$. Nach der Transformationsformel ist nun der Quotient

$$\frac{\mathrm{vol}(B)}{\mathrm{vol}(W)} = \frac{c_n}{1} = c_n$$

für *jeden* Würfel $W \subseteq \mathbb{R}^n$ und seiner Umkugel B der gleiche. Hat nämlich W die Kantenlänge $r > 0$, so hat seine Umkugel den Radius $r \cdot r_0$, und damit ist

$$\mathrm{vol}(B) = \mathrm{vol}(B_0) r^n = c_n \mathrm{vol}(W)$$

(und der gemeinsame Mittelpunkt von W und B spielt wegen der Translationsinvarianz des Maßes sowieso keine Rolle dabei).

Ist nun $N \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge und $\varepsilon > 0$, so finden wir zunächst nach Aufgabe 39.b eine Würfelüberdeckung $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda(W_k) < \frac{1}{c_n}\varepsilon.$$

Für jedes W_k ($k \in \mathbb{N}$) betrachten wir dann seine Umkugel $B_k \supseteq W_k$. Dann ist auch $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Überdeckung von N und es gilt:

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda(B_k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} c_n \lambda(W_k) < c_n \cdot \frac{\varepsilon}{c_n} = \varepsilon.$$

(b) Das ist jetzt ähnlich wie in Aufgabe 39 (eigentlich genauso), nur dass es schwieriger ist, einen Quader volumensparsam mit Kugeln zu überdecken. Dieses Lemma aus der Vorlesung (welches wir vielleicht auf dem nächsten Übungsblatt noch mal betrachten) benutzen wir jetzt: Ist $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader und $\delta > 0$, so gibt es eine Kugelüberdeckung $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Q mit

$$\sum_k \lambda(B_k) < \lambda(Q) + \delta.$$

Dann können wir für jedes $A \subseteq \mathbb{R}^n$ wie in 39.b zu Ende argumentieren, dass A für jedes $\varepsilon > 0$ eine Kugelüberdeckung $(C_j)_{j\in\mathbb{N}}$ hat, so dass

$$\sum_j \lambda(C_j) < \lambda^*(A) + \varepsilon$$

ist. Das zeigt dann tatsächlich:

$$\lambda^*(A) = \inf\{\sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda(B_j) \in [0,\infty] : \ (B_j)_{j\in\mathbb{N}} \text{ ist eine Kugelüberdeckung von } A\}.$$

Aufgabe 41. Sei λ das Borel-Lebesguesche Maß auf $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$).

(a) Seien $f, g \in \mathfrak{L}^1(\lambda)$. Zeigen Sie, dass $\varphi\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto f(t)g(x-t)$, messbar und bzgl. $\lambda \otimes \lambda$ integrierbar ist und damit nach Fubinis Satz $f * g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$(f * g)(x) = \int f(t)g(x-t)\, d\lambda(t),$$

λ-fast überall definiert ist. Wir setzen $(f * g)(x) = 0$ für die $x \in \mathbb{R}^n$, wo diese Vorschrift nicht definiert ist, und nennen $f * g$ *die Faltung von* f *und* g. Begründen Sie, warum $f * g$ messbar ist und

$$\|f * g\|_1 \le \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$$

gilt (und damit also $f * g \in \mathfrak{L}^1(\lambda)$ ist).

(b) Zeigen Sie, dass

$$*\colon L^1(\lambda) \times L^1(\lambda) \to L^1(\lambda),\ ([f],[g]) \mapsto [f * g]$$

wohldefiniert, $\mathbb{R}$-bilinear, assoziativ und kommutativ ist.

(Hinweis: Benutzen Sie Translationsinvarianz von λ und Tonellis Satz.)

Lösungsvorschlag. (a) Die Funktionen $\psi\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$\psi(x,t) = x - t, \quad \pi(x,t) = t,$$

sind stetig und damit messbar. Deshalb ist auch $\varphi\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x,t) = f(t)g(x-t) = ((f \circ \pi) \cdot (g \circ \psi))(x,t)$$

messbar. Wegen der Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes oder direkt aus der Transformationsformel für die Translation $\tau_t\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $y \mapsto y + t$ (bei festem $t \in \mathbb{R}^n$), die Jacobische gleich 1 hat, ist

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} g(x-t)\, d\lambda(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} g \circ \tau_{-t}(x)\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g \circ \tau_{-t}(\tau_t(y)) \cdot J_{\tau_t}(y)\, d\lambda(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\, d\lambda(y),\end{aligned}$$

und das Gleiche gilt für $|g|$ an Stelle von g. Deshalb schließen wir mit Tonellis Satz

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{2n}} |\varphi|\, d(\lambda\otimes\lambda) &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(t)|(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x-t)|\, d\lambda(x))\, d\lambda(t)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(t)|(\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|\, d\lambda(y))\, d\lambda(t) = \|f\|_1\cdot\|g\|_1 < \infty,\end{aligned}$$

also ist φ integrierbar. Deshalb folgt nun aus Fubinis Satz, dass $f * g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$(f*g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_x\, d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)g(x-t)\, d\lambda(t),$$

λ-fast-überall definiert ist. Setzt man $f * g$ gleich Null auf der Borelschen Nullmenge, wo sie nicht definiert sind (in diesem Fall ist das $+$-Integral oder das $-$-Integral unendlich), ist $f*g$ außerdem λ-integrierbar (insbesondere also messbar) mit

$$\begin{aligned}\|f*g\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left|\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_x\, d\lambda(t))\right| d\lambda(x) \le \int_{\mathbb{R}^n} (\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_x|\, d\lambda(t))\, d\lambda(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} |\varphi|\, d(\lambda\otimes\lambda) = \|f\|_1\cdot\|g\|_1,\end{aligned}$$

wie gerade gesehen.

(b) (i) Seien $f, \tilde{f}, g, \tilde{g} \in \mathfrak{L}^1(\lambda)$ mit $f = \tilde{f}$ f.ü. und $g = \tilde{g}$ f.ü. Außerhalb einer Nullmenge $N \subseteq \mathbb{R}^n$ ist dann

$$f(x) = \tilde{f}(x),\ g(x) = \tilde{g}(x),$$

und $(f*g)(x)$ und $(\tilde{f}*\tilde{g})(x)$ sind durch die Integralausdrücke gegeben. Mit N ist auch die Translation um x von $-N$ eine Nullmenge und deshalb ist

$$\begin{aligned}(\tilde{f}*\tilde{g})(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(t)\tilde{g}(x-t)\, d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}^n\setminus(N\cup\tau_x(-N))} \tilde{f}(t)\tilde{g}(x-t)\, d\lambda(t)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n\setminus(N\cup\tau_x(-N))} f(t)g(x-t)\, d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)g(x-t)\, d\lambda(t) = (f*g)(x).\end{aligned}$$

Es folgt: $[\tilde{f}*\tilde{g}] = [f*g]$, d.i.: $*\colon L^1\times L^1 \to L^1$ ist wohldefiniert.

(ii) Seien $f_1, f_2, g \in \mathfrak{L}^1(\lambda)$ und $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Aufgrund der Linearität des Integrals folgt für alle $x\in\mathbb{R}^n$, wo $f_1 * g$ und $f_2 * g$ durch das Integral definiert sind:

$$\begin{aligned}a_1(f_1*g)(x) &+ a_2(f_2*g)(x) = a_1\int_{\mathbb{R}^n} f_1(t)g(x-t)\, d\lambda(t) + a_2\int_{\mathbb{R}^n} f_2(t)g(x-t)\, d\lambda(t)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (a_1f_1+a_2f_2)(t)g(x-t)\, d\lambda(t) = ((a_1f_1+a_2f_2)*g)(x).\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung gilt, weil für den Fall, dass das Integral existiert (also die Integrale über die $+$- und $-$-Teile endlich sind), die Faltung auch durch das Integral gegeben ist. Da dieses Integral hier existiert, ist es also die Faltung zwischen $a_1f_1 + a_2f_2$ und g. Daraus folgt, dass $*$ im ersten Argument bilinear ist und für das zweite Argument argumentiert man völlig anlalog oder benutzt die nun folgende Kommutativität von $*$.

(iii) Seien $f, g \in \mathfrak{L}^1(\lambda)$ und $x \in \mathbb{R}^n$ derart, dass $g * f$ in x durch das Faltungsintegral gegeben ist. Wir betrachten dann den affinen Diffeomorphismus $\Phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, der durch

$$t = \Phi(s) = x - s$$

(bei festem x) gegeben ist. Dieser hat offenbar Jacobische $J_\Phi(s) = |\det D\Phi(s)| = 1$ und daher gilt:

$$\begin{aligned}(g * f)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} g(t) f(x - t)\, d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}^n} g \circ \Phi(s) \cdot f(x - \Phi(s)) \cdot J_\Phi(s)\, d\lambda(s) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(x - s) \cdot f(s)\, d\lambda(s) = (f * g)(x).\end{aligned}$$

Es ist also

$$[f] * [g] = [g] * [f], \quad \forall [f], [g] \in \mathfrak{L}^1(\lambda).$$

(iv) Seien nun $f, g, h \in \mathfrak{L}^1(\lambda)$. Wir betrachten jetzt mal die Funktion $\alpha\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\alpha(x, u, v) = h(u) g(v) f(x - u - v).$$

Dann argumentiert man wie unter (a), dass α messbar und sogar integrierbar bzgl. $\lambda \otimes \lambda \otimes \lambda$ ist mit

$$\|\alpha\|_1 = \int_{\mathbb{R}^{3n}} |\alpha|\, d(\lambda \otimes \lambda \otimes \lambda) = \|h\|_1 \cdot \|g\|_1 \cdot \|f\|_1 < \infty.$$

Deshalb ist nun der Schnitt

$$\alpha_x\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ (u, v) \mapsto h(u) g(v) f(x - u - v)$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ integrierbar. Wir nennen die Nullmenge, wo $\|\alpha_x\|_1 = \infty$ ist, N und betrachten ein $x \in \mathbb{R}^n \setminus N$. Zu diesem x betrachten wir nun weiter den affinen Diffeomorphismus $\Phi\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, gegeben durch

$$(u, v) = \Phi(s, t) = (x - s - t, t).$$

Dann ist

$$D\Phi(s, t) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und daher

$$J_\Phi(s, t) = |\det D\Phi(s, t)| = 1,$$

für alle $(s, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Nun erhalten wir mit Fubini einerseits:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{2n}} \alpha_x\, d(\lambda \otimes \lambda) &= \int_{\mathbb{R}^n} h(u) (\int_{\mathbb{R}^n} g(v) f(x - u - v)\, d\lambda(v))\, d\lambda(u) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} h(u) \cdot (g * f)(x - u)\, d\lambda(u) = (h * (g * f))(x).\end{aligned}$$

(x ist also auch ein Punkt, wo $h * (g * f)$ durch das Faltungsintegral gegeben ist.) Andererseits ist mit der Transformtionsformel nun auch $\alpha_x \circ \Phi \cdot J_\Phi\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrierbar und erneut mit Fubini erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{2n}} \alpha_x \, d(\lambda \otimes \lambda) &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} (\alpha_x \circ \Phi) \cdot J_\Phi(s,t) \, d\lambda(s) d\lambda(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}^{2n}} h(x-s-t) g(t) f(s) \, d\lambda(s) d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(s) \Big(\int_{\mathbb{R}^n} g(t) h(x-s-t) \, d\lambda(t) \Big) \, d\lambda(s) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(s) (g*h)(x-s) \, d\lambda(s) = (f*(g*h))(x)
\end{aligned}$$

(was zeigt, dass auch $f*(g*h)$ in solch einem x durch das Faltungsintegral gegeben ist). Nach Teil (iii) ist dann also

$$(f*(g*h))(x) = (h*(g*f))(x) = ((f*g)*h)(x),$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ und daher schließlich für alle $[f],[g],[h] \in L^1(\lambda)$:

$$[f]*([g]*[h]) = ([f]*[g])*[h].$$

[**Anmerkung.** Die Faltung von f und g in einem (generischen) Punkt $x \in \mathbb{R}^n$,

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t) g(x-t) \, d\lambda(t),$$

kann man als eine *Mittelung von* g um den Punkt x mit *den Gewichten* $f(t)$ ansehen. Hat etwa f einen Träger nur in einer ε-Kugel um 0 (d.h.: $f(t) = 0$ für $|t| > \varepsilon$), so mittelt $(f*g)(x)$ die Werte von g in einer ε-Kugel um x (mit den Gewichten $f(t)$). Auf diese Weise kann ein $g \in \mathfrak{L}^p(\lambda)$ $(1 \le p < \infty)$ durch ein $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ (eine $\mathcal{C}^\infty$-Funktion mit kompaktem Träger) auch *geglättet* werden und wenn f_ε Träger in $B_\varepsilon(0)$ hat, so ist $f_\varepsilon * g$ nicht nur *glatt* (d.h. $\mathcal{C}^\infty$) sondern konvergiert (bei geschickter Wahl) für $\varepsilon \to 0$ auch noch in der L^p-Norm gegen g. Das zeigt, dass $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$ liegt. Da auch $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ dicht liegt, also sogar $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$ ist, ist damit $L^p(\mathbb{R}^n)$ die Vervollständigung von $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ bzgl. der L^p-Norm, so wie $\mathbb{R}$ die Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ bzgl. $|\cdot|$ ist.]

Für die folgenden drei Aufgaben benutzen wir folgenden Satz aus der Funktionalanalysis:

Satz (von Stone-Weierstraß). Sei (K,d) ein kompakter metrischer Raum und $(\mathcal{C}(K,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ die Banach-Algebra der stetigen Funktionen auf K (siehe auch Aufgabe 35.b, Analysis-II). Sei weiter $A \subseteq \mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ eine Unteralgebra, so dass

- für jedes $x \in K$ ein $f \in A$ mit $f(x) \neq 0$ existiert und
- für jedes Paar $(x,y) \in K \times K$ mit $x \neq y$ ein $g \in A$ existiert mit $g(x) \neq g(y)$.

Dann liegt A dicht in $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$.

Aufgabe 42. Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und $f\colon K \to \mathbb{R}^m$ stetig $(m,n \in \mathbb{N})$. Zeigen Sie, dass es eine Folge (P_k) stetig differenzierbarer Funktionen $P_k\colon K \to \mathbb{R}^m$ $(k \in \mathbb{N})$ gibt, die gleichmäßig gegen f konvergiert. (Hinweis: Versuchen Sie es mit polynomialen Abbildungen.)

Lösungsvorschlag. (i) Wir betrachten die *polynomialen Abbildungen auf K*, d.i.

$$A := \{f \in \mathcal{C}(K,\mathbb{R}) : \ \exists p \in \mathbb{R}[T_1,\dots,T_n] : \ f(x) = p(x), \ \forall x \in K\}.$$

Das ist zunächst einmal eine Unteralgebra von $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$, denn $\mathbb{R}[T_1,\dots,T_n]$ ist selbst eine $\mathbb{R}$-Algebra, die auf diese Weise homomorph auf A abgebildet wird. Die konstante Funktion $h = 1$ liegt offenbar in A, und A *trennt auch Punkte*, wie man sagt, d.h.: Sind $x, y \in K$ mit $x \neq y$, so gibt es zunächst mal ein $j_0 \in \{1,\dots,n\}$ mit $x_{j_0} \neq y_{j_0}$. Die Projektion $\pi_{j_0}: K \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x_{j_0}$, liegt in A und es ist

$$\pi_{j_0}(x) = x_{j_0} \neq y_{j_0} = \pi_{j_0}(y).$$

Deshalb sind die Voraussetzungen des Satzes von Stone-Weierstraß erfüllt und damit liegt A dicht in $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$. D.h.: Für jedes stetige $f: K \to \mathbb{R}$ gibt es eine Folge (p_k) in A mit $(p_k) \to f$ in der Supremumsnorm, d.i.: (p_k) konvergiert gleichmäßig gegen f.

(ii) Ist nun $f: K \to \mathbb{R}^m$ stetig (aber vektorwertig), so wendet man dieses Resultat auf die Komponenten $f_i: K \to \mathbb{R}$ $(i = 1,\dots,m)$ an. Es gibt also Folgen $(p_{ik})_{k\in\mathbb{N}}$, so dass $(p_{ik})_k$ gleichmäßig gegen f_i konvergiert (für $i = 1,\dots,m$). Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es also $k_i \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \geq k_i$ und alle $x \in K$ gilt:

$$|p_{ik}(x) - f_i(x)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}.$$

Wir setzen nun

$$p_k: K \to \mathbb{R}^m, \ p_k = (p_{1k},\dots,p_{mk}).$$

Dann gilt für alle $k \geq k_0 := \max_{i=1}^m k_i$ und $x \in K$:

$$\|p_k(x) - f(x)\|^2 = \sum_{i=1}^m (p_{ik}(x) - f_i(x))^2 < \sum_{i=1}^m \frac{\varepsilon^2}{m} = \varepsilon^2.$$

Das zeigt, dass (p_k) gleichmäßig gegen f konvergiert.

Aufgabe 43. Sei $F: \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld $(n \in \mathbb{N})$.

(a) Zeigen Sie, dass es eine Folge (Q_k) stetig differenzierbarer Vektorfelder auf $\mathbb{S}^{n-1}$ gibt, die gleichmäßig gegen F konvergiert.

(b) (Igelsatz) Sei nun n ungerade. Zeigen Sie, dass F eine Nullstelle hat.

Lösungsvorschlag. (a) Wir können $F: \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ zunächst nach Aufgabe 42 durch eine Folge $(P_k: \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n)_k$ stetig differenzierbarer Abbildungen gleichmäßig approximieren, denn $\mathbb{S}^{n-1}$ ist kompakt. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $k_0 = k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \geq k_0$ und $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ gilt:

$$\|P_k(x) - F(x)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nun sind die Abbildungen P_k $(k \in \mathbb{N})$ i.a. keine Vektorfelder auf $\mathbb{S}^{n-1}$. Deshalb ziehen wir von $P_k(x) \in \mathbb{R}^n$ *die radiale Komponente* ab und setzen also $Q_k: \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$,

$$Q_k(x) = P_k(x) - \langle P_k(x), x\rangle \cdot x$$

(wo $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das kanonische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ bezeichne). Die Abbildungen Q_k $(k \in \mathbb{N})$ sind dann auch stetig differenzierbar und sie sind nun auch Vektorfelder auf $\mathbb{S}^{n-1}$, denn für alle $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ ist

$$\langle Q_k(x), x\rangle = \langle P_k(x), x\rangle - \langle\langle P_k(x), x\rangle \cdot x, x\rangle = \langle P_k(x), x\rangle - \langle P_k(x), x\rangle \cdot \|x\|^2 = 0,$$

denn $\|x\|^2 = 1$ für $x \in \mathbb{S}^{n-1}$. Und auch (Q_k) konvergiert gleichmäßig gegen f, denn zu $\varepsilon > 0$ und dem $k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ von oben gilt nun wegen $\langle F(x), x\rangle = 0$ für alle $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ und $k \geq k_0$:

$$\begin{aligned}\|Q_k(x) - F(x)\| &= \|(P_k(x) - \langle P_k(x), x\rangle x) - F(x)\| \leq \|P_k(x) - F(x)\| + \|\langle P_k(x), x\rangle x\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + |\langle P_k(x), x\rangle| \cdot \|x\| = \frac{\varepsilon}{2} + |\langle P_k(x) - F(x), x\rangle| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \|P_k(x) - F(x)\| \cdot \|x\|\end{aligned}$$

nach Cauchy-Schwarz und daher tatsächlich wegen $\|x\| = 1$:

$$\|Q_k(x) - F(x)\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot 1 = \varepsilon,$$

für alle $k \geq k_0$ und für alle $x \in \mathbb{S}^{n-1}$.

(b) Wir beweisen zunächst ein kleines

Lemma. Sei X ein metrischer Raum und $(f_k \colon X \to \mathbb{R})_k$ eine Folge stetiger Funktionen, die gleichmäßig gegen ein (dann auch stetiges) $f \colon X \to \mathbb{R}$ konvergiert, $(f_k) \xrightarrow{\text{glm.}} f$. Sei weiter $a \in X$ und $(x_k)_k$ eine Folge in X mit $(x_k) \to a$. Dann konvergiert auch die Folge $(f_k(x_k))$ in $\mathbb{R}$ und es gilt:

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x_k) = f(a).$$

Denn: Ist $\varepsilon > 0$, so wählen wir einerseits ein $k_1 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \geq k_1$ und allen $x \in X$

$$|f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Andererseits können wir wegen der Stetigkeit von f in a ein $\delta > 0$ finden, so dass für alle $x \in X$ mit $d(x, a) < \delta$ (wo d die Metrik auf X bezeichne) gilt:

$$|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Schließlich gibt es wegen $(x_k) \to a$ ein $k_2 \in \mathbb{N}$, so dass für $k \geq k_2$ gilt: $d(x_k, a) < \delta$. Für alle $k \geq k_0 := \max\{k_1, k_2\}$ ist dann

$$|f_k(x_k) - f(a)| \leq |f_k(x_k) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

also

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x_k) = f(a).$$

□

Hieraus folgt nun der Igelsatz, den wir für stetig differenzierbare Vektorfelder $Q \colon \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ schon in der Vorlesung bewiesen haben, auch für beliebige stetige Vektorfelder $F \colon \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$. Sei dazu also nun n ungerade.

Wir approximieren nämlich F zunächst gleichmäßig durch stetig differenzierbare Vektorfelder Q_k ($k \in \mathbb{N}$). Diese haben dann jeweils eine Nullstelle $x_k \in \mathbb{S}^{n-1}$. Da $\mathbb{S}^{n-1}$ kompakt ist, hat die Folge (x_k) einen Häufungspunkt $a \in \mathbb{S}^{n-1}$. Nach Übergang zu einer Teilfolge von (x_k) dürfen wir annehmen, dass (x_k) gegen a konvergiert. Dann können wir das Lemma (mit der auf $\mathbb{S}^{n-1}$ induzierten Metrik) anwenden und erhalten:

$$F(a) = \lim_{k\to\infty} Q_k(x_k) = \lim_{k\to\infty} 0 = 0.$$

Aufgabe 44. (a) (Brouwers Fixpunktsatz) Sei $f: \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ stetig ($n \in \mathbb{N}$). Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt hat. (Hinweis: Approximieren Sie f mit stetig differenzierbaren Abbildungen $g_k: \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}^n$ und skalieren Sie geschickt um, so dass $g_k(\mathbb{B}^n) \subseteq \mathbb{B}^n$ ist.)

(b) (Retraktionssatz) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass es keine Retraktion $r: \mathbb{B}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ (also r stetig mit $r \circ i = \mathrm{id}$, wo $i: \mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{B}^n$ die Inklusion ist) gibt. (Hinweis: Bauen Sie aus einer angenommenen Retraktion r ein fixpunktfreies $f: \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$.)

Lösungsvorschlag. (a) Wir approximieren auch hier unser stetiges $f: B \to B$ ($B := \mathbb{B}^n$) gleichmäßig durch stetig differenzierbare $g_k: B \to \mathbb{R}^n$ ($k \in \mathbb{N}$). Nun bildet i.a. aber g_k die Einheitskugel B nicht wieder in B ab, sondern in eine evtl. (etwas) größere Kugel mit Radius

$$r_k = \|g_k\|_\infty = \sup_{x \in B} \|g_k(x)\| < \infty,$$

da B kompakt ist. Um nun f auch gleichmäßig durch stetig differenzierbare $h_k: B \to B$ zu approximieren, *skalieren wir g_k um*, wie man sagt, d.h.; wir setzen $h_k: B \to B$,

$$h_k := \rho_k g_k,$$

mit (Skalierungs-) Faktoren $\rho_k > 0$ ($k \in \mathbb{N}$). Wenn $\|g_k\|_\infty \leq 1$ ist, brauchen wir nichts zu machen (also $\rho_k := 1$ dann), ansonsten setzen wir $\rho_k := 1/\|g_k\|_\infty \leq 1$, also zusammen

$$\rho_k := \frac{1}{\max\{1, \|g_k\|_\infty\}} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Es ist dann natürlich auch h_k stetig differenzierbar und $h_k(B) \subseteq B$ ($k \in \mathbb{N}$), denn für alle $x \in B$ ist

$$\|h_k(x)\| = \frac{1}{\max\{1, \|g_k\|_\infty\}} \|g_k(x)\| \leq 1$$

nach Konstruktion. Man beachte auch noch, dass $(\rho_k) \to 1$ für $k \to \infty$ konvergiert, denn

$$\big|\|g_k\|_\infty - \|f\|_\infty\big| \leq \|g_k - f\|_\infty \longrightarrow 0,$$

also $(\|g_k\|_\infty) \to \|f\|_\infty$. Da $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \max\{1, t\}$, stetig und $\|f\|_\infty \leq 1$ ist, gilt in der Tat

$$\max\{1, \|g_k\|_\infty\} \longrightarrow \max\{1, \|f\|_\infty\} = 1.$$

Daraus sieht man jetzt, dass auch (h_k) gleichmäßig gegen f konvergiert, denn

$$\begin{aligned} \|h_k - f\|_\infty &\leq \|h_k - g_k\|_\infty + \|g_k - f\|_\infty = \|(\rho_k - 1) \cdot g_k\|_\infty + \|g_k - f\|_\infty \\ &= |\rho_k - 1| \cdot \|g_k\|_\infty + \|g_k - f\|_\infty \longrightarrow 0 \cdot \|f\|_\infty + 0 = 0. \end{aligned}$$

Mit unserem kleinen Lemma aus Aufgabe 43 sieht man daraus jetzt auch den Brouwerschen Fixpunktsatz für stetige Selbstabbildungen $f: B \to B$. Wir approximieren f gleichmäßig durch stetig differenzierbare $h_k: B \to B$ ($k \in \mathbb{N}$). Diese haben einen Fixpunkt $x_k \in B$ nach dem Satz aus der Vorlesung, und da B kompakt ist, können wir nach einem eventuellen Übergang zu einer Teilfolge annehmen, dass (x_k) gegen einen Punkt $a \in B$ konvergiert, $(x_k) \to a$. Wegen $h_k(x_k) = x_k$, für alle $k \in \mathbb{N}$, erhalten wir deshalb

$$f(a) = \lim_{k \to \infty} h_k(x_k) = \lim_{k \to \infty} x_k = a.$$

Also ist a Fixpunkt von f.

(b) Brouwers Fixpunktsatz und Retraktionssatz sind äquivalent. In der Vorlesung haben wir gesehen, warum der Retraktionssatz den Fixpunktsatz impliziert, denn der dortige Beweis funktioniert auch für den stetigen Fall. Die Umkehrung kann man so sehen: Wir nehmen (nach Teil (a)) an, dass der Fixpunktsatz gilt. Angenommen nun weiter, dass es eine Retraktion $r\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ gibt. Da $\mathbb{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{B}^n$ ist, ist dies auch eine Abbildung von $\mathbb{B}^n$ nach $\mathbb{B}^n$. Die inneren Punkte von $\mathbb{B}^n$, dort, wo $\|x\| < 1$ ist, können keine Fixpunkte von r sein, denn r bildet sie ja auf den Rand ab, $\|r(x)\| = 1$. Die Randpunkte, also dort, wo $\|x\| = 1$ ist, sind allerdings *alles* Fixpunkte von r, $r(x) = x$, für alle $x \in \mathbb{S}^{n-1}$. Deshalb schalten wir jetzt noch *die Antipodenabbildung* $d\colon \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$, $d(x) = -x$, dahinter, setzen also $f\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$, $f := d \circ r$. Das Argument dafür, dass r keine Fixpunkte im Inneren hat, bleibt dann auch für f erhalten, und die Randpunkte sind nun auch nicht mehr fix. Dieses f hat dann also keinen Fixpunkt. Widerspruch! Es gibt also keine (stetige) Retraktion $r\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$.

Aufgabe 45. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $s \in [0, \infty)$. Für jedes $\delta > 0$ und jede Teilmenge $A \subseteq X$ setzen wir

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s_\delta(A) \;&:=\; \inf\{\sum_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{diam}(C_k)^s \in [0,\infty] : \; (C_k)_k \text{ ist eine Überdeckung von } A \\ &\qquad \text{mit } \operatorname{diam}(C_k) < \delta,\ \forall k \in \mathbb{N}\}.\end{aligned}$$

($\operatorname{diam}(C) = \sup\{d(x,y) \in [0,\infty) : x, y \in C\} \in [0,\infty]$ bezeichnet hier *den Durchmesser von* $\emptyset \neq C \subseteq X$, $\operatorname{diam}(\emptyset)^s := 0\ \forall s \geq 0$.) Schließlich sei

$$\mathcal{H}^s(A) = \sup_{\delta>0} \mathcal{H}^s_\delta(A) \in [0,\infty].$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{H}^s$ ein äußeres Maß auf X ist. (Man nennt $\mathcal{H}^s$ (bis auf einen Faktor) *das s-dimensionale äußere Hausdorff-Maß auf X*.)

Lösungsvorschlag. (i) Zunächst zeigen wir (eigentlich genau so, wie in der Vorlesung), dass $\mathcal{H}^s_\delta\colon \mathfrak{P}(X) \to [0,\infty]$ für alle $s \geq 0$ und $\delta > 0$ ein äußeres Maß auf X ist.

(α) Man kann ja $\emptyset$ mit der Folge $(\emptyset)_{k\in\mathbb{N}}$ überdecken und $\operatorname{diam}^s(\emptyset) = 0$. Es folgt: $\mathcal{H}^s_\delta(\emptyset) = 0$, für alle $s \geq 0$, $\delta > 0$.

(β) Sei $A \subseteq B$. Zu zeigen ist dann: $\mathcal{H}^s_\delta(A) \leq \mathcal{H}^s_\delta(B)$. Das folgt daraus, dass jede δ-Überdeckung von B auch eine δ-Überdeckung von A ist. Bildet man das Infimum über eine größere Teilmenge $M \subseteq [0,\infty]$ als $N \subseteq [0,\infty]$, $M \supseteq N$, so ist natürlich $\inf M \leq \inf N$. Daher ist

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) \leq \mathcal{H}^s_\delta(B), \quad \forall s \geq 0, \forall \delta > 0.$$

(γ) Das macht man mit dem $\varepsilon/2^k$-Kniff: Ist $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ und $\varepsilon > 0$, so existieren δ-Überdeckungen $(C_{kj})_{j\in\mathbb{N}}$ von A_k mit

$$\sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{diam}(C_{kj})^s < \mathcal{H}^s_\delta(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Dann ist aber $(C_{kj})_{k,j\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare δ-Überdeckung von A und damit

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s_\delta(A) &\leq \sum_{j,k} \operatorname{diam}(C_{jk})^s = \sum_{k=1}^\infty (\sum_{j=1}^\infty \operatorname{diam}(C_{jk})^s) \\ &< \sum_{k=1}^\infty (\mathcal{H}^s_\delta(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}) = \sum_{k=1}^\infty \mathcal{H}^s_\delta(A_k) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Da dies für alle $\varepsilon > 0$ gilt, folgt tatsächlich

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) \leq \sum_{k=1}^\infty \mathcal{H}^s_\delta(A_k).$$

(ii) Nun machen wir noch den Grenzübergang $\delta \to 0$. Zunächst beobachten wir wieder, dass für $\delta_1 < \delta_2$ jede δ_1-Überdeckung auch eine δ_2-Überdeckung ist, woraus

$$\mathcal{H}^s_{\delta_1}(A) \geq \mathcal{H}^s_{\delta_2}(A)$$

folgt. Damit ist $(0,\infty) \to [0,\infty]$, $\delta \mapsto \mathcal{H}^s_\delta(A)$, monoton fallend und deshalb konvergiert $\mathcal{H}^s_\delta(A)$ für $\delta \to 0$ gegen $\mathcal{H}^s(A)$,

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A), \quad \mathcal{H}^s_\delta(A) \leq \mathcal{H}^s(A), \ \forall \delta > 0.$$

(α**)** Aus $\mathcal{H}^s_\delta(\emptyset) = 0$, für $\delta > 0$, folgt natürlich

$$\mathcal{H}^s(\emptyset) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^s_\delta(\emptyset) = \lim_{\delta\to 0}(0) = 0.$$

(β**)** Sei $A \subseteq B$. Wegen

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) \leq \mathcal{H}^s_\delta(B) \leq \mathcal{H}^s(B), \quad \forall \delta > 0,$$

folgt auch

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A) \leq \mathcal{H}^s(B).$$

(γ**)** Und auch bei $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ folgt aus

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) \leq \sum_{k=1}^\infty \mathcal{H}^s_\delta(A_k) \leq \sum_{k=1}^\infty \mathcal{H}^s(A_k), \quad \forall \delta > 0,$$

auch

$$\mathcal{H}^s(A) \leq \sum_{k=1} \infty \mathcal{H}^s(A_k).$$

[**Anmerkung.** Das (äußere) Hausdorff-Maß aus der Vorlesung, welches wir mit Kugelüberdeckungen konstruiert haben, wird in der Literatur (siehe z.B. H. Federer: Geometric Measure Theory) als *sphärisches Hausdorff-Maß* bezeichnet. Das eigentliche Hausdorff-Maß auf dem $\mathbb{R}^n$ ist dieses aus Aufgabe-45, welches mit beliebigen δ-Überdeckungen gebildet wird. Das s-dimensionale Volumen der Einheitskugel $\mathbb{B}^s \subseteq \mathbb{R}^s$ kann duch

$$\omega_s = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)}$$

ausgedrückt werden, wo $\Gamma\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ die Gamma-Funktion ist, die auf den natürlichen Zahlen $\Gamma(n) = (n-1)!$ $(n \in \mathbb{N})$ erfüllt. (Beachte auch: $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.) Deshalb ist der Ausdruck

$$\omega_s r^s = \lambda^s(B_r^s(0)) = \frac{\omega_s}{2^s}\mathrm{diam}(B_r^s(0))$$

für $r > 0$ und $s \in \mathbb{N}_0$ richtig, weshalb man das Maß aus Aufgabe-45 noch mit dem Fakor

$$\tau_s := \frac{\pi^{s/2}}{2^s\Gamma(\frac{s}{2}+1)}$$

skaliert (jetzt für jedes $s \geq 0$). Das ist dann das (äußere) s-dimensionale Hausdorff-Maß, welches man für jeden metrischen Raum bilden kann. Auf $X = \mathbb{R}^n$ und auf einer großen Teilmenge der Borelalgebra $\mathfrak{B}^n \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ (den so genannten s-rektifizierbaren Teilmengen) stimmt es mit dem aus der Vorlesung überein (siehe noch einmal Federers GMT).]

Aufgabe 46. Sei X ein metrischer Raum. Für jede Teilmenge $A \subseteq X$ definiert man *die Hausdorff-Dimension von* A durch

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) := \inf\{s \in [0,\infty) :\ \mathcal{H}^s(A) = 0\} \in [0,\infty].$$

Zeigen Sie für $0 \leq s < t$:

(i) $\mathcal{H}^s(A) < \infty \Rightarrow \mathcal{H}^t(A) = 0$

(ii) $\mathcal{H}^t(A) > 0 \Rightarrow \mathcal{H}^s(A) = \infty$

Folgern Sie daraus, dass für A (mit unendlich-vielen Elementen) auch gilt:

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) = \sup\{s \in [0,\infty) :\ \mathcal{H}^s(A) = \infty\}.$$

Lösungsvorschlag. (i) Sei also $s \geq 0$ und $\mathcal{H}^s(A) < \infty$. Für jedes $\delta > 0$ und jede δ-Überdeckung $(C_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von A ist dann

$$\sum_{j=1}^{\infty}\mathrm{diam}^t(C_j) = \sum_{j=1}^{\infty}\mathrm{diam}^{t-s}(C_j)\cdot\mathrm{diam}^s(C_j) < \delta^{t-s}\sum_{j=1}^{\infty}\mathrm{diam}^s(C_j).$$

Infimumbildung auf beiden Seiten impliziert dann

$$\mathcal{H}_\delta^t(A) \leq \delta^{t-s}\mathcal{H}_\delta^s(A), \quad \forall\delta > 0.$$

Grenzübergang für $\delta \to 0$ liefert schließlich:

$$\mathcal{H}^t(A) = \lim_{\delta\to 0}\mathcal{H}_\delta^t(A) \leq \lim_{\delta\to 0}(\delta^{t-s}\mathcal{H}_\delta^s(A)) = 0\cdot\mathcal{H}^s(A) = 0.$$

(ii) Das ist nur die Kontraposition zu (i).

Ist nun $t > \dim_{\mathcal{H}}(A) \in [0,\infty)$, so gibt es nach Definition von $\dim_{\mathcal{H}}(A)$ ein $s \in (0,\infty)$, mit $\dim_{\mathcal{H}}(A) < s < t$ und $\mathcal{H}^s(A) = 0$. Nach (i) folgt: $\mathcal{H}^t(A) = 0$.

Ist $s < \dim_{\mathcal{H}}(A) \in (0,\infty]$, so gibt es nach Definition von $\dim_{\mathcal{H}}(A)$ ein $t \in (0,\infty)$, mit

$s < t < \dim_{\mathcal{H}}(A)$ und $\mathcal{H}^t(A) > 0$. Nach (ii) folgt: $\mathcal{H}^s(A) = \infty$. Für $0 < \dim_{\mathcal{H}}(A) \leq \infty$ folgt damit also

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) = \sup\{s \in [0,\infty) : \ \mathcal{H}^s(A) = \infty\}.$$

Der Fall $\dim_{\mathcal{H}}(A) = 0$ ist ein bisschen speziell. $\mathcal{H}^0$ ist gerade das Zählmaß auf X, denn eine endliche Menge $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$ (mit $x_i \neq x_j$ für $i < j$) kann man mit $(\{x_1\}, \{x_2\}, \ldots, \{x_n\}, \emptyset, \emptyset, \ldots)$ überdecken, woraus schon mal (wegen $\operatorname{diam}^0(\emptyset) = 0$ und $0^0 = 1$) folgt:

$$\mathcal{H}^0(A) \leq n.$$

Aber da man für $\delta < \min_{i<j}(d(x_i, x_j))$ auch mindestens n Mengen mit Durchmesser höchstens δ braucht, um A zu überdecken, ist tatsächlich

$$\mathcal{H}^0(\{x_1, \ldots, x_n\}) = n.$$

Für unendliche Mengen A ist also wegen der Monotonie eines äußeren Maßes dann $\mathcal{H}^0(A) = \infty$ und daher gilt

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) = \sup\{s \in [0,\infty) : \ \mathcal{H}^s(A) = \infty\}$$

auch dann. (Definiert man in diesem Fall mal $\sup(\emptyset) := 0$ (wo man jetzt $\emptyset$ als Teilmenge von $[0,\infty)$ betrachtet), so gilt die Formel für alle Teilmengen $A \subseteq X$.)

Aufgabe 47. Sei $C \subseteq \mathbb{R}$ die Cantormenge (siehe Aufgabe 11) und $s := \ln 2 / \ln 3$. Zeigen Sie mit folgender Anleitung, dass $\dim_{\mathcal{H}}(C) = s$ ist.

(i) $\mathcal{H}^s(C) \leq 1$

(ii) Sei $\delta < \frac{1}{3}$ und $(J_i)_{i=1,\ldots,m}$ eine endliche Überdeckung von C aus offenen Intervallen mit $\operatorname{diam}(J_i) < \delta$, für alle $i = 1, \ldots, m$. Dann gilt

$$\frac{1}{2} \leq \sum_{i=1}^{m} \operatorname{diam}(J_i)^s$$

(iii) $\frac{1}{2} \leq \mathcal{H}^s(C)$

Lösungsvorschlag. (i) Man erinnere sich daran, dass die Cantormenge C der Durchschnitt von kompakten Teilmengen $C_k \subseteq [0,1]$ ist, die disjukte Vereinigung von 2^k paarweise disjunkten abgeschlossenen Intervallen $I_{k,j}$, $j = 1, \ldots, 2^k$, der Länge 3^{-k} ist,

$$C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k, \quad C_k = \bigcup_{j=1}^{2^k} I_{k,j}, \quad \operatorname{diam}(I_{k,j}) = 3^{-k}.$$

Sei nun $\delta > 0$ beliebig. Wir können dann $k \in \mathbb{N}$ so groß wählen, dass $3^{-k} < \delta$ ist. Sei $s := \ln(2)/\ln(3) = \log_3(2)$, also

$$3^s = 3^{\log_3(2)} = 2.$$

Wegen $C \subseteq C_k$, der Monotonie des Maßes und weil $(I_{k,j})_{j=1,\ldots,2^k}$ eine Überdeckung von C_k und damit von C ist, haben wir

$$\mathcal{H}^s_\delta(C) \leq \mathcal{H}^s_\delta(C_k) \leq \sum_{j=1}^{2^k} \operatorname{diam}^s(I_{k,j}) = 2^k \cdot (3^{-k})^s = 2^k \cdot (3^s)^{-k} = 2^k 2^{-k} = 1.$$

Es folgt:

$$\mathcal{H}^s(C) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(C) \leq 1.$$

(ii) (α) Behauptung: Ist $l \leq k$ und $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge mit $\mathrm{diam}(A) < 3^{-l}$, so schneidet A höchstens 2^{k-l} ntervalle aus der Familie $(I_{k,j})_{j=1,\ldots,2^k}$.

Denn: Nach Konstruktion der $I_{l,j}$ $(j = 1, \ldots, 2^l)$ ist der Abstand zweier verschiedener Intervalle $I_{l,p}$ und $I_{l,q}$ für $p \neq q$ mindestens 3^{-l}. Deshalb kann A dann höchstens eines dieser Intervalle schneiden, sagen wir I_{l,p_0}. Nun wird aber nach Konstruktion I_{l,p_0} von genau 2^{k-l} Intervallen der Familie $(I_{k,j})_{j=1,\ldots,2^k}$ geschnitten, woraus die Behauptung folgt.

(β) Sei nun also $(J_i)_{i=1,\ldots,m}$ mit $\mathrm{diam}(J_i) < \delta < 1/3$ (für alle i) gegeben. Für jedes $i \in \{1 \ldots, m\}$ gibt es dann (eindeutig bestimmt) ein $k(i) \in \mathbb{N}$ mit

$$3^{-(k(i)+1)} \leq \mathrm{diam}(J_i) < 3^{-k(i)}.$$

Wir setzen $k := \max_{i=1}^m k(i) \in \mathbb{N}$. Aus der Konstruktion von C folgt, dass jedes der Intervalle $I_{k,j}$ $(j = 1, \ldots, 2^k)$ die Cantormenge C schneidet. (Z.B. bleiben jeweils die Intervallgrenzen von $I_{k,j}$ stehen.) Da (J_i) eine Überdeckung von C ist, existiert damit für jedes $j \in \{1, \ldots, 2^k\}$ ein $i \in \{1, \ldots, m\}$ mit $I_{k,j} \cap J_i \neq \emptyset$. Andererseits schneidet J_i $(i = 1, \ldots, m)$ höchstens $2^{k-k(i)}$ der Intervalle $I_{k,j}$ $(j = 1, \ldots, 2^k)$. Daraus folgt nun:

$$2^k \leq \sum_{i=1}^m \sharp\{1 \leq j \leq 2^k : \; I_{k,j} \cap C_i \neq \emptyset\} \leq \sum_{i=1}^m 2^{k-k(i)},$$

also

$$\frac{1}{2} \leq \sum_{i=1}^m 2^{-(k(i)+1)}.$$

Damit ergibt sich dann wegen $3^s = 2$ tatsächlich

$$\sum_{i=1}^m \mathrm{diam}^s(J_i) \geq \sum_{i=1}^m 3^{-(k(i)+1)\cdot s} = \sum_{i=1}^m 2^{-(k(i)+1)} \geq \frac{1}{2}.$$

(iii) Sei $0 < \delta < \frac{1}{3}$. Wir betrachten jetzt eine beliebige δ-Überdeckung $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ der Cantormenge $C \subseteq [0, 1]$ und setzen

$$a_k := \inf(M_k), \quad b_k := \sup(M_k),$$

so dass also $M_k \subseteq [a_k, b_k]$ ist und

$$b_k - a_k = \mathrm{diam}(M_k) < \delta < \frac{1}{3}.$$

(O.E.: $M_k \neq \emptyset$, $\forall k$). Um Teil (b) anwenden zu können, vergrößern wir das Intervall $[a_k, b_k]$ kontrolliert zu einem offenen Intervall. Sei $\varepsilon > 0$. Dann verschieben wir (a_k, b_k) zunächst so, dass der Mittelpunkt in 0 liegt, skalieren dann mit dem Faktor

$$\rho_k := (1 + \frac{\varepsilon}{2^k})^{1/s}$$

hoch, und verschieben dann wieder zurück. Wir setzen also

$$J_k := \rho_k \left((a_k, b_k) - \frac{a_k + b_k}{2} \right) + \frac{a_k + b_k}{2}.$$

Dann ist J_k nun offen und

$$J_k \supseteq [a_k, b_k] \supseteq M_k$$

(für $k \in \mathbb{N}$) und $(J_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist daher auch eine (dieses Mal offene Intervall-) Überdeckung von C. Außerdem gilt für ihre Durchmesser

$$\operatorname{diam}(J_k) = (b_k - a_k)(1 + \frac{\varepsilon}{2^k})^{1/s} < \delta \cdot (1+\varepsilon)^{1/s} < \delta \cdot \frac{1}{3\delta} = \frac{1}{3},$$

wenn wir

$$0 < \varepsilon < \varepsilon_0 := (\frac{1}{3\delta})^s - 1 \quad (\text{bei } s = \log_3(2))$$

annehmen. Da C kompakt ist, existiert nun ein $m \in \mathbb{N}$, so dass schon $(J_k)_{k=1,\ldots,m}$ eine Überdeckung von C ist. Und für diese können wir nun Teil (b) anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \quad &\leq \quad \sum_{k=1}^{m} \operatorname{diam}^s(J_k) = \sum_{k=1}^{m} (b_k - a_k)^s \left[(1 + \frac{\varepsilon}{2^k})^{1/s} \right]^s \\ &= \quad \sum_{k=1}^{m} (b_k - a_k)^s + \sum_{k=1}^{m} \frac{\varepsilon}{2^k} (b_k - a_k)^s. \end{aligned}$$

Für den zweiten Summenden schätzen wir nun nur grob so ab:

$$(b_k - a_k)^s < (\frac{1}{3})^s = \frac{1}{2}.$$

Das ergibt dann

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \quad &\leq \quad \sum_{k=0}^{m} (b_k - a_k)^s + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k)^s + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \quad \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{diam}^s(M_k) + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Da dies für alle $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ gilt, folgt auch

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{diam}^s(M_k) \geq \frac{1}{2}$$

und damit auch durch Infimumsbildung

$$\mathcal{H}^s_\delta(C) \geq \frac{1}{2}, \quad \forall\, 0 < \delta < \frac{1}{3}.$$

Das impliziert, dass schließlich auch

$$\mathcal{H}^s(C) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(C) \geq \frac{1}{2}$$

ist.

Mit Aufgabe 46 folgt dann, dass $\dim_{\mathcal{H}}(C) = s = \log_3(2)$ ist.

Für die folgende Aufgabe betrachten wir komplex-wertige, messbare Funktionen $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, d.h.: Urbilder von offenen Mengen sind (Borel-) messbar. f heißt dann *integrierbar*, wenn

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx < \infty$$

ist. In diesem Fall sind $\mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrierbar und man setzt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx := \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{Re}(f)(x)\, dx + i \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{Im}(f)(x)\, dx \ \in \mathbb{C}.$$

Wir schreiben $\mathfrak{L}^1(\mathbb{R}^n) := \{f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} : f \text{ integrabel}\}$.

Aufgabe 48 (Fourier-Transformation). **(a)** Sei $f \in \mathfrak{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Begründen Sie, dass für jedes $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $x \mapsto f(x)\exp(-i\langle \xi, x\rangle)$ (mit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ dem kanonischen Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$) integrierbar ist. Man setzt daher $\hat{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$,

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle \xi, x\rangle}\, dx$$

und nennt dies *die Fourier-Transformierte von* f. Begründen Sie, dass $\hat{f}$ stetig und beschränkt ist mit

$$\|\hat{f}\|_\infty \le \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \|f\|_1.$$

(b) Seien $f, g \in \mathfrak{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie:

$$(f * g)\hat{} = (2\pi)^{n/2} \hat{f} \cdot \hat{g}.$$

(c) Seien $f, g \in \mathfrak{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass $\hat{f}g$ und $f\hat{g}$ integrierbar sind und es gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)\, dx.$$

Lösungsvorschlag. **(a)** Es ist

$$|f(x)e^{-i\langle \xi, x\rangle}| = |f(x)|$$

und damit

$$\int |f(x)e^{-i\langle \xi, x\rangle}|\, dx = \int |f(x)|\, dx = \|f\|_1 < \infty,$$

also ist $x \mapsto f(x)\exp(-i\langle \xi, x\rangle)$ für jedes $\xi \in \mathbb{R}^n$ integrierbar. Da diese Funktion (bei festem $x \in \mathbb{R}^n$) stetig von ξ abhängt, folgt aus dem Satz aus der Vorlesung über parameterabhängige Integrale, dass $\hat{f}$ tatsächlich stetig ist. Schließlich ist

$$|\hat{f}(\xi)| \le \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int |f(x)e^{-i\langle \xi, x\rangle}|\, dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int |f(x)|\, dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \|f\|_1$$

und damit auch

$$\|\hat{f}\|_\infty = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)| \le \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\|f\|_1.$$

(Die L^∞-Norm stimmt für stetige Funktionen mit der sup-Norm überein.)

(b) Für jedes $\xi \in \mathbb{R}^n$ ist mit dem Satz von Fubini und der Substitution $x = y + t$ (bei festem $t \in \mathbb{R}^n$)

$$\begin{aligned}
(f * g)\hat{}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int (f*g)(x)e^{-i\langle\xi,x\rangle}\,dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int (\int f(t)g(x-t)\,dt)e^{-i\langle\xi,x\rangle}\,dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int f(t)(\int g(x-t)e^{-i\langle\xi,x\rangle}\,dx)\,dt = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int f(t)(\int g(y)e^{-i\langle\xi,y+t\rangle}\,dx)\,dt \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int f(t)(\int g(y)e^{-i\langle\xi,y\rangle}\,dy)e^{-i\langle\xi,t\rangle}\,dt = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int f(t)[(2\pi)^{n/2}\hat{g}(\xi)]e^{-i\langle\xi,t\rangle}\,dt \\
&= \hat{g}(\xi)\int f(t)e^{-i\langle\xi,t\rangle}\,dt = (2\pi)^{n/2}\hat{g}(\xi)\hat{f}(\xi).
\end{aligned}$$

(c) Da $\hat{f}$ beschränkt und g integrierbar ist, ist $\hat{f}\cdot g$ integrierbar und ähnlich ist auch $f\cdot\hat{g}$ integrierbar. Dann rechnen wir wieder mit Fubini:

$$\begin{aligned}
\int \hat{f}(x)g(x)\,dx &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int (\int f(y)e^{-i\langle x,y\rangle}\,dy)g(x)\,dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int f(y)(\int g(x)e^{-i\langle y,x\rangle}\,dx)\,dy = \int f(y)\cdot\hat{g}(y)\,dy.
\end{aligned}$$

[**Anmerkung.** Die Fourier-Transformation ordnet einer integrierbaren Funktion f eine neue Funktion $\hat{f}$ von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{C}$ zu. Ist $\hat{f}$ selbst auch wieder integrierbar, so kann man $\hat{f}$ die so genannte *inverse Fourier-Transformierte* zuordnen, die sich von der Fouriertransformation nur dadurch unterscheidet, dass vor dem Skalarprodukt im Exponentialterm ein Plus statt einem Minus steht. Man nennt sie invers, weil man zeigen kann (siehe z.B. O. Forster: Analysis III), dass man dann fast-überall f zurückerhält,

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \hat{f}(\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle}\,d\xi \ \text{ f.ü.}$$

Das zeigt, dass f fast-überall durch $\hat{f}$ bestimmt ist und löst in gewisser Weise die Aufgabe, f als Superposition (man könnte auch sagen als „überabzählbare Linearkombination“) der einfachen Funktionen (so genannte *ebene Wellen*) $x \mapsto e^{i\langle\xi,x\rangle}$ ($\xi \in \mathbb{R}^n$) darzustellen (vgl. auch die Motivation bei der Darstellung von periodischen Funktionen durch eine Fourier-Reihe (siehe z.B. Aufgabe 31, Analysis-II)). Die *Fourier-Koeffizienten* dieser Superposition sind dann gerade (bis auf einen Faktor) die Werte der Fourier-Transformierten von f.

Ist f in $\mathfrak{L}^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathfrak{L}^2(\mathbb{R}^n)$, so liegt $\hat{f}$ selbst auch wieder in $\mathfrak{L}^2(\mathbb{R}^n)$ und die Transformation ist dann sogar längenerhaltend, $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$. Geht man zu den Klassen modulo Werte auf Nullmengen über, so setzt sich, wegen der Dichtheit von $L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n)$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ (siehe meine Anmerkung zu Aufgabe 41) und der Vollständigkeit von L^2, die Transformation eindeutig zu einer linearen Abbildung $\mathcal{F}\colon L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ fort, die eine *Isometrie* des Hilbertraumes $L^2(\mathbb{R}^n)$ ist, also ein Isomorphismus mit

$$\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \|f\|_2, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

(Satz von Plancherel (siehe z.B. wieder Forsters Analysis-III)). Nicht nur in der Mathematischen Physik, aber zum Beispiel dort, kann man Probleme für Funktionen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{C}$, z.B. das Lösen von (partiellen) Differentialgleichungen, durch den Wechsel zur Fourier-Transformierten, sozusagen *im Fourier-Bild*, lösen, und dann die Lösung dort wieder „Fourier-zurück-transformieren“. Z.B. übersetzt sich das Differenzieren in solchen Differentialgleichungen im Fourierbild in algebraische Operationen, wodurch das Problem dann oft leichter lösbar wird. Die Fourier-Transformation ist daher ein mächtiges Hilfsmittel beim Studium von Funktionen.]

Aufgabe 49. (a) Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}_+$, $y = f(x)$, stetig differenzierbar und $M \subseteq \mathbb{R}^3$ der Rotationskörper, der entsteht, wenn man den Graphen von f um die x-Achse rotieren lässt,

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; y^2 + z^2 = f(x)^2\}.$$

Begründen Sie, dass $M \subseteq \mathbb{R}^3$ Borelsch und ihr Flächeninhalt gegeben ist durch

$$\mathcal{H}^2(M) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

(b) Sei $K \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Kreiskegel mit einem Grundflächenradius $r > 0$ und einer Mantellinienlänge $s > 0$. Zeigen Sie dass der Oberflächeninhalt von K (ohne Grundfläche) gegeben ist durch

$$\mathcal{H}^2(K) = \pi r s.$$

Lösungsvorschlag. (a) M ist als abgeschlossene Teilmenge von $[a,b] \times \mathbb{R}^2$ sicher Borelsch. Wir betrachten nun $G := (a,b) \times (0, 2\pi)$ und $\varphi\colon G \to \mathbb{R}^3$,

$$\varphi(s,t) = (s, f(s)\cos t, f(s)\sin t).$$

Dann ist φ injektiv (weil für festes $x = s$ durch t gerade ein Kreis (ohne den Punkt $(s, f(s), 0)$) parametrisiert wird), $\varphi(G) \subseteq M$ und $M \setminus \varphi(G)$ besteht aus nur zwei *Breitenkreisen*

$$\{(x,y,z) \in M : \; x = a \text{ oder } x = b\}$$

und einem *Meridian*

$$\{(x,y,z) \in M : \; z = 0 \text{ und } y > 0\}$$

(der *Profilkurve*), die aber allesamt $\mathcal{H}^2$-Nullmengen in $\mathbb{R}^3$ sind. (Das kann man auch mit der Flächenformel sehen und lassen wir hier mal weg.) Um zu sehen, dass φ *eine Immersion* ist, d.h., dass $D\varphi(s,t)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ injektiv ist, für alle $(s,t) \in G$, berechnen wir die Jacobische $J_\varphi\colon G \to [0,\infty)$,

$$J_\varphi(s,t) = \sqrt{\det(D\varphi^T(s,t) D\varphi(s,t))}.$$

Sie ist immer größer oder gleich Null und echt größer Null genau, wenn φ Immersion ist. Daraus folgt dann, dass φ eine reguläre Parametrisierung von $M \setminus C$ ist, wo $C \subseteq M$ eine $\mathcal{H}^2$-Nullmenge ist, und wir können sie dann via der Flächenformel für die Berechnung des Oberflächeninhaltes der Rotationsfläche M benutzen. Zunächst ist dafür

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s,t) &= (1, f'(s)\cos t, f'(s)\sin t), \\
\frac{\partial \varphi}{\partial t}(s,t) &= (0, -f(s)\sin t, f(s)\cos t).
\end{aligned}$$

Daraus folgt dann für

$$\begin{aligned} D\varphi^T D\varphi(s,t) &=: g(s,t) = (g_{ij}(s,t))_{i,j=1,2}, \\ g_{ij}(s,t) &= \langle \frac{\partial\varphi}{\partial s_i}, \frac{\partial\varphi}{\partial s_j}\rangle(s,t) \end{aligned}$$

(mit $s_1 := s$ und $s_2 := t$):

$$\begin{aligned} g_{11}(s,t) &= \|\frac{\partial\varphi}{\partial s}(s,t)\|^2 = 1 + f'(s)^2, \\ g_{21}(s,t) &= g_{12}(s,t) = \langle \frac{\partial\varphi}{\partial s}, \frac{\partial\varphi}{\partial t}\rangle(s,t) = 0; \\ g_{22}(s,t) &= \|\frac{\partial\varphi}{\partial t}(s,t)\|^2 = f(s)^2. \end{aligned}$$

Das ergibt schließlich

$$J_\varphi(s,t) = \sqrt{\det g(s,t)} = \sqrt{(1+f'(s)^2)f(s)^2},$$

und da $f(s) > 0$ ist:

$$J_\varphi(s,t) = f(s)\sqrt{1+f'(s)^2} > 0, \quad \forall\ (s,t) \in G.$$

Die Flächenformel liefert dann

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^2(M) &= \int_G J_\varphi(s,t)\, dsdt = (\int_0^{2\pi} 1\, dt)(\int_a^b f(s)\sqrt{1+f'(s)^2}\, ds \\ &= 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\, dx. \end{aligned}$$

(b) Für den Kreiskegel mit Grundflächenradius $r > 0$ und Höhe $h > 0$ betrachten wir $f\colon [0,h] \to [0,\infty)$,

$$f(x) = \frac{r}{h}x.$$

Es ist dann K die Rotationsfläche, die sich daraus gemäß Teil (a) ergibt. (Wir ignorieren wieder die Spitze und den Grundkreis von K bei der Flächenberechnung. Beachte, dass $f|(0,h) > 0$ ist, was für das Argument in (a) auch reicht.) Nun ist

$$f(x)\sqrt{1+f'(x)^2} = (\frac{r}{h}x)\sqrt{1+\frac{r^2}{h^2}}$$

und damit

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^2(K) &= 2\pi\frac{r}{h}\sqrt{1+\frac{r^2}{h^2}}\int_0^h x\, dx = 2\pi\frac{r}{h}\sqrt{1+\frac{r^2}{h^2}}\cdot\frac{1}{2}h^2 \\ &= \pi r h\sqrt{1+\frac{r^2}{h^2}} = \pi r\sqrt{h^2+r^2}. \end{aligned}$$

Für die Mantellinienlänge (dem Abstand von Kegelspitze zum Boden) ist aber nach Pythagoras gerade $s = \sqrt{h^2+r^2}$, also gilt tatsächlich:

$$\mathcal{H}^2(K) = \pi r s.$$

[**Anmerkung.** Der Kegel ist eine so genannte *abwickelbare Fläche*, d.h. hier anschaulich, dass man ihn (nach Aufschneiden entlang einer Mantellinie) längentreu in die Ebene „abwickeln“ kann. Der Flächeninhalt ändert sich dabei nicht. So argumentiert man (wenn man es überhaupt macht) in der Schule. Die abgewickelte Fläche ist dann ein *Scheibensektor* vom Radius s und Umfang $2\pi r$ des äußeren begrenzenden Kreisbogens. Der Flächeninhalt ist deshalb

$$A = (\text{Radius}) \cdot \frac{\text{Umfang}}{2} = s \cdot \frac{2\pi r}{2} = \pi r s.$$

Das ist eine elementargeometrische Überlegung, die hier auch zum Ziel führt.]

Aufgabe 50. (a) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Gebiet ($n \in \mathbb{N}$) und $f\colon G \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Sei weiter $B \subseteq G$ Borelsch und $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ der Graph von $f|B$,

$$\Gamma = \{(x,y) \in B \times \mathbb{R} :\ y = f(x)\}.$$

Begründen Sie, warum auch $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ Borelsch ist und für seinen n-dimensionalen Flächeninhalt gilt:

$$\mathcal{H}^n(\Gamma) = \int_B \sqrt{1 + \|\mathrm{grad}(f)(x)\|^2}\, dx.$$

(Hinweis: Für Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}(n,s)$ (mit $1 \le s \le n$) gilt:

$$\det(A^T \cdot B) = \sum_{i_1 < \cdots < i_s} \det(A_{i_1 \dots i_s}) \det(B_{i_1 \dots i_s}),$$

wo $A_{i_1 \dots i_s}$ die $s \times s$-Matrix ist, die aus den Zeilen $i_1, \dots, i_s$ von A besteht.)

(b) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ *das hyperbolische Paraboloid*,

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ z = x^2 - y^2\},$$

und $R > 0$. Berechnen Sie den Flächeninhalt von $M \cap (B^2_R(0) \times \mathbb{R})$, wo $B^2_R(0) \subseteq \mathbb{R}^2$ die Kreisscheibe vom Radius R mit Mittelpunkt 0 in $\mathbb{R}^2$ bezeichnet.

Lösungsvorschlag. (a) Der Graph $\Gamma_B \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ von $f|B$ ist als Durchschnitt der in $G \times \mathbb{R}$ abgeschlossenenen Menge des vollen Graphen Γ_G von f und der Borelmenge $B \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ sicher auch Borelsch. Wir können nun Γ_G so parametrisieren:

$$\varphi\colon G \to \Gamma_G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}, \quad x \mapsto (x, f(x)).$$

Dann ist φ offenbar stetig differenzierbar und injektiv. Es bleibt zu zeigen, dass φ auch immersiv ist. Dazu zeigen wir, dass die Jacobische $J_\varphi\colon G \to [0,\infty)$ überall positiv ist. Zunächst ist

$$D\varphi(x) = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n \\ \mathrm{grad} f(x) \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(n+1, n).$$

Für die Gramsche Determinante erhält man mit der Determinantenformel aus dem Hinweis

$$\det(D\varphi^t D\varphi(x)) = 1 + \sum_{j=1}^n \left((-1)^{n-j} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right)^2,$$

weil man bei Streichung der j. Zeile ($j = 1, \ldots, n$) noch $n - j$ Vertauschungen der $(n+1)$. Zeile mit der jeweils darüberliegenden Zeile machen muss. (Egal: Wir nehmen eh das Quadrat davon.) Es ist also

$$\begin{aligned} J_\varphi(x) &= \sqrt{\det(D\varphi^t D\varphi(x))} = \left(1 + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)^2\right)^{1/2} \\ &= (1 + \|\mathrm{grad} f(x)\|^2)^{1/2} > 0, \quad \forall\, x \in G. \end{aligned}$$

Also ist φ eine reguläre Parametrisierung von Γ_G und daher gilt nach der Flächenformel für $\Gamma = \Gamma_B = \mathrm{im}(\varphi|B)$:

$$\mathcal{H}^n(\Gamma) = \int_B J_\varphi(x)\, dx = \int_B \sqrt{1 + \|\mathrm{grad} f(x)\|^2}\, dx.$$

(b) Das ist offenbar ein Beispiel für Teil (a) mit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 - y^2$, und $B = B_R^2(0)$. In diesem Fall ist

$$\mathrm{grad} f(x,y) = (2x, -2y),$$

also

$$1 + \|\mathrm{grad} f(x,y)\|^2 = 1 + 4x^2 + 4y^2.$$

Mit Polarkoordinaten $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$ und

$$dxdy = rdrd\vartheta$$

erhalten wir:

$$A := \mathcal{H}^2(M \cap (B_R^2(0) \times \mathbb{R})) = \int_0^R \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 4r^2} \cdot rdrd\vartheta.$$

Wegen

$$\frac{d}{dr}(1 + 4r^2)^{3/2} = \frac{3}{2}(1 + 4r^2)^{1/2} \cdot 8r = 12r(1 + 4r^2)^{1/2}$$

erhalten wir mit dem Hauptsatz

$$A = (\int_0^{2\pi} d\vartheta) \cdot \int_0^R \frac{1}{12} \frac{d}{dr}(1 + 4r^2)^{3/2}\, dr = \frac{2\pi}{12}(1 + 4r^2)^{3/2}|_0^R = \frac{\pi}{6}(\sqrt{(1 + 4R^2)^3} - 1).$$

Aufgabe 51. (a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\psi\colon \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^{n-1}$ ($N = (0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{S}^{n-1}$ *der Nordpol*) die so genannte *stereographische Projektion*, d.h.: Die Gerade, die durch N und $x \in \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{N\}$ geht, schneidet die Hyperebne $E = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = -1\}$ im Punkt $(\psi(x), -1)$. Begründen Sie, dass ψ bijektiv und $\varphi := \psi^{-1}\colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{N\} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine reguläre Parametrisierung ist.

(b) (Zwiebelsatz) Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ messbar und $S^{n-1}(r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = r\}$ für $r > 0$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}_+} (\int_{S^{n-1}(r)} f(x)\, d\mathcal{H}^{n-1}(x))\, dr.$$

(Hinweis: Zeigen Sie, dass mit (dem Inversen) der stereographischen Projektion $\varphi\colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{N\}$ die Abbildung $\Phi\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$, $(r, x) \mapsto r\varphi(x)$, ein Diffeomorphismus auf sein Bild ist, und verwenden Sie, dann Transformations- und Flächenformel sowie Tonelli.)

Lösungsvorschlag. (a) Die gerade $L_x \subseteq \mathbb{R}^n$, die durch N und $x \in \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{N\}$ geht, parametrisieren wir durch $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$,

$$g(t) = (1-t)N + tx,$$

und berechnen den Punkt $(\psi(x), -1) \in E$, wo diese E schneidet, durch die Bedingung $g_n(t_0) = -1$, also

$$(1-t_0) \cdot 1 + t_0 x_n = g_n(t_0) = -1$$

und damit zu

$$t_0 = \frac{2}{1-x_n}.$$

Die Abbildung $\psi\colon \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^{n-1}$ ist damit durch

$$\psi(x) = g'(t_0) = \frac{2}{1-x_n} x'$$

gegeben, wo wir hier mit dem Strich die ersten $(n-1)$ Koordinaten zusammenfassen (und nicht etwa die Ableitung meinen), also z.B.

$$x = (x', x_n), \quad g = (g', g_n), \text{ usw.}$$

Aufgrund der Konstruktion ist eigentlich schon klar, dass ψ bijektiv ist, aber wir berechnen die Umkehrung $\varphi\colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{N\} \subseteq \mathbb{R}^n$ auch noch explizit, um zu sehen, dass sie stetig differenzierbar ist. Dazu betrachten wir jetzt die gerade $L_{x'} \subseteq \mathbb{R}^n$, die durch N und $(x', -1) \in E$ geht und parametrisieren sie mit $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$,

$$h(t) = (1-t)N + t(x', -1).$$

Nun berechnen wir den Schnittpunkt von $L_{x'}$ mit $\mathbb{S}^{n-1}$, der nicht N ist, durch die Bedingung $\|h(t_0)\|^2 = 1$, (und $t_0 \neq 0$, weil dieser Parameter zu $N \in L_{x'} \cap \mathbb{S}^{n-1}$ gehört):

$$\begin{aligned} 1 &= \|h(t_0\|^2 = (1-t_0)^2\|N\|^2 + 2t_0(1-t_0)\langle N, (x', -1)\rangle + t_0^2\|(x', -1)\|^2 \\ &= t_0^2(4 + \|x'\|^2) - 4t_0 + 1, \end{aligned}$$

also

$$t_0 = \frac{4}{\|x'\|^2 + 4}.$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} h'(t_0) &= t_0 x' = \frac{4x'}{\|x'\|^2 + 4}, \\ h_n(t_0) &= (1-t_0) - t_0 = 1 - 2t_0 = \frac{\|x'\|^2 - 4}{\|x'\|^2 + 4}. \end{aligned}$$

Das zeigt, dass $\varphi\colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{N\} \subseteq \mathbb{R}^n$ gegeben ist durch

$$\varphi(x') = \frac{1}{\|x'\|^2 + 4}(4x', \|x'\|^2 - 4).$$

Man prüft nun ohne Mühe nach, dass $\psi \circ \varphi = \text{id}$ und (mit $\|x\|^2 = 1$) auch $\varphi \circ \psi = \text{id}$ ist. Also ist ψ bijektiv und φ schon mal stetig differenzierbar und ebenfalls bijektiv. Um zu zeigen, dass φ auch eine Immersion ist, könnten wir nun die Jacobische von φ, $J_\varphi \colon \mathbb{R}^{n-1} \to [0, \infty)$, berechnen und zeigen, dass $J_\varphi(x') > 0$ ist, für alle $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$. Damit könnten wir dann übrigens auch den Flächeninhalt $\tau_{n-1} := \mathcal{H}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$ via der Flächenformel berechnen (siehe Aufgabe-52.b für eine andere Methode), aber hier können wir einfacher auch so argumentieren (zumal wir J_φ für Teil (b) auch gar nicht explizit zu wissen brauchen): Die Abbildung ψ können wir auch auf dem offenen $U = \mathbb{R}^n \setminus \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 1\}$ betrachten, wo sie offenbar auch stetig differenzierbar ist,

$$\psi(x) = \frac{2}{1 - x_n} x'.$$

Nun wissen wir schon, dass $\psi \circ \varphi = \text{id}$ ist, und daher gilt nach der Kettenregel

$$D\psi(\varphi(x')) \circ D\varphi(x') = \text{id},$$

für alle $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$. Das zeigt, dass $D\varphi(x') \colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ injektiv ist und damit φ eine reguläre Parametrisierung von $\mathbb{S}^{n-1} \setminus \{N\}$.

(b) Für $n = 1$ ist der Zwiebelsatz einfach, weil $S^0(r) = \{\pm r\} \subseteq \mathbb{R}$ ist (für $r > 0$) und $\mathcal{H}^0$ das Zählmaß. Deshalb ist für ein messbares $f \colon \mathbb{R} \to [0, \infty]$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}_-} f(x)\, dx + \int_{\mathbb{R}_+} f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}_+} (f(x) + f(-x))\, dx = \int_{\mathbb{R}_+} (\int_{S^0(r)} f(\xi)\, d\mathcal{H}^0\xi)\, dr.$$

Wir können also im folgenden annehmen, dass $n \geq 2$ ist.

Dazu nehmen wir nun die reguläre Parametrisierung $\varphi \colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ von Teil (a) und betrachten die stetig differenzierbare Abbildung $\Phi \colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$,

$$\Phi(r, x') = r \cdot \varphi(x').$$

Dann ist Φ offenbar injektiv und ihr Bild gegeben durch $\mathbb{R}^n \setminus L$, wo $L \subseteq \mathbb{R}^n$ der Strahl

$$\mathbb{R}_0^+ \cdot e_n = \{(0, \ldots, 0, t) \in \mathbb{R}^n : \ t \geq 0\}$$

ist. Sowohl L ist eine λ^n-Nullmenge als auch die Durchschnitte $L \cap S^{n-1}(r) = \{(0, \ldots, 0, r)\}$ ($r > 0$) sind $\mathcal{H}^{n-1}$-Nullmengen im $\mathbb{R}^n$ (wegen $n \geq 2$). Das brauchen wir später. Jetzt berechnen wir das Differential von Φ in jedem Punkt $(r, x') \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1}$, um zu sehen, dass Φ ein Diffeomorphismus ist. Die Spaltenverktoren von $D\Phi(r, x')$ (bzw. die Bilder von den kanonischen Einheitsvektoren) sind nun offenbar:

$$\varphi(x'),\ rD_1\varphi(x'), \cdots, rD_{n-1}\varphi(x').$$

Wir wissen schon, dass $(D_1\varphi(x'), \ldots, D_{n-1}\varphi(x'))$ linear unabhängig ist, denn φ ist eine reguläre Parametrisierung. Außerdem folgt durch Differentiation von

$$\langle \varphi(x'), \varphi(x') \rangle = 1, \quad \forall\, x' \in \mathbb{R}^{n-1},$$

nach allen $(n-1)$ Variablen, dass

$$2 \cdot \langle D_j\varphi(x'), \varphi(x') \rangle = 0$$

ist, für alle $j = 1, \ldots, n-1$, d.h.: $\varphi(x')$ steht senkrecht auf $D_j\varphi(x')$ (für alle $j = 1, \ldots, n-1$). (Die Vektoren $D_1\varphi(x'), \ldots, D_{n-1}\varphi(x')$ spannen den so genannten *Tangentialraum von* $\mathbb{S}^{n-1}$ *in* $\varphi(x')$ auf.) Damit ist

$$(\varphi(x'), rD_1\varphi(x'), \cdots, rD_{n-1}\varphi(x'))$$

eine Basis von $\mathbb{R}^n$, also $D\Phi(r, x')$ ein Isomorphismus und damit nach dem Umkehrsatz Φ ein Diffeomorphismus.

Um die Transformationsformel und die Flächenformel anwenden zu können, bringen wir jetzt noch die Jacobische von Φ und die Jacobische von φ zusammen. In $D\Phi^T D\Phi(r, x')$ stehen die Skalarprodukte der Spaltenvektoren. Aber diese sind

$$\begin{aligned}
&\langle \varphi(x'), \varphi(x') \rangle = 1, \\
&\langle \varphi(x'), rD_j\varphi(x') \rangle = 0 \quad (j = 1 \ldots, n-1), \\
&\langle rD_i\varphi(x'), rD_j\varphi(x') \rangle = r^2 \langle D_i\varphi, D_j\varphi \rangle (x') \quad (i, j = 1, \ldots, n-1).
\end{aligned}$$

Das zeigt:

$$\begin{aligned}
J_\Phi(r, x') &= |\det D\Phi(r, x')| = \sqrt{\det(D\Phi^T \cdot D\Phi)(r, x')} \\
&= \sqrt{1 \cdot \det(r^2 \cdot D\varphi^T D\varphi(x'))} = r^{n-1} J_\varphi(x').
\end{aligned}$$

Schließlich betrachten wir noch die regulären Parametrisierungen der Sphären $S^{n-1}(r) \subseteq \mathbb{R}^n$ vom Radius $r > 0$, $\varphi_r : \mathbb{R}^{n-1} \to S^{n-1}(r) \setminus \{(0, \ldots, 0, r)\} \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$\varphi_r(x') = r\varphi(x') = \xi.$$

(Das ist also die gleiche Abbildungsvorschrift wie bei Φ, nur ist jetzt $r > 0$ fest.) Da $D\varphi_r(x') = rD\varphi(x')$ ist, folgt

$$J_{\varphi_r}(x') = r^{n-1} J_\varphi(x'), \quad \forall\, x' \in \mathbb{R}^{n-1},\ \forall\, r > 0,$$

also zusammen

$$J_\Phi(r, x') = J_{\varphi_r}(x'), \quad \forall\, r > 0,\ \forall\, x' \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

So, und jetzt haben wir für den Zwiebelsatz ($B^n(R)$ ist die „Zwiebel" und $S^{n-1}(r)$ (für $0 < r \leq R$) sind die „Häute" der Zwiebel) alles zusammen und brauchen „nur noch" Transformationsformel, Tonelli und Flächenformel anzuwenden. Ist $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ messbar, so ist auch die Einschränkung $f|S^{n-1}(r) : S^{n-1}(r) \to [0, \infty]$ (für jedes $r > 0$) messbar und wir dürfen rechnen:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx &\overset{\text{Trafo}}{=} \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1}} f \circ \Phi(r, x') \cdot J_\Phi(r, x')\, dr dx' \\
&\overset{\text{Tonelli}}{=} \int_{\mathbb{R}_+} (\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f \circ \varphi_r(x') \cdot J_{\varphi_r}(x')\, dx')\, dr \\
&\overset{\text{Fl.-f.}}{=} \int_{\mathbb{R}_+} (\int_{S^{n-1}(r)} f(\xi)\, d\mathcal{H}^{n-1}\xi)\, dr.
\end{aligned}$$

[**Anmerkung.** Der Zwiebelsatz ist ein Spezialfall einer weitreichenden Verallgemeinerung, nämlich der so genannten **Coflächenformel**, die ich zur Information hier gerne noch erläutern möchte. Man kann die Coflächenformel als eine Art „krummflächigen Fubini" ansehen. Sie verallgemeinert sowohl den Satz von Fubini als auch die Transformationsformel, wie Sie gleich sehen werden. In gewisser Weise „trifft sie sich“ mit der Flächenformel bei der Transformationsformel, denn letztere ist ja auch ein Spezialfall der Flächenformel. Die Situation ist folgende: Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $\Phi: G \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar und dieses Mal eine so genannte *Submersion*, d.h.: $D\Phi(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist surjektiv, für alle $x \in G$ (und damit also $m \leq n$). Dann braucht man die auch hier so genannte *Jacobische von* Φ, d.i. $J_\Phi: \mathbb{R}^n \to (0, \infty)$,

$$J_\Phi(x) = \sqrt{\det(D\Phi(x) D\Phi^T(x)}.$$

(Man beachte, dass die Transponierte dieses Mal im rechten Faktor steht, damit $D\Phi(x)D\Phi(x)^T$ eine $(m \times m)$-Matrix ist, die wegen der Submersivität von Φ auch tatsächlich positiv definit ist und damit positive Determinante hat. In ihr stehen dieses Mal die Skalarprodukte der Zeilen von $D\Phi(x)$.) Nun wird, sagen wir, eine messbare Funktion $f: G \to [0, \infty]$ zunächst via dem $(n-m)$-dimensionalen Hausdorffmaß $\mathcal{H}^{n-m}$ von G über die Niveauflächen $\Phi^{-1}(y) \subseteq G$ (für $y \in \Phi(G)$) integriert und dann die so entstehende (messbare) Funktion auf $\Phi(G) \subseteq \mathbb{R}^m$ bzgl. des Lebesgue-Maßes im $\mathbb{R}^m$. Es gibt dann eine Gleichheit mit ihrem Lebesgue-Integral in $G \subseteq \mathbb{R}^n$, allerdings gewichtet mit der Jacobischen von Φ, also:

$$\int_G f(x) J_\Phi(x)\, dx = \int_{\Phi(G)} (\int_{\Phi^{-1}(y)} f(\xi) d\mathcal{H}^{n-m}\xi)\, dy.$$

Natürlich gibt es wie beim Satz von Tonelli auch eine Version, wo $f: G \to \mathbb{R}$ integrierbar bzgl. des gewichteten Maßes $J_\phi \lambda^n$ ist. Dann sind für λ^m-fast-alle $y \in G$ die Einschränkungen $f|\Phi^{-1}(y)$ $\mathcal{H}^{n-m}$-integrierbar und die Coflächenformel gilt. Der Satz von Tonelli (bzw. Fubini) ist dann offenbar ein Spezialfall für den Fall, wo $\Phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ die Projektion $(x', x'') \mapsto x''$ ist. In diesem Fall ist die Jacobische von Φ identisch 1. Ebenfalls ist der Zwiebelsatz (den es also auch für den integrierbaren Fall gibt) ein Spezialfall, wo nun $m = 1$ und $\Phi: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $\Phi(x) = \|x\|$, ist. Im Falle $m = 1$ kommt die Jacobische auf den Ausdruck

$$J_\Phi(x) = \|\mathrm{grad}(\Phi)(x)\|$$

herab und im Falle $\Phi(x) = \|x\|$ sieht man schnell, dass wiederum $J_\Phi = 1$ ist. Die Niveauflächen sind offenbar die Sphären $S^{n-1}(r)$ $(r > 0)$, so dass man tatsächlich den Zwiebelsatz erhält. Der Beweis der Coflächenformel verläuft wieder entlang dem Muster für die Transformationsformel und der Flächenformel. Man braucht sie nur für charakteristische (messbare) Funktionen zu beweisen, wodurch sie zu einer Gleichheit von Maßen auf der Borelalgebra von $G \subseteq \mathbb{R}^n$ wird.]

Aufgabe 52. (a) Wir wissen schon, dass das Volumen der Kugel $B^3(r) \subseteq \mathbb{R}^3$ gerade $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ und der Oberflächeninhalt von $S^2(r) \subseteq \mathbb{R}^3$ gerade $A(r) = 4\pi r^2$ ist $(r \in \mathbb{R}_+)$. Können Sie mit Hilfe von Aufgabe 51 erklären, dass nicht zufällig gilt:

$$A(r) = V'(r)$$

(b) Sei $\omega_n = \lambda(\mathbb{B}^n)$ und $\tau_{n-1} = \mathcal{H}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$ (für $n \in \mathbb{N}$). Zeigen Sie:

$$\tau_{n-1} = n\omega_n.$$

Lösungsvorschlag. (a) Nach dem Zwiebelsatz ist mit $f = \chi_{B^3(r)}$ für alle $r > 0$

$$\begin{aligned} V(r) &= \lambda^3(B^3(r)) = \int_{B^3(r)} 1\,dx = \int_{\mathbb{R}^3} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}_+} (\int_{S^2(\rho)} f(\xi)\,d\mathcal{H}^2\xi)\,d\rho \\ &= \int_0^r (\int_{S^2(\rho)} 1\,d\mathcal{H}^2\xi)\,d\rho = \int_0^r A(\rho)\,d\rho. \end{aligned}$$

Selbst wenn man $r \mapsto A(r)$ noch nicht kennt, so weiß man wegen des Homothetieverhaltens von $\mathcal{H}^2$, dass

$$A(r) = \tau_2 r^2,$$

mit $\tau_2 = \mathcal{H}^2(\mathbb{S}^2)$, ist, also insbesondere stetig. Daher ist V mit $V(r) = \lambda^3(B^3(r))$ dann nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung eine Stammfunktion von A, d.i., $V' = A$. (Kennt mal also V, so kennt man A. Und kennt man A so kennt man V.)

(b) Diese Argumentation gilt auch im $\mathbb{R}^n$ (für alle $n \in \mathbb{N}$). Es ist dort mit $A, V\colon \mathbb{R}_+ \to (0,\infty)$,

$$A(r) = \tau_{n-1} r^{n-1}, \quad V(r) = \omega_n r^n$$

und

$$\tau_{n-1} = \mathcal{H}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}), \quad \omega_n = \lambda^n(\mathbb{B}^n).$$

Wegen $V' = A$ folgt mit Auswertung bei $r = 1$:

$$\tau_{n-1} = A(1) = \frac{d}{dr}|_{r=1}(\omega_n r^n) = n \cdot \omega_n.$$

Aufgabe 53. (a) Sei

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 - y^2 - z^2 = 1\}$$

das 2-schalige Hyperboloid. Zeigen Sie, dass M eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass der Kegel

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$$

keine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist. (Hinweis: Überlegen Sie, warum eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ lokal wegzusammenhängend ist.)

Lösungsvorschlag. (a) Betrachte $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2 - y^2 - z^2 - 1$. Dann ist $f^{-1}(0) = M$ und

$$\operatorname{grad}(f)(x,y,z) = (2x, -2y, -2z) \neq 0$$

für $(x,y,z) \neq (0,0,0)$. Aber $(0,0,0) \notin M$. Deshalb ist f eine definierende Gleichung für M und alle $p \in M$. Es ist damit M eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$.

(b) Ist $M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $p \in M$, so gibt es nach einem Satz aus der Vorlesung offene Mengen $V \subseteq \mathbb{R}^2$ und $U \subseteq M$ (relativ-offen in M) mit $p \in U$ und eine reguläre Parametrisierung $\varphi\colon V \to U$, die sogar ein Homöomorphismus ist (d.i., auch $\varphi^{-1}\colon U \to V$ ist stetig). Sei $x_0 = \varphi^{-1}(p) \in V$. Wir können dann φ auf $B_\varepsilon(x_0)$ einschränken (mit

$\varepsilon > 0$ so klein, dass $B_\varepsilon(x_0) \subseteq V$ ist) und erhalten einen Homöomorphismus $\varphi_\varepsilon : B_\varepsilon(x_0) \to U_\varepsilon$ mit $U_\varepsilon := \varphi(B_\varepsilon(x_0)) \subseteq M$, welches eine (etwas kleinere) relativ-offene Umgebung von $p \in M$ ist. Dann ist auch die nochmalige Einschränkung

$$\psi := \varphi_\varepsilon|(B_\varepsilon \setminus \{x_0\}) : B_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\} \to U_\varepsilon \setminus \{p\}$$

ein Hömöomorphismus. Da Homöomorphismen Wegzusammenhang erhalten (warum?), muss damit auch $U_\varepsilon \setminus \{p\}$ eine wegzusammenhängende offene Umgebung von p sein, denn die gelochte Scheibe $B_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}$ ist wegzusammenhängend.

Wir zeigen jetzt, dass die Spitze $p = 0$ des Kegels K solch eine Umgebung nicht hat. Beachte, dass es nicht ausreicht zu argumentieren, dass $\operatorname{grad}(f)(0,0,0) = (0,0,0)$ ist für $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$, denn es könnte ja vielleicht noch eine andere, bessere Funktion g geben, die um p definiert ist, K dort beschreibt und $\operatorname{grad}(g)(p) \neq 0$ erfüllt. Das kann es aber nicht geben, weil für keine Umgebung $U \subseteq K$ von p gilt, dass $U \setminus \{p\}$ wegzusammenhängend ist. $U \setminus \{p\}$ muss nämlich Punkte $q_1 = (x_1, y_1, z_1)$ und $q_2 = (x_2, y_2, z_2)$ mit $z_1 > 0$ und $z_2 < 0$ enthalten. Für eine diese beiden Punkte verbindende stetige Kurve $\alpha : [0,1] \to K$, $\alpha(0) = q_1$ und $\alpha(1) = q_2$, muss es dann nach dem Zwischenwertsatz einen Parameter $t_0 \in (0,1)$ geben mit $\alpha_3(t_0) = 0$. Der einzige Punkt $q_0 = (x_0, y_0, z_0)$ von K mit $z_0 = 0$ ist aber $q_0 = p$, weil aus $x_0^2 + y_0^2 = 0$ unmittelbar $x_0 = y_0 = 0$ folgt. Es ist aber $p \notin U \setminus \{p\}$. Daher kann K keine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ sein. (In den anderen Punkten von K außer p natürlich schon.)

Aufgabe 54. (a) Wir betrachten für jedes $n \in \mathbb{N}$ *die orthogonale Gruppe*

$$\mathbb{O}(n) = \{A \in \mathrm{Mat}_n\mathbb{R} : \; A^T A = \mathbf{1}_n\} \subseteq \mathrm{Mat}_n\mathbb{R} = \mathbb{R}^{n^2}.$$

(a) Sei $F : \mathrm{Mat}_n\mathbb{R} \to \mathrm{Sym}_n\mathbb{R}$, $A \mapsto A^T A - \mathbf{1}$, wo $\mathrm{Sym}_n\mathbb{R}$ den Unterraum aller symmetrischen Matrizen in $\mathrm{Mat}_n\mathbb{R}$ bezeichnet. Begründen Sie, warum F stetig differenzierbar ist und zeigen Sie dann, dass das Differential $DF_A : \mathrm{Mat}_n\mathbb{R} \to \mathrm{Sym}_n\mathbb{R}$ von F in $A \in \mathrm{Mat}_n\mathbb{R}$ gegeben ist durch

$$DF_A(B) = A^T B + B^T A.$$

(b) Zeigen Sie nun, dass DF_A für jedes $A \in \mathbb{O}(n)$ surjektiv ist und schließen Sie daraus, dass $\mathbb{O}(n)$ eine $\frac{1}{2}n(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathrm{Mat}_n\mathbb{R}$ ist.

Lösungsvorschlag. (a) Die Komponenten $A \mapsto F_{ij}(A)$ (für $1 \leq i \leq j \leq n$) sind quadratische Polynome in den Einträgen von A und damit sicher stetig differenzierbar. Für das Differential $DF_A : \mathrm{Mat}_n\mathbb{R} \to \mathrm{Sym}_n\mathbb{R}$ betrachten wir $DF_A(B) \in \mathrm{Sym}_n\mathbb{R}$ als Richtungsableitung von F in A in Richtung B, d.h.: Wir betrachten die Kurve $(-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathrm{Mat}_n\mathbb{R}$, $t \mapsto A + tB$ (für ein $\varepsilon > 0$), und benutzen dann, dass

$$DF_A(B) = \frac{d}{dt}|_{t=0} F(A + tB)$$

ist. Es ist nämlich

$$F(A + tB) = (A + tB)^T (A + tB) - \mathbf{1} = (A^T A - \mathbf{1}) + t(B^T A + A^T B) + t^2 B^T B.$$

Daran sieht man, dass

$$DF_A(B) = A^T B + B^T A$$

ist

(b) Sei nun $A \in \mathbb{O}(n)$. Wir zeigen, dass dann $DF_A\colon \mathrm{Mat}_n\mathbb{R} \to \mathrm{Sym}_n\mathbb{R}$ surjektiv ist. Sei dazu $C \in \mathrm{Sym}_n\mathbb{R}$ beliebig, $C^T = C$. Wir setzen dann $B := \frac{1}{2}AC$. Dann ist wegen $A^TA = AA^T = \mathbf{1}$

$$DF_A(B) = A^T(\frac{1}{2}AC) + (\frac{1}{2}C^TA^T)A = C,$$

also DF_A tatsächlich surjektiv. Da

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Mat}_n\mathbb{R} = n^2 \text{ und } \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Sym}_n\mathbb{R} = \frac{1}{2}n(n+1)$$

ist, ist $\mathbb{O}(n) \subseteq \mathrm{Mat}_n\mathbb{R}$ tatsächlich eine s-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit

$$s = n^2 - \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}n(n-1).$$

Aufgabe 55. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}_+$. Zeigen Sie, dass *das Ellipsoid*

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$$

ein Kompaktum mit glattem Rand in $\mathbb{R}^3$ ist und berechnen Sie das äußere Einheitsnormalenfeld $\nu\colon \partial E \to \mathbb{R}^3$ von E.

Lösungsvorschlag. Wir betrachten $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1.$$

Dann ist f eine globale beschreibende Funktion für E als Kompaktum mit glattem Rand, denn nach Definition ist $E = f^{-1}((-\infty, 0])$ und damit zunächst abgeschlossen. Ist, sagen wir, $a \leq b \leq c$, so ist E auch in der Kugel um 0 mit Radius c enthalten und damit auch beschränkt, denn für $(x,y,z) \in E$ ist

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

Damit ist E schon mal kompakt und wir prüfen jetzt, ob E glatten Rand hat. Dazu beobachten wir

$$\mathrm{grad}(f)(x,y,z) = (\frac{2}{a^2}x, \frac{2}{b^2}y, \frac{2}{c^2}z) \neq (0,0,0)$$

für $(x,y,z) \neq (0,0,0)$. Aber $(0,0,0) \notin M := \partial E$,

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}.$$

Nun steht $N\colon M \to \mathbb{R}^3$, $N(p) = \mathrm{grad}(f)(p)$, senkrecht auf TM_p und zeigt nach außen, da

$$f(p + tN(p)) > 0$$

ist, sogar für alle $t > 0$. Das sieht man im Bild des Ellipsoids eigentlich direkt oder man rechnet für $p = (x, y, z) \in M$:

$$\begin{aligned}
f(p + tN(p)) &= f((1 + \frac{2t}{a^2})x, (1 + \frac{2t}{b^2})y, (1 + \frac{2t}{c^2})z) \\
&= \frac{x^2}{a^2}(1 + \frac{2t}{a^2})^2 + \frac{y^2}{b^2}(1 + \frac{2t}{b^2})^2 + \frac{z^2}{c^2}(1 + \frac{2t}{c^2})^2 - 1 \\
&= \underbrace{(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1)}_{=0} + 4t\underbrace{(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4})}_{>0} + 4t^2\underbrace{(\frac{x^2}{a^6} + \frac{y^2}{b^6} + \frac{c^2}{c^6})}_{>0} > 0.
\end{aligned}$$

Damit ist $\nu\colon M \to \mathbb{R}^3$,

$$\nu(x, y, z) = \frac{N(x, y, z)}{\|N(x, y, z)\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}(\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2})$$

das äußere Einheitsnormalenfeld.

Aufgabe 56. Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand in $\mathbb{R}^n$ und $\nu\colon \partial K \to \mathbb{R}^n$ ihr äußeres Einheitsnormalenfeld. Für eine stetig differenzierbare Funktion $f\colon K \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^1(K)$, definiert man *die Normalenableitung von f in $x \in \partial K$* durch

$$D_\nu f(x) := \langle \mathrm{grad}(f)(x), \nu(x) \rangle.$$

Zeigen Sie:

(a) (1. Greensche Formel) Ist $f \in \mathcal{C}^1(K)$ und $g \in \mathcal{C}^2(K)$, so gilt:

$$\int_K (\langle \mathrm{grad}(f), \mathrm{grad}(g) \rangle + f \triangle g)\, d\lambda = \int_{\partial K} f D_\nu g \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

(b) (2. Greensche Formel) Sind $f, g \in \mathcal{C}^2(K)$, so gilt:

$$\int_K (f \triangle g - g \triangle f)\, d\lambda = \int_{\partial K} (f D_\nu g - g D_\nu f)\, d\mathcal{H}^{n-1}$$

Lösungsvorschlag. (a) Wir betrachten das Vektorfeld $X\colon K \to \mathbb{R}^n$, $X = f \cdot \mathrm{grad}(g)$, auf K, welches nach den Voraussetzungen stetig differenzierbar ist, und berechnen seine Divergenz:

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(X) &= \sum_{j=1}^n D_j X_j = \sum_{j=1}^n (D_j f D_j g + f \cdot D_j D_j g) \\
&= \langle \mathrm{grad}(f), \mathrm{grad}(g) \rangle + f \triangle g.
\end{aligned}$$

Anwendung des Gaußschen Divergenzsatzes liefert dann

$$\int_K (\langle \mathrm{grad}(f), \mathrm{grad}(g) \rangle + f \triangle g)\, d\lambda = \int_{\partial K} \langle f \mathrm{grad}(g), \nu \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\partial K} f D_\nu g \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

(b) Wendet man die 1. Greensche Formel einmal für (f, g) und einmal für (g, f) an, so erhält man

$$\begin{aligned}\int_K \langle \operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(g)\rangle + f\triangle g\, d\lambda &= \int_{\partial K} f D_\nu g\, d\mathcal{H}^{n-1}\\ \int_K \langle \operatorname{grad}(g), \operatorname{grad}(f)\rangle + g\triangle f\, d\lambda &= \int_{\partial K} g D_\nu f\, d\mathcal{H}^{n-1}.\end{aligned}$$

Subtraktion auf beiden Seiten dieser Gleichungen und Linearität des Integrals liefern dann tatsächlich

$$\int_K (f\triangle g - g\triangle f)\, d\lambda = \int_{\partial K} (f D_\nu g - g D_\nu f)\, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Aufgabe 57. **(a)** Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) ein Kompaktum mit glattem Rand und $\nu\colon \partial K \to \mathbb{R}^n$ ihr äußeres Einheitsnormalenfeld. Zeigen Sie:

$$\lambda^n(K) = \frac{1}{n} \int_{\partial K} \langle x, \nu(x)\rangle\, d\mathcal{H}^{n-1}(x).$$

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von (a) erneut (vgl. Aufgabe 52.b) für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\tau_{n-1} = n\omega_n.$$

Lösungsvorschlag. **(a)** Wir betrachten das Vektorfeld $X = \operatorname{id}\colon K \to \mathbb{R}^n$, $X(x) = x$. Das ist stetig differenzierbar und hat Divergenz

$$\operatorname{div}(X)(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial x_j}(x) = \sum_{j=1}^n 1 = n.$$

Nach dem Gaußschen Satz ist daher

$$\int_{\partial K} \langle x, \nu(x)\rangle\, d\mathcal{H}^{n-1}(x) = \int_{\partial K} \langle X, \nu\rangle\, d\mathcal{H}^{n-1} = \int_K \operatorname{div}(X)\, d\lambda = n \cdot \int_K d\lambda = n\lambda^n(K).$$

(b) Im Falle $K = \mathbb{B}^n$ und damit $\partial K = \mathbb{S}^{n-1}$ ist $\nu\colon \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$, $\nu(x) = x$, das äußere Einheitsnormalenfeld an K, denn es steht senkrecht auf $T\mathbb{S}^{n-1}_x = x^\perp$, hat Länge 1 und zeigt nach außen. Es folgt:

$$\langle x, \nu(x)\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2 = 1, \quad \forall\, x \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

Also ist

$$\omega_n = \lambda^n(\mathbb{B}^n) = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} 1\, d\mathcal{H}^{n-1} = \frac{1}{n}\mathcal{H}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) = \frac{1}{n}\tau_{n-1}.$$

Aufgabe 58. **(a)** Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet ($n \in \mathbb{N}$) und $X\colon G \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Für jedes $x \in G$ und $\delta > 0$ betrachten wir den Ball $B_\delta(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \le \delta\}$, so fern er in G liegt, und sein äußeres Einheitsnomalenfeld $\nu\colon \partial B_\delta(x) \to \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass für alle $x \in G$ gilt:

$$\operatorname{div}(X)(x) = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\omega_n \delta^n} \int_{\partial B_\delta(x)} \langle X, \nu\rangle\, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

(b) In der *Elektrostatik* wird die in einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^3$ vorhandene *Ladung* Q durch eine *Ladungsdichte* $\rho\colon G \to \mathbb{R}$ beschrieben, d.h.: In jedem Kompaktum $K \subseteq G$ befindet sich die Ladung $Q(K) := \int_K \rho\, d\lambda$. *Das* 1. *Maxwellsche Gesetz* (in seiner integrierten Form) besagt nun, dass sich aufgrund der Ladung Q *ein elektrisches Feld* $E\colon G \to \mathbb{R}^3$ einstellt, so dass für jedes Kompaktum mit glattem Rand $K \subseteq G$ gilt: *Der Fluss von* E *aus* K *heraus*, d.i. *das Flussintegral* $\int_{\partial K} \langle E, \nu\rangle\, d\mathcal{H}^{n-1}$, ist gleich der Ladung in K,

$$Q(K) = \int_{\partial K} \langle E, \nu\rangle\, d\mathcal{H}^{n-1}$$

(*Ladung als Quelle des elektrischen Feldes*). Zeigen Sie, dass dann (bei stetigem ρ und stetig differenzierbarem E) gilt:

$$\operatorname{div}(E) = \rho$$

(so genannte differentielle Form des 1. Maxwell-Gesetzes) und umgekehrt, dass aus der differentiellen Form auch das 1. Maxwell-Gesetz in seiner integrierten Form folgt.

Lösungsvorschlag. (a) (i) Ist $f\colon G \to \mathbb{R}$ ($G \subseteq \mathbb{R}^n$) eine stetige Funktion und $x_0 \in G$, so gibt es ein $\delta_0 > 0$, so dass $B_{\delta_0}(x_0) \subseteq G$ ist und daher das Integral (der so genannte *Mittelwert von* $f|B_\delta(x_0)$)

$$\frac{1}{\omega_n \delta^n} \int_{B_\delta(x_0)} f(x)\, dx,$$

für alle $0 < \delta < \delta_0$, existiert. Wir behaupten, dass der Grenzwert für $\delta \to 0$ existiert und es gilt

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\omega_n \delta^n} \int_{B_\delta(x_0)} f(x)\, dx = f(x_0).$$

Denn ist $\varepsilon > 0$ beliebig, so gibt es wegen der Stetigkeit von f in x_0 ein $\delta_1 < \delta_0$, so dass für alle $x \in B_{\delta_1}(x_0)$ gilt: $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$. Wegen $\omega_n \delta^n = \lambda^n(B_\delta(x_0))$ folgt daraus für alle $0 < \delta < \delta_1$:

$$\begin{aligned}
|\frac{1}{\omega_n \delta^n} \int_{B_\delta(x_0)} f(x)\, dx - f(x_0)| &= |\frac{1}{\omega_n \delta^n} \int_{B_\delta(x_0)} f(x)\, dx - \frac{1}{\omega_n \delta^n} \int_{B_\delta(x_0)} f(x_0)\, dx| \\
&\leq \frac{1}{\omega_n \delta^n} \int_{B_\delta(x_0)} |f(x) - f(x_0)|\, dx \leq \frac{1}{\omega_n \delta^n} \int_{B_\delta(x_0)} \varepsilon\, dx = \frac{\varepsilon \cdot (\omega_n \delta^n)}{\omega_n \delta^n} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Das zeigt die Behauptung.

(ii) Mit dem Divergenzsatz von Gauß folgt für ein stetig differenzierbares $X\colon K \to \mathbb{R}^n$ ($K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt mit glattem Rand und äußerem Einheitsnormalenfeld ν) und $x_0 \in K$:

$$\frac{1}{\omega_n \delta^n} \int_{\partial B_\delta(x_0)} \langle X, \nu\rangle\, d\mathcal{H}^{n-1} = \frac{1}{\omega_n \delta^n} \int_{B_\delta(x_0)} \operatorname{div}(X)\, d\lambda \xrightarrow{\delta \to 0} \operatorname{div}(X)(x_0),$$

denn $\operatorname{div}(X)\colon K \to \mathbb{R}$ ist dann ja noch stetig.

(b) (i) Gilt das 1. Maxwellsche Gesetz in der integrierten Form, so ist für jedes $x_0 \in G$

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(E)(x_0) &= \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\omega_n \delta^n} \int_{\partial B_\delta(x_0)} \langle E, \nu\rangle\, d\mathcal{H}^{n-1} = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\omega_n \delta^n} Q(B_\delta(x_0)) \\
&= \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\omega_n \delta^n} \int_{B_\delta(x_0)} \rho\, d\lambda = \rho(x_0).
\end{aligned}$$

(ii) Gilt das 1. Maxwellsche Gesetz in der differentiellen Form, so folgt unmittelbar aus dem Gaußschen Satz für jedes Kompaktum mit glattem Rand $K \subseteq G$ und äußerem Einheitsnormalenfeld ν, dass

$$Q(K) = \int_K \rho \, d\lambda = \int_K \operatorname{div}(E) \, d\lambda = \int_{\partial K} \langle E, \nu \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$