

Portfoliofragen zur Integrations- und Maßtheorie

Frage 01. Geben Sie die Definition einer σ -Algebra auf einer Menge an und erläutern Sie.

Frage 02. Wann nennt man für eine σ -Algebra \mathfrak{A} eine Teilmenge $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{A}$ ein *Erzeugendensystem*? Erläutern Sie.

Frage 03. Was ist ein *Maß* auf einem Messraum (X, \mathfrak{A}) und was besagt die Ausschöpfungsformel?

Frage 04. Was ist ein *Dynkin-System* auf einer Menge und wie ist der Zusammenhang zum Begriff der σ -Algebra?

Frage 05. Formulieren und erläutern Sie den Eindeutigkeitssatz für Maße.

Frage 06. Was ist ein (Mengen-) Ring und was ein Prämaß darauf? Erläutern Sie den Unterschied zu Maßen auf σ -Algebren.

Frage 07. Was ist der Ring der Elementarfiguren \mathfrak{E} im \mathbb{R}^n ($n \in \mathbb{N}$) und wie erklärt man das Borel-Lebesguesche Prämaß darauf?

Frage 08. Wie erklärt man das äußere Lebesgue-Maß einer Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ nach Caratheodory? Erläutern Sie.

Frage 09. Formulieren Sie den Fortsetzungssatz für Prämaße und erläutern Sie ihn.

Frage 10. Was ist ein Messraum und wann heißt eine Abbildung zwischen Messräumen messbar? Warum sind Translationen des \mathbb{R}^n messbar?

Frage 11. Können Sie eine Teilmenge der reellen Zahlen angeben, die nicht Borelsch ist? Erläutern Sie ein bisschen.

Frage 12. Charakterisieren Sie das Borel-Lebesguesche Maß auf der Borelalgebra des \mathbb{R}^n durch seine Translationsinvarianz und erläutern Sie.

Frage 13. Formulieren Sie die Transformationsformel für Lineare Transformationen des \mathbb{R}^n und erläutern Sie.

Frage 14. Formulieren Sie das Paradoxon von Banach-Tarski und erklären Sie es etwas.

Frage 15. Können Sie kurz und knapp erklären, warum die Kreislinie zerlegungskongruent zu sich selbst ohne einen Punkt ist?

Frage 16. Können Sie auch den Satz von Hausdorff ein bisschen erläutern?

Frage 17. Was nennt man eine Abbildung von einem Messraum in die erweiterte reelle Zahlengerade messbar und wie kann man das prüfen?

Frage 18. Erklären Sie, was eine Treppenfunktion auf einem Messraum ist.

Frage 19. Sei f eine nicht-negative messbare Funktion auf einem Maßraum X . Wie wird das Integral von f über X definiert? Erläutern Sie.

Frage 20. Formulieren und erläutern Sie den Konvergenzsatz von Beppo Levi über Monotone Konvergenz.

Frage 21. Wann heißt eine Funktion $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ auf einem Maßraum X integrierbar? Erläutern Sie.

Frage 22. Was bedeutet es in der Maßtheorie, dass eine Aussage „fast-überall“ gilt?

Frage 23. Formulieren und erläutern Sie das Lemma von Fatou.

Frage 24. Erläutern Sie die Beziehung zwischen Riemann- und Lebesgue-integrierbaren Funktionen auf einem kompakten Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$.

Frage 25. Sei X ein Maßraum und $p \in [1, \infty)$. Erklären und erläutern Sie, was die zur p -Potenz integrierbaren Funktionen auf X sind.

Frage 26. Formulieren und erläutern Sie die Höldersche Ungleichung.

Frage 27. Sei X ein Maßraum und $p \in [1, \infty)$. Was ist dann der Raum $L^p(X)$ und welche Struktur hat er?

Frage 28. Formulieren Sie den Satz von Riesz-Fischer und erläutern Sie seine Bedeutung.

Frage 29. Sei \mathfrak{A}_1 eine σ -Algebra auf X_1 und \mathfrak{A}_2 eine σ -Algebra auf X_2 . Erklären Sie, was die σ -Algebra $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ auf $X_1 \times X_2$ ist.

Frage 30. Seien $(X_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$ und $(X_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$ σ -endliche Maßräume. Wie ist die Grundidee bei der Definition des Produktmaßes μ auf $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$?

Frage 31. Formulieren Sie den Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Produktmaße und erläutern Sie ihn.

Frage 32. Was besagt Cavalieris Prinzip und warum gilt es?

Frage 33. Formulieren und erläutern Sie den Satz von Tonelli.

Frage 34. Formulieren und erläutern Sie den Satz von Fubini.

Frage 35. Formulieren Sie die Transformationsformel für lineare Diffeomorphismen und erläutern Sie den Zusammenhang zur Transformationsformel bei Isomorphismen für das Borel-Lebesguesche Maß.

Frage 36. Formulieren Sie nun die allgemeine Transformationsformel für Diffeomorphismen zwischen Gebieten im \mathbb{R}^n ($n \in \mathbb{N}$).

Frage 37. Zu welcher Gleichheit von Maßen auf der Borelalgebra des Definitionsgebietes eines Diffeomorphismus' ist die Transformationsformel äquivalent? Erläutern Sie.

Frage 38. Können Sie etwas erklären, warum man das (äußere) Lebesgue-Maß auch mit Kugelüberdeckungen erklären könnte?

Frage 39. Wie verhält sich das (äußere) Lebesgue-Maß unter Lipschitz-Abbildungen und warum hilft diese Kenntnis beim Beweis der Transformationssatzes?

Frage 40. Was besagt der „Satz vom Igel“? Erläutern Sie.

Frage 41. Sei F ein (stetig differenzierbares) normiertes Vektorfeld (also ohne Nullstellen) auf der Sphäre. Auf welchen Diffeomorphismus möchte man denn die Transformationsformel beim Beweis des Igelsatzes anwenden? Erläutern Sie ein bisschen.

Frage 42. Formulieren und erläutern Sie den Retraktionssatz aus der Algebraischen Topologie.

Frage 43. Formulieren und erläutern Sie den Brouwerschen Fixpunktsatz.

Frage 44. Erklären Sie die approximierenden s -dimensionalen äußeren Hausdorff-Maße auf \mathbb{R}^n ($0 \leq s \leq n$) und erläutern Sie ein wenig.

Frage 45. Sei X ein metrischer Raum. Erklären Sie, wann man ein äußeres Maß auf X metrisch nennt.

Frage 46. Was besagt der Satz von Caratheodory über metrische äußere Maße? Erläutern Sie.

Frage 47. Wie verhält sich das s -dimensionale Hausdorffmaß auf \mathbb{R}^n bei linearen Isometrien $\mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($0 \leq s \leq n$)? Erläutern Sie ein wenig.

Frage 48. Was ist die Gramsche Determinante einer linearen Injektion $T: \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^n$ und welche Rolle spielt sie bei der Flächenformel für lineare Injektionen? Erläutern Sie.

Frage 49. Was ist eine regulär parametrisierte Fläche der Dimension s im \mathbb{R}^n ? Erläutern Sie.

Frage 50. Was ist die Jacobische einer regulär paramtrisierten Fläche? Erläutern Sie.

Frage 51. Formulieren Sie die Flächenformel für s -dimensionale regulär parametrisierte Flächen im \mathbb{R}^n .

Frage 52. Wie lautet die klassische Formel für den Oberflächeninhalt einer (regulär parametrisierten) Fläche im \mathbb{R}^3 ? Erläutern Sie.

Frage 53. Was ist eine s -dimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n ? Erläutern Sie.

Frage 54. Wie ist der Tangentialraum einer Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ in einem Punkt $p \in M$ definiert und warum ist er ein Untervektorraum von \mathbb{R}^n ?

Frage 55. Formulieren Sie den Gaußschen Divergenzsatz und erläutern Sie ihn.

Frage 56. Was ist ein Kompaktum mit glattem Rand $K \subseteq \mathbb{R}^n$ und was ihr äußeres Einheitsnormalenfeld?

Frage 57. Wann sagt man, dass eine Funktion auf einer offenen Teilmenge des \mathbb{R}^n kompakten Träger hat? Erläutern Sie.

Frage 58. Sei \mathcal{U} eine endliche, offene Überdeckung einer kompakten Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Erklären Sie, was eine \mathcal{U} -untergeordnete Teilung der Eins von K ist und erläutern Sie.