Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose

WiSe 2020/21
im März 2021
Blätter 01-16

Übungen zur Integrations- und Maßtheorie

Aufgabe 01. Sei K ein Körper. Ein 4-Tupel $(A, +, *, \cdot)$ heißt *eine (assoziative) K-Algebra*, wenn $+, *$ innere Verknüpfungen auf A sind, also $+, *\colon A \times A \to A$, und $\cdot$ eine äußere Verknüpfung auf A ist, also $\cdot\colon K \times A \to A$, so dass gilt: (i) $(A, +, *)$ ist ein Ring; (ii) $(A, +, \cdot)$ ist ein K-Vektorraum; (iii) $\lambda \cdot (x * y) = (\lambda \cdot x) * y = x * (\lambda \cdot y)$, für alle $\lambda \in K$, $x, y \in A$.

(a) Sei $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ der Körper mit zwei Elementen und X eine beliebige Menge. Definieren Sie auf allen Abbildungen von X nach $\mathbb{F}_2$, $A := \mathrm{Abb}(X, \mathbb{F}_2)$, in naheliegender Weise Verknüpfungen $(+, *, \cdot)$, mit denen $(A, +, *, \cdot)$ zu einer $\mathbb{F}_2$-Algebra (mit Einselement) wird.

(b) Wir definieren nun für jede Teilmenge $Y \subseteq X$ ihre *charakteristische Funktion* $\chi_Y\colon X \to \mathbb{F}_2$ durch $\chi_Y(x) = 1$, falls $x \in Y$ ist, und $\chi_Y(x) = 0$, falls $x \notin Y$ ist. Zeigen Sie, dass die Zuordnung $\Phi\colon \mathfrak{P}(X) \to \mathrm{Abb}(X, \mathbb{F}_2)$, $Y \mapsto \chi_Y$, bijektiv ist.

(c) Welchen mengentheoretischen Verknüpfungen auf $\mathfrak{P}(X)$ entsprechen nun via Φ den inneren Verknüpfungen $+$ und $*$ von $\mathrm{Abb}(X, \mathbb{F}_2)$ auf $\mathfrak{P}(X)$? Zeigen Sie: Eine Teilmenge $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ ist bezüglich der induzierten Strukturen $(+, *, \cdot)$ via Φ genau dann eine $\mathbb{F}_2$-*Unteralgebra mit Eins*, wenn gilt: (i) $X \in \mathfrak{A}$; (ii) $\forall Y \in \mathfrak{A} : Y^c \in \mathfrak{A}$; (iii) $\forall Y_1, Y_2 \in \mathfrak{A}$: $Y_1 \cup Y_2 \in \mathfrak{A}$.

Aufgabe 02. (a) Recherchieren Sie zunächst den sogenannten *Großen Umordnungssatz* für absolut kovergente Reihen, formulieren und erläutern Sie ihn.

(b) Sei nun X eine abzählbare Menge (endlich oder unendlich) und $\varphi\colon X \to [0, \infty]$ eine beliebige Funktion (die wir als *Gewichtsfunktion* interpretieren). Zeigen Sie, dass durch $\mu_\varphi\colon \mathfrak{P}(X) \to [0, \infty]$,

$$\mu_\varphi(A) = \sum_{x \in A} \varphi(x),$$

ein Maß auf $(X, \mathfrak{P}(X))$ definiert wird.

(c) Sei X wieder abzählbar. Zeigen Sie, dass jedes Maß μ auf $(X, \mathfrak{P}(X))$ wie unter (b) zu Stande kommt und dass $\varphi\colon X \to [0, \infty]$ mit $\mu = \mu_\varphi$ eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 03 (Schrumpfungsformel). **(a)** Sei $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra auf einer Menge X und μ ein Maß auf $(X, \mathfrak{A})$. Zeigen Sie: Sind $A_k \in \mathfrak{A}$ $(k \in \mathbb{N})$ mit $A_k \supseteq A_{k+1}$, für alle $k \in \mathbb{N}$, und ist $\mu(A_1) < \infty$, so gilt für $A := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k$:

$$\mu(A) = \lim_{k \to \infty} \mu(A_k).$$

(b) Sei μ das Zählmaß auf $\mathbb{N}$ sowie $A_k := \{n \in \mathbb{N} : n \geq k\}$ $(k \in \mathbb{N})$. Zeigen Sie, dass die Schrumpfungsformel (a) für (A_k) nicht gilt.

Aufgabe 04. **(a)** Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}$ und $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ gleichmächtig sind. (Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\mathbb{R}$ und $[0,1)$ gleichmächtig sind und drücken Sie dann jedes $x \in [0,1)$ durch seinen *Dualbruch* $0,a_1a_2\dots$ (mit $a_k \in \mathbb{F}_2$, $k \in \mathbb{N}$) aus.)

(b)* Sei $\mathfrak{B}_n \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ die Borel-Algebra ($n \in \mathbb{N}$). Zeigen Sie, dass $\mathfrak{B}_n$ gleichmächtig zu $\mathbb{R}$ ist und damit, dass $\mathfrak{B}_n \neq \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ sein muss.

Hinweis: Benutzen Sie die Sätze von *Schröder-Bernstein* und *Cantor* aus der Analysis-I.

Aufgabe 05. Sei X eine Menge sowie $A, B \in \mathfrak{P}(X)$ und $\mathfrak{M} := \{A, B\} \subseteq \mathfrak{P}(X)$.

(a) Sei mindestens eine von den vier Mengen $A \cap B$, $A \cap B^c$, $A^c \cap B$, $A^c \cap B^c$ leer. Zeigen Sie, dass dann das von $\mathfrak{M}$ erzeugte Dynkin-System $\mathfrak{D}$ mit der von $\mathfrak{M}$ erzeugten σ-Algebra $\mathfrak{A}$ übereinstimmt, $\mathfrak{D} = \mathfrak{A}$. (Hinweis: Suchen Sie einen durchschnittsstabilen Erzeuger für $\mathfrak{D}$.)

(b) Seien nun die Mengen $A \cap B$, $A \cap B^c$, $A^c \cap B$ und $A^c \cap B^c$ allesamt nicht-leer. Zeigen Sie, dass dann das von $\mathfrak{M}$ erzeugte Dynkin-System $\mathfrak{D}$ nicht mit der von $\mathfrak{M}$ erzeugten σ-Algebra $\mathfrak{A}$ übereinstimmt, $\mathfrak{D} \neq \mathfrak{A}$. (Hinweis: $\mathfrak{D}$ ist sehr klein.)

(c) Geben Sie ein Dynkin-System an, welches keine σ-Algebra ist.

Aufgabe 06. Sei X eine Menge und $\mathfrak{P}(X)$ versehen mit ihrer Ringstruktur aus Aufgabe 01. Zeigen Sie: Eine Teilmenge $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ ist genau dann einen Mengenring, wenn sie ein (algebraischer) Unterring von $\mathfrak{P}(X)$ ist.

Ein Maßraum $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ heißt *vollständig*, falls für jedes $M \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(M) = 0$ auch alle Teilmengen $N \subseteq M$ in $\mathfrak{A}$ liegen.

Aufgabe 07. Sei $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum. Wir setzen $\mathfrak{N} := \{N \in \mathfrak{P}(X) : \text{es gibt ein } M \in \mathfrak{A} \text{ mit } N \subseteq M \text{ und } \mu(M) = 0\}$ sowie $\hat{\mathfrak{A}} := \{A \cup N : A \in \mathfrak{A} \text{ und } N \in \mathfrak{N}\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\hat{\mathfrak{A}}$ eine σ-Algebra mit $\mathfrak{A} \subseteq \hat{\mathfrak{A}}$ ist.

(b) Definiere $\hat{\mu}\colon \hat{\mathfrak{A}} \to [0,\infty]$ durch $\hat{\mu}(A \cup N) := \mu(A)$. Zeigen Sie, dass $\hat{\mu}$ ein wohldefiniertes Maß auf $(X, \hat{\mathfrak{A}})$ mit $\hat{\mu}|\mathfrak{A} = \mu$ ist, und dass $(X, \hat{\mathfrak{A}}, \hat{\mu})$ vollständig ist. ($(X, \hat{\mathfrak{A}}, \hat{\mu})$ heißt *die Vervollständigung von* $(X, \mathfrak{A}, \mu)$.)

Aufgabe 08. Sei X eine Menge und $\nu\colon \mathfrak{P}(X) \to [0,\infty]$ ein äußeres Maß auf X. Sei weiter $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ die σ-Algebra der ν-messbaren Mengen und $\mu := \nu|\mathfrak{A}$.

(a) Zeigen Sie, dass $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ vollständig ist.

(b) Sei $\mu^*\colon \mathfrak{P}(X) \to [0,\infty]$ das von μ induzierte äußere Maß nach Caratheodory. Zeigen Sie, dass i.A. $\mu^* = \nu$ nicht gilt. (Hinweis: Versuchen Sie es mal mit einem geschickten äußeren Maß ν auf der Menge $X = \{0, 1\}$.)

Aufgabe 09. Sei λ^* das äußere Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$ und $M \subseteq \mathbb{R}$ eine λ^*-messbare Teilmenge (d.i.: *eine Lebesgue-Menge*). Sei weiter $\varepsilon > 0$ beliebig.

(a) Zeigen Sie, dass es eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}$ gibt mit $U \supseteq M$ und $\lambda^*(U \setminus M) < \varepsilon$. (Hinweis: Betrachte zunächst den Fall $\lambda^*(M) < \infty$ und im Fall $\lambda^*(M) = \infty$ dann die Durchschnitte $M_n = M \cap [-n, n]$ ($n \in \mathbb{N}$). Denken Sie auch immer an den „$2^{-n}\varepsilon$-Trick“.)

(b) Zeigen Sie, dass es eine abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ mit $A \subseteq M$ und $\lambda^*(M \setminus A) < \varepsilon$ gibt. (Hinweis: Betrachte M^c und Teil (a).)

Aufgabe 10. Sei λ^* das äußere Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$ und λ seine Einschränkung auf die Borelsche σ-Algebra $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R})$.

(a) Zeigen Sie: Für jede Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ gibt es eine Borelsche Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}$ mit $B \supseteq A$ und $\lambda(B) = \lambda^*(A)$. (Hinweis: Wählen Sie eine Minimalfolge $((Q_{nk})_{k\in\mathbb{N}})_{n\in\mathbb{N}}$ von Quaderüberdeckungen für das äußere Maß $\lambda^*(A)$.)

(b) Sei nun $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ *die Lebesguesche σ-Algebra* der λ^*-messbaren Teilmengen von $\mathbb{R}$ und $\hat{\mathfrak{B}}$ die λ^*-Vervollständigung von $\mathfrak{B}$ (siehe Aufgabe 07). Zeigen Sie: $\mathfrak{L} = \hat{\mathfrak{B}}$. (Hinweis: Suche für $M \in \mathfrak{L}$ mit Aufgabe 09 eine Borelmenge $B \subseteq M$ mit $\lambda^*(M \setminus B) = 0$.)

Aufgabe 11. *Die Cantormenge* $C \subseteq [0,1]$ wird so konstruiert: Im ersten Schritt nimmt man aus $C_0 := [0,1]$ das (offene) mittlere Drittel heraus, $C_1 := C_0 \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Im zweiten Schritt nimmt aus den verbleibenden Intervallen $[0, \frac{1}{3}]$ und $[\frac{2}{3}, 1]$ wiederum das jeweils mittlere Drittel heraus, $C_2 := [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$. Bei jedem weiteren Schritt nimmt man aus den verbleibenden Intervallen jeweils das mittlere Drittel heraus und erhält so im n-ten Schritt $C_n \subseteq [0,1]$. Schließlich setzt man $C := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$.

(a) Zeigen Sie, dass C kompakt (und damit eine Borelmenge) mit $\lambda(C) = 0$ (und λ, wie immer, dem Borel-Lebesgueschen Maß) ist.

(b) Zeigen Sie, dass C gleichmächtig zu $[0,1]$ ist. (Hinweis: Betrachte die Darstellung der Zahlen in C im *ternären System*).

(c) Zeigen Sie, das die Lebesguesche σ-Algebra $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ gleichmächtig zu $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$ ist.

Aufgabe 12. Sei λ^* das äußere Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$).

(a) Zeigen Sie, dass λ^* translationsinvariant ist.

(b) Sei $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ die Lebesguesche σ-Algebra der λ^*-messbaren Teilmengen in $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass das Beispiel einer Teilmenge $A \subseteq [0,1]^n$ aus der Vorlesung, das nicht Borelsch ist, auch nicht in $\mathfrak{L}$ liegt.

(c) Zeigen Sie, dass λ^* nicht σ-additiv sein kann.

Aufgabe 13. (a) Sei λ das Borel-Lebesguesche Maß auf $\mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. Geben Sie eine *offene* Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}$ an mit $U \supset \mathbb{Q}$ und $\lambda(U) < \varepsilon$ und begründen Sie das. (Hint: Benutzen Sie eine Abzählung von $\mathbb{Q}$.)

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$, λ das Borel-Lebesguesche Maß auf $\mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$. Sei weiter $H \subseteq \mathbb{R}^n$ die Hyperebene $H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$. Geben Sie eine *offene* Quaderüberdeckung $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von H an mit $\sum_k \lambda(Q_k) < \varepsilon$ und begründen Sie.

Aufgabe 14. Wir betrachten die *Elementarmatrizen*

$$u(b) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad v(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix},$$

für jedes $b \in \mathbb{R}$, und setzen $M = \{u(b) \in \mathrm{SL}_2\mathbb{R} : b \in \mathbb{R}\} \cup \{v(b) \in \mathrm{SL}_2\mathbb{R} : b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathrm{SL}_2\mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ von M erzeugt wird. (Hint: Elementare Zeilenoperationen)

(b) Zeigen Sie, dass mit $s = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2}^{-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ und jedem $b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$u(b) = s \cdot u(b) \cdot s^{-1} \cdot u(-b).$$

(c) Zeigen Sie nun, dass $\mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ gleich seiner Kommutatoruntergruppe ist.

Aufgabe 15. Sei $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ die Lebesgue-Algebra auf $\mathbb{R}^n$ und $\lambda\colon \mathfrak{L} \to [0,\infty]$ das Lebesguesche Maß auf ihr (vgl. Aufgabe 10).

(a) Zeigen Sie die Transformationsformel für Isomorphismen $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ auch für alle $A \in \mathfrak{L}$: $TA \in \mathfrak{L}$ und $\lambda(TA) = |\det T|\lambda(A)$.

(b) Zeigen Sie nun, dass die Transformationsformel für alle $A \in \mathfrak{L}$ sogar für alle linearen Abbildungen $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gilt (wobei „$0 \cdot \infty := 0$“ gesetzt wird).

Aufgabe 16. Seien $\mathrm{SL}_n\mathbb{R} \subseteq \mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ die *spezielle lineare Gruppe* und $\mathrm{SO}_n\mathbb{R} \subseteq \mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ die *spezielle orthogonale Gruppe*.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{SL}_n\mathbb{R}$ und $\mathrm{SO}_n\mathbb{R}$ Untergruppen von $\mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ sind.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{SO}_2\mathbb{R}$ genau aus den *Drehmatrizen*

$$u(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

mit $\theta \in [0, 2\pi]$ besteht. (Hint: In den Spalten einer speziellen orthogonalen Matrix steht eine positiv orientierte Orthonormalbasis.)

(c) Sei $S \in \mathrm{SO}_3\mathbb{R} \setminus \{\mathbf{1}\}$. Zeigen Sie, dass es einen 1-dimensionalen Unterraum $L \subseteq \mathbb{R}^3$ gibt mit $Sx = x$, für alle $x \in L$ (eine so genannte *Fixgerade*), und dass S das senkrechte Komplement $E = L^\perp$ von L in sich abbildet und dort eine Drehung um einen Winkel $\theta \in (0, 2\pi)$ (bzgl. einer gewählten Orientierung von E) ist. (Hint: Zeigen Sie, dass $\lambda = 1$ ein Eigenwert von S ist.)

Aufgabe 17. Sei $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $Y \in \mathfrak{A}$.

(a) Wir definieren *die Spuralgebra von $\mathfrak{A}$ auf Y* durch

$$\mathfrak{B} := \{A \cap Y \in \mathfrak{P}(Y) : \ A \in \mathfrak{A}\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathfrak{B}$ eine σ-Algebra auf Y ist und $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$.

(b) Nun definieren wir $\nu\colon \mathfrak{B} \to [0,\infty]$ durch $\nu := \mu|\mathfrak{B}$. Zeigen Sie, dass ν ein Maß auf $(Y, \mathfrak{B})$ ist.

(c) Sei $f\colon X \to \bar{\mathbb{R}}$ $\mathfrak{A}$-messbar. Zeigen Sie, dass dann auch $f|Y\colon Y \to \bar{\mathbb{R}}$ $\mathfrak{B}$-messbar ist. Sei nun zusätzlich $f \geq 0$ und $\chi_Y\colon X \to \mathbb{R}$ die charakteristische Funktion von Y. Zeigen Sie dann:

$$\int f|Y \, d\nu = \int f \cdot \chi_Y \, d\mu.$$

(Diese Zahl in $[0,\infty]$ wird mit $\int_Y f \, d\mu$ bezeichnet.)

Aufgabe 18. Sei $(X, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$ ein Maßraum, $\mathfrak{A}_2 \subseteq \mathfrak{A}_1$ eine σ-Unteralgebra und es sei $\mu_2 := \mu_1|\mathfrak{A}_2$.

(a) Zeigen Sie, dass auch $(X, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$ ein Maßraum ist.

(b) Sei $f\colon X \to [0, \infty]$ $\mathfrak{A}_2$-messbar. Zeigen Sie, dass f dann auch $\mathfrak{A}_1$-messbar ist und es gilt:

$$\int f \, d\mu_1 = \int f \, d\mu_2.$$

Aufgabe 19. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend. Zeigen Sie, dass f (Borel-) messbar ist.

Aufgabe 20. Sei $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $g\colon X \to [0, \infty]$ messbar.

(a) Zeigen Sie, dass durch $\nu\colon \mathfrak{A} \to [0, \infty]$,

$$\nu(A) = \int_A g \, d\mu$$

(vgl. Aufgabe 17) ein Maß auf $(X, \mathfrak{A})$ gegeben wird. (Dieses wird *das mit g gewichtete Maß μ* genannt und manchmal (wegen Teil (b)) auch mit $d\nu = g \cdot d\mu$ bezeichnet.)

(b) Sei $f\colon X \to [0, \infty]$ messbar. Zeigen Sie:

$$\int f \, d\nu = \int f \cdot g \, d\mu.$$

Aufgabe 21. Seien $(X, \mathfrak{A})$ und $(Y, \mathfrak{B})$ Messräume und $\Phi\colon X \to Y$ messbar. Sei weiter μ ein Maß auf $(X, \mathfrak{A})$. Dann definieren wir $\nu\colon \mathfrak{B} \to [0, \infty]$ durch $\nu(B) = \mu(\Phi^{-1}(B))$.

(a) Zeigen Sie, dass ν ein Maß auf $(Y, \mathfrak{B})$ ist. (Wir nennen ν *das Bildmaß von μ unter Φ* und notieren es so: $\nu =: \Phi_*\mu$.)

(b) Sei nun $g\colon Y \to [0, \infty]$ messbar. Zeigen Sie, dass dann auch $f := g \circ \Phi\colon X \to [0, \infty]$ messbar ist und für alle $B \in \mathfrak{B}$ gilt (vgl. Aufgabe 17):

$$\int_B g \, d\nu = \int_{\Phi^{-1}(B)} f \, d\mu.$$

Aufgabe 22. Sei $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $\hat{\mathfrak{A}}$ die bzgl. μ vervollständigte σ-Algebra von $\mathfrak{A}$ (siehe Aufgabe 07).

(a) Sei $g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathfrak{A}$-messbar und $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion mit $f = g$ μ-fast-überall. Zeigen Sie, dass f dann $\hat{\mathfrak{A}}$-messbar ist.

(b) Sei nun $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\hat{\mathfrak{A}}$-messbar. Zeigen Sie, dass es dann $\mathfrak{A}$-messbare Funktionen $g_1, g_2\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ gibt mit $g_1 = g_2$ μ-fast-überall und $g_1 \leq f \leq g_2$. (Hinweis: Zeigen Sie das zunächst für $\hat{\mathfrak{A}}$-messbare Treppenfunktionen.)

Aufgabe 23. Sei X ein Maßraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f\colon X \times I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass folgendes gilt:

(i) Für jedes $s \in I$ ist die Funktion $f(\cdot, s)\colon X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x, s)$, integrierbar;

(ii) für jedes $y \in X$ ist die Funktion $f(y, \cdot)\colon I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(y, t)$, differenzierbar.

Zudem existiere eine integrierbare Funktion $g\colon X \to [0, \infty]$, so dass für alle $x \in X$ und $t \in I$ gilt: $|\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)| \leq g(x)$. Zeigen Sie: Dann ist

(a) die Funktion $\frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t)\colon X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$, für jedes $t \in I$ integrierbar (also insbesondere messbar),

(b) die Funktion $h\colon I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \int f(\cdot, t)\, d\mu$, differenzierbar,

und es gilt für alle $t \in I$:

$$\frac{d}{dt} \int f(\cdot, t)\, d\mu = \int \frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t)\, d\mu.$$

Aufgabe 24. Sei $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Einschränkung $f|[0, n]$ Riemann-integrierbar ist.

(a) Zeigen Sie, dass f Lebesgue-messbar ist. (Hinweis: Bitte verwenden Sie die (unbewiesene) Bemerkung aus der Vorlesung, dass (für alle $n \in \mathbb{N}$) $f|[0, n]$ Lebesgue-messbar ist.)

(b) Zeigen Sie nun: Ist $f \geq 0$, so ist f genau dann Lebesgue-integrierbar, wenn das uneigentliche Riemann-Integral $\int_0^\infty f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^n f(x)\, dx$ existiert und dann gilt:

$$\int_{[0,\infty)} f\, d\lambda = \int_0^\infty f(x)\, dx.$$

Aufgabe 25. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Zeigen Sie:

(a) Ist $f''(x) \leq 0$, für alle $x \in I$, so ist f konkav.

(b) Ist f konkav, so ist $f''(x) \leq 0$, für alle $x \in I$.

(Hinweis: Zu (a): Ist $x_1 < x_2$ und $x = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2$ mit $\lambda \in (0, 1)$, so wende man den Mittelwertsatz auf $f|[x_1, x]$ und $f|[x, x_2]$ an. Zu (b): Sei $f''(x_0) > 0$ (für ein $x_0 \in I$). Betrachten Sie dann die Hilfsfunktion $I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) - f'(x_0)(x - x_0)$.)

Aufgabe 26. Wir betrachten die Funktion $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$, die durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{für } x > 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

gegeben ist.

(a) Sei $g\colon [1, \infty) \to [0, \infty)$ uneigentlich Riemann-integrierbar und $h\colon [1, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $|h| \leq g$ und so, dass $h|[1, a]$ für alle $a \in (1, \infty)$ Riemann-integrierbar ist. Zeigen Sie, dass h dann auch uneigentlich Riemann-integrierbar ist. (Hinweis: Aufgabe 24 und der Satz von Lebesgue)

(b) Zeigen Sie nun mit Hilfe von Teil (a), dass f uneigentlich Riemann-integrierbar ist. (Hinweis: Machen Sie, bevor Sie (a) anwenden, noch eine partielle Integration.)

(c) Zeigen Sie schließlich, dass f nicht Lebesgue-integrierbar ist. (Hinweis: Integrieren Sie $|f|$ jeweils von $k\pi$ bis $(k+1)\pi$ (für $k \in \mathbb{N}$) und schätzen Sie dann $\int |f|\, d\lambda$ nach unten durch die harmonische Reihe ab.)

Aufgabe 27. Sei $X = \mathbb{N}$, $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge nicht-negativer Zahlen und $\mu_\alpha \colon \mathfrak{P}(\mathbb{N}) \to [0,\infty]$ das Maß auf der vollen Potenzalgebra von X, welches $\mu_\alpha(\{n\}) = \alpha_n$ (für alle $n \in \mathbb{N}$) erfüllt (siehe Aufgabe 02).

(a) Zeigen Sie, dass jede Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (also eine reelle Zahlenfolge (x_n), wenn $x_n = f(n)$ notiert wird) messbar ist und für nicht negatives $f = (x_n)$ (also $x_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$) gilt:

$$\int f\, d\mu_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n.$$

(b) Sei nun $\alpha_n = \frac{1}{n^3}$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $f = (x_n)$ mit $x_n = n$ zwar μ_α-integrierbar ist, aber $f^2 = (x_n^2)$ nicht μ_α-integrierbar ist.

Aufgabe 28. Sei (X,μ) ein Maßraum. Eine messbare Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ heißt *wesentlich beschränkt*, wenn es ein $c > 0$ gibt, so dass $\{x \in X : |f(x)| > c\} =: \{|f| > c\}$ eine Nullmenge ist. Man setzt dann

$$\|f\|_\infty := \inf\{c \geq 0 :\ \mu(\{|f| > c\}) = 0\} \in [0,\infty).$$

(a) Sei $\mathfrak{L}^\infty(\mu)$ die Menge aller wesentlich beschränkten Funktionen auf X. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{L}^\infty(\mu)$ eine Untervektorraum aller (messbaren) Funktionen auf X ist.

(b) Sei $\mathfrak{N}(\mu)$ der Unterraum aller messbaren Funktionen, die fast-überall gleich Null sind. Dann ist $\mathfrak{N}(\mu) \subseteq \mathfrak{L}^\infty(\mu)$ und man setzt $L^\infty(\mu) := \mathfrak{L}^\infty(\mu)/\mathfrak{N}(\mu)$. Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|\colon L^\infty(\mu) \to [0,\infty)$, $[f] \mapsto \|f\|_\infty$ wohldefiniert und eine Norm auf $L^\infty(\mu)$ ist. (Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\{|f| > \|f\|_\infty\}$ eine Nullmenge ist.)

Aufgabe 29. Sei X ein Maßraum.

(a) Sei $f \in \mathcal{L}^1(X)$ und $g \in \mathcal{L}^\infty(X)$ (vgl. Aufgabe 28). Zeigen Sie, dass dann $f \cdot g \in \mathcal{L}^1(X)$ ist und die Hölderungleichung auch für die Fälle $p = 1$ und $q = \infty$ gilt:

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty.$$

(b) Zeigen Sie, dass auch $(L^\infty(X), \|\cdot\|_\infty)$ (vgl. Aufgabe 28) vollständig ist. (Hinweis: Vergleichen Sie auch die „Pfingstaufgabe“ (Aufgabe 32) aus Analysis-II.)

Aufgabe 30. Sei (X,μ) ein Maßraum und $1 \leq p < q \leq \infty$.

(a) Sei $p < r < q$ und $\lambda \in (0,1)$ durch die Bedingung $\frac{1}{r} = (1-\lambda)\frac{1}{q} + \lambda\frac{1}{p}$ gegeben. Zeigen Sie: Ist $f \in \mathcal{L}^p(X) \cap \mathcal{L}^q(X)$, so ist $f \in \mathcal{L}^r(X)$ und es gilt:

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^\lambda \cdot \|f\|_q^{1-\lambda}.$$

(Hinweis: Wenden Sie Hölders Ungleichung auf geeignete Potenzen von $|f|$ an.)

(b) Sei nun $\mu(X) < \infty$ und $f \in \mathcal{L}^q(X)$. Zeigen Sie, dass dann $f \in \mathcal{L}^p(X)$ ist, für alle $1 \leq p \leq q$, und es gilt:

$$\|f\|_p \leq \mu(X)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \cdot \|f\|_q.$$

(Hinweis: Die konstante Funktion 1 ist jetzt in $\mathcal{L}^r$, für alle $r \in [1, \infty]$.)

Aufgabe 31. Sei $\mathfrak{L}^1$ die Lebesgue-Algebra auf $\mathbb{R}$ und $\mathfrak{L}^2$ die Lebesgue-Algebra auf $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie:

(a) $\mathfrak{L}^1 \otimes \mathfrak{L}^1 \subseteq \mathfrak{L}^2$;

(b) $\mathfrak{L}^1 \otimes \mathfrak{L}^1 \neq \mathfrak{L}^2$. (Hinweis: Verwenden Sie ein $C \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}) \setminus \mathfrak{L}^1$.)

Aufgabe 32. Sei $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ die Borelsche σ-Algebra auf $\mathbb{R}$ und λ das Borel-Lebesguesche Maß auf $\mathfrak{B}$. Sei weiter $\mu\colon \mathfrak{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ das Zählmaß auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

(i) die Diagonale $\triangle = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x = y\}$ in $\mathfrak{B} \otimes \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ liegt;

(ii) für jedes $x \in \mathbb{R}$ der Schnitt $\triangle_x \in \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ und für jedes $y \in \mathbb{R}$ der Schnitt $\triangle_y \in \mathfrak{B}$ liegt;

(iii) die Funktionen $s\colon \mathbb{R} \to [0, \infty]$, $s(x) = \mu(\triangle_x)$, und $t\colon \mathbb{R} \to [0, \infty]$, $t(y) = \lambda(\triangle_y)$, messbar sind;

(iv) aber gilt:

$$\int s\, d\lambda \neq \int t\, d\mu.$$

Wieso widerspricht das nicht dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Produktmaße?

Aufgabe 33. Sei $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und $f\colon X \to [0, \infty]$ eine messbare Funktion. Sei weiter λ das Borel-Lebesguesche Maß auf der Borel-Algebra $\mathfrak{B}$ von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass der *Subgraph von* f, d.i. die Teilmenge

$$G_f := \{(x, t) \in X \times \mathbb{R} :\ 0 \leq t \leq f(x)\} \subseteq X \times \mathbb{R},$$

in $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{P}(X \times \mathbb{R})$ ist und bezüglich des Produktmaßes $\mu \otimes \lambda$ auf $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ gilt:

$$\int f\, d\mu = \mu \otimes \lambda(G_f).$$

Aufgabe 34. **(a)** Sei K ein Kreiskegel mit einer Grundscheibe vom Radius $r > 0$ und Höhe $h > 0$. Berechnen Sie mit Cavalieries Prinzip das Volumen von K.

(b) Sei $f\colon [a, b] \to [0, \infty)$ stetig $(-\infty < a < b < \infty)$ und $K \subseteq [a, b] \times \mathbb{R}^2$ der Rotationskörper, der entsteht, wenn man den Graphen von f um die x-Achse rotiert,

$$K = \{(x, y, z) \in [a, b] \times \mathbb{R}^2 :\ y^2 + z^2 \leq f(x)^2\}.$$

Begründen Sie, warum $K \subseteq \mathbb{R}^3$ Borelsch ist und bzgl. des Borel-Lebesgueschen Maßes λ auf $\mathbb{R}^3$ gilt:

$$\lambda(K) = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx.$$

Aufgabe 35. Zeigen Sie, dass für das Volumen V eines Torus' T mit Radien $0 < r < R$ gilt:

$$V = 2\pi^2 r^2 R.$$

Aufgabe 36. (a) Sei $K \subseteq \mathbb{R}^3$ kompakt mit $\overset{\circ}{K} \neq \emptyset$. ($\overset{\circ}{K}$ bezeichnet hier das Innere von K.) Begründen Sie, dass K Borelsch ist und für das Lebesguesche Maß $\lambda^3(K) = V$ gilt: $0 < V < \infty$.

(b) *Der Schwerpunkt* $S_K = (s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^3$ *eines Körpers* $K \subseteq \mathbb{R}^3$ (d.h.: K ist kompakt mit $\overset{\circ}{K} \neq \emptyset$) wird definiert durch ($\mathrm{vol}(K) := \lambda^3(K)$)

$$s_i := \frac{1}{\mathrm{vol}(K)} \int_K x_i \, dx \quad (i = 1, 2, 3).$$

Sei nun $S = S_{\mathbb{B}^3_+} = (s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^3$ der Schwerpunkt der oberen Halbkugel $\mathbb{B}^3_+ = \{x \in \mathbb{B}^3 : x_3 \geq 0\}$.

(i) Begründen Sie mit Hilfe der Transformationsformel für lineare Diffeomorphismen, dass $s_1 = s_2 = 0$ ist.

(ii) Berechnen Sie mit Hilfe von Tonellis Satz s_3.

Aufgabe 37. Wir betrachten die Kugelkoordinaten $\Phi\colon G \to \mathbb{R}^3$ mit $G = (0,1) \times (0,\pi) \times (0,2\pi)$ und

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = (r \sin\theta \cos\varphi, r \sin\theta \sin\varphi, r\cos\theta).$$

Wir benutzen von Aufgabe 44.b aus Analysis II, dass Φ injektiv ist.

(a) Berechnen Sie die Jacobische $J_\Phi\colon G \to [0, \infty)$, argumentieren Sie möglichst sauber mit dem Umkehrsatz, dass $D = \Phi(G)$ ein Gebiet ist, bestimmen Sie D und begründen Sie, warum $\Phi\colon G \to D$ ein Diffeomorphismus ist.

(b) Begründen Sie, warum $\mathbb{B}^3 \setminus D$ eine Borelsche Nullmenge ist. (Hint: Z.B. mit der Transformationsformel oder auch mit Cavalieri wie in der Musterlösung-10 von Aufgabe 35.)

(c) Zeigen Sie nun (erneut) mit Hilfe dieser Kugelkoordinaten, dass für das Volumen V der Einheitskugel $\mathbb{B}^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| \leq 1\}$ gilt:

$$V = \frac{4}{3}\pi.$$

Aufgabe 38. Wir betrachten nun die Polarkoordinaten $\Phi\colon G \to \mathbb{R}^2$ mit $G = (0, \infty) \times (0, 2\pi)$ und

$$\Phi(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

(a) Berechnen Sie die Jacobische J_Φ von Φ, das Bild $D \subseteq \mathbb{R}^2$ von Φ und begründen Sie, warum $\Phi\colon G \to D$ ein Diffeomorphismus ist.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe von Polarkoordinaten die Integrale

$$\int_{\mathbb{B}^2} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy, \qquad \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy,$$

und zeigen Sie mit Hilfe des 2. Integrals (erneut):

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Aufgabe 39. **(a)** Sei λ das Borel-Lebesguesche Maß auf $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$), $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein (achsenparalleler) Quader und sei $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie, dass es ein $r \in \mathbb{N}$ und (achsenparallele) Würfel $W_1, \dots, W_r \subseteq \mathbb{R}^n$ gibt mit $Q \subseteq W_1 \cup \dots \cup W_r$ und

$$\sum_{j=1}^{r} \lambda(W_j) < \lambda(Q) + \varepsilon.$$

(Hinweis: Prüfen Sie das zunächst für Quader mit rationalen Eckpunkten und approximieren Sie dann Q mit solchen von außen.)

(b) Zeigen Sie nun, dass man das äußere Lebesgue-Maß λ^* auf $\mathbb{R}^n$ auch mit Würfelüberdeckungen an Stelle von Quaderüberdeckungen definieren könnte, d.h.: für alle $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist

$$\lambda^*(A) = \inf\{\sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda(W_j) \in [0,\infty] : \ (W_j)_{j\in\mathbb{N}} \text{ ist eine Würfelüberdeckung von } A\}.$$

Aufgabe 40. **(a)** Sei $N \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge (bzgl. des äußeren Lebesgue-Maßes auf $\mathbb{R}^n$) und $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie, dass es eine Kugelüberdeckung $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von N gibt mit $\sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda(B_k) < \varepsilon$.

(b) Zeigen Sie, dass man das äußere Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$ auch mit Kugelüberdeckungen bekommt: Für alle $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist

$$\lambda^*(A) = \inf\{\sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda(B_j) \in [0,\infty] : \ (B_j)_{j\in\mathbb{N}} \text{ ist eine Kugelüberdeckung von } A\}.$$

(Hinweis: Benutzen Sie das (noch unbewiesene) Lemma aus der Vorlesung, dass man einen Quader Q zu einem gegebenen $\varepsilon > 0$ so mit einer Kugelüberdeckung $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Q versehen kann, dass $\sum_k \lambda(B_k) < \lambda(Q) + \varepsilon$ ist.)

Aufgabe 41. Sei λ das Borel-Lebesguesche Maß auf $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$).

(a) Seien $f, g \in \mathcal{L}^1(\lambda)$. Zeigen Sie, dass $\varphi\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto f(t)g(x-t)$, messbar und bzgl. $\lambda \otimes \lambda$ integrierbar ist und damit nach Fubinis Satz $f * g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$(f * g)(x) = \int f(t)g(x-t)\,d\lambda(t),$$

λ-fast überall definiert ist. Wir setzen $(f * g)(x) = 0$ für die $x \in \mathbb{R}^n$, wo diese Vorschrift nicht definiert ist, und nennen $f * g$ *die Faltung von f und g*. Begründen Sie, warum $f * g$ messbar ist und

$$\|f * g\|_1 \le \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$$

gilt (und damit also $f * g \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ ist).

(b) Zeigen Sie, dass

$$*\colon L^1(\lambda) \times L^1(\lambda) \to L^1(\lambda),\ ([f],[g]) \mapsto [f * g]$$

wohldefiniert, $\mathbb{R}$-bilinear, assoziativ und kommutativ ist.

(Hinweis: Benutzen Sie Translationsinvarianz von λ und Tonellis Satz.)

Für die folgenden drei Aufgaben benutzen wir folgenden Satz aus der Funktionalanalysis:

Satz (von Stone-Weierstraß). Sei (K,d) ein kompakter metrischer Raum und $(\mathcal{C}(K,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ die Banach-Algebra der stetigen Funktionen auf K (siehe auch Aufgabe 35.b, Analysis-II). Sei weiter $A \subseteq \mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ eine Unteralgebra, so dass

- für jedes $x \in K$ ein $f \in A$ mit $f(x) \neq 0$ existiert und
- für jedes Paar $(x,y) \in K \times K$ mit $x \neq y$ ein $g \in A$ existiert mit $g(x) \neq g(y)$.

Dann liegt A dicht in $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$.

Aufgabe 42. Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt und $f\colon K \to \mathbb{R}^m$ stetig ($m,n \in \mathbb{N}$). Zeigen Sie, dass es eine Folge (P_k) stetig differenzierbarer Funktionen $P_k\colon K \to \mathbb{R}^m$ ($k \in \mathbb{N}$) gibt, die gleichmäßig gegen f konvergiert. (Hinweis: Versuchen Sie es mit polynomialen Abbildungen.)

Aufgabe 43. Sei $F\colon \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld ($n \in \mathbb{N}$).

(a) Zeigen Sie, dass es eine Folge (Q_k) stetig differenzierbarer Vektorfelder auf $\mathbb{S}^{n-1}$ gibt, die gleichmäßig gegen F konvergiert.

(b) (Igelsatz) Sei nun n ungerade. Zeigen Sie, dass F eine Nullstelle hat.

Aufgabe 44. (a) (Brouwers Fixpunktsatz) Sei $f\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ stetig ($n \in \mathbb{N}$). Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt hat. (Hinweis: Approximieren Sie f mit stetig differenzierbaren Abbildungen $g_k\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}^n$ und skalieren Sie geschickt um, so dass $g_k(\mathbb{B}^n) \subseteq \mathbb{B}^n$ ist.)

(b) (Retraktionssatz) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass es keine Retraktion $r\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ (also r stetig mit $r \circ i = \mathrm{id}$, wo $i\colon \mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{B}^n$ die Inklusion ist) gibt. (Hinweis: Bauen Sie aus einer angenommenen Retraktion r ein fixpunktfreies $f\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$.)

Aufgabe 45. Sei (X,d) ein metrischer Raum und $s \in [0,\infty)$. Für jedes $\delta > 0$ und jede Teilmenge $A \subseteq X$ setzen wir

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s_\delta(A) \ &:= \ \inf\{\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{diam}(C_k)^s \in [0,\infty] : \ (C_k)_k \text{ ist eine Überdeckung von } A \\ &\qquad \text{mit } \mathrm{diam}(C_k) < \delta,\ \forall k \in \mathbb{N}\}.\end{aligned}$$

($\mathrm{diam}(C) = \sup\{d(x,y) \in [0,\infty) : x,y \in C\} \in [0,\infty]$ bezeichnet hier *den Durchmesser von* $\emptyset \neq C \subseteq X$, $\mathrm{diam}(\emptyset)^s := 0,\ \forall s \geq 0$.) Schließlich sei

$$\mathcal{H}^s(A) = \sup_{\delta>0} \mathcal{H}^s_\delta(A) \in [0,\infty].$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{H}^s$ ein äußeres Maß auf X ist. (Man nennt $\mathcal{H}^s$ (bis auf einen Faktor) *das s-dimensionale äußere Hausdorff-Maß auf X*.)

Aufgabe 46. Sei X ein metrischer Raum. Für jede Teilmenge $A \subseteq X$ definiert man *die Hausdorff-Dimension von A* durch

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) := \inf\{s \in [0,\infty) : \ \mathcal{H}^s(A) = 0\} \in [0,\infty].$$

Zeigen Sie für $0 \leq s < t$:

(i) $\mathcal{H}^s(A) < \infty \Rightarrow \mathcal{H}^t(A) = 0$

(ii) $\mathcal{H}^t(A) > 0 \Rightarrow \mathcal{H}^s(A) = \infty$

Folgern Sie daraus, dass für A (mit unendlich-vielen Elementen) auch gilt:

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) = \sup\{s \in [0,\infty) : \ \mathcal{H}^s(A) = \infty\}.$$

Aufgabe 47. Sei $C \subseteq \mathbb{R}$ die Cantormenge (siehe Aufgabe 11) und $s := \ln 2 / \ln 3$. Zeigen Sie mit folgender Anleitung, dass $\dim_{\mathcal{H}}(C) = s$ ist.

(i) $\mathcal{H}^s(C) \leq 1$

(ii) Sei $\delta < \frac{1}{3}$ und $(J_i)_{i=1,\dots,m}$ eine endliche Überdeckung von C aus offenen Intervallen mit $\mathrm{diam}(J_i) < \delta$, für alle $i = 1, \dots, m$. Dann gilt

$$\frac{1}{2} \leq \sum_{i=1}^{m} \mathrm{diam}(J_i)^s$$

(iii) $\frac{1}{2} \leq \mathcal{H}^s(C)$

Für die folgende Aufgabe betrachten wir komplex-wertige, messbare Funktionen $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, d.h.: Urbilder von offenen Mengen sind (Borel-) messbar. f heißt dann *integrierbar*, wenn

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx < \infty$$

ist. In diesem Fall sind $\mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrierbar und man setzt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx := \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{Re}(f)(x)\, dx + i \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{Im}(f)(x)\, dx.$$

Wir schreiben $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) := \{f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} : f \text{ integrabel}\}$.

Aufgabe 48 (Fourier-Transformation). **(a)** Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Begründen Sie, dass für jedes $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $x \mapsto f(x)\exp(-i\langle \xi, x\rangle)$ (mit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ dem kanonischen Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$) integrierbar ist. Man setzt daher $\hat{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$,

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle \xi, x\rangle}\, dx$$

und nennt dies *die Fourier-Transformierte von f*. Begründen Sie, dass $\hat{f}$ stetig und beschränkt ist mit

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\|f\|_1.$$

(b) Seien $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie:

$$(f * g)\hat{} = (2\pi)^{n/2}\hat{f} \cdot \hat{g}.$$

(c) Seien $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass $\hat{f}g$ und $f\hat{g}$ integrierbar sind und es gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)\,dx.$$

Aufgabe 49. (a) Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}_+$, $y = f(x)$, stetig differenzierbar und $M \subseteq \mathbb{R}^3$ der Rotatioskörper, der entsteht, wenn man den Graphen von f um die x-Achse rotieren lässt,

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; y^2 + z^2 = f(x)^2\}.$$

Begründen Sie, dass $M \subseteq \mathbb{R}^3$ Borelsch und ihr Flächeninhalt gegeben ist durch

$$\mathcal{H}^2(M) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx.$$

(b) Sei $K \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Kreiskegel mit einem Grundflächenradius $r > 0$ und einer Mantellinienlänge $s > 0$. Zeigen Sie dass der Oberflächeninhalt von K (ohne Grundfläche) gegeben ist durch

$$\mathcal{H}^2(K) = \pi r s.$$

Aufgabe 50. (a) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Gebiet ($n \in \mathbb{N}$) und $f\colon G \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Sei weiter $B \subseteq G$ Borelsch und $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ der Graph von $f|B$,

$$\Gamma = \{(x,y) \in B \times \mathbb{R} : \; y = f(x)\}.$$

Begründen Sie, warum auch $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ Borelsch ist und für seinen n-dimensionalen Flächeninhalt gilt:

$$\mathcal{H}^n(\Gamma) = \int_B \sqrt{1 + \|\mathrm{grad}(f)(x)\|^2}\,dx.$$

(Hinweis: Für Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}(n,s)$ (mit $1 \leq s \leq n$) gilt:

$$\det(A^T \cdot B) = \sum_{i_1 < \cdots < i_s} \det(A_{i_1 \ldots i_s}) \det(B_{i_1 \ldots i_s}),$$

wo $A_{i_1 \ldots i_s}$ die $s \times s$-Matrix ist, die aus den Zeilen $i_1, \ldots, i_s$ von A besteht.)

(b) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ *das hyperbolische Paraboloid*,

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; z = x^2 - y^2\},$$

und $R > 0$. Berechnen Sie den Flächeninhalt von $M \cap (B_R^2(0) \times \mathbb{R})$, wo $B_R^2(0) \subseteq \mathbb{R}^2$ die Kreisscheibe vom Radius R mit Mittelpunkt 0 in $\mathbb{R}^2$ bezeichnet.

Aufgabe 51. (a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\psi\colon \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^{n-1}$ ($N = (0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{S}^{n-1}$ *der Nordpol*) die so genannte *stereographische Projektion*, d.h.: Die Gerade, die durch N und $x \in \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{N\}$ geht, schneidet die Hyperebene $E = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = -1\}$ im Punkt $(\psi(x), -1)$. Begründen Sie, dass ψ bijektiv und $\varphi := \psi^{-1}\colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{N\} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine reguläre Parametrisierung ist.

(b) (Zwiebelsatz) Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ messbar und $S^{n-1}(r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = r\}$ für $r > 0$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}_+} \Big(\int_{S^{n-1}(r)} f(x)\, d\mathcal{H}^{n-1}(x) \Big)\, dr.$$

(Hinweis: Zeigen Sie, dass mit (dem Inversen) der stereographischen Projektion $\varphi\colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{N\}$ die Abbildung $\Phi\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$, $(r, x) \mapsto r\varphi(x)$, ein Diffeomorphismus auf sein Bild ist, und verwenden Sie, dann Transformations- und Flächenformel sowie Tonelli.)

Aufgabe 52. (a) Wir wissen schon, dass das Volumen der Kugel $B^3(r) \subseteq \mathbb{R}^3$ gerade $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ und der Oberflächeninhalt von $S^2(r) \subseteq \mathbb{R}^3$ gerade $A(r) = 4\pi r^2$ ist ($r \in \mathbb{R}_+$). Können Sie mit Hilfe von Aufgabe 51 erklären, dass nicht zufällig gilt:

$$A(r) = V'(r)$$

(b) Sei $\omega_n = \lambda(\mathbb{B}^n)$ und $\tau_{n-1} = \mathcal{H}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$ (für $n \in \mathbb{N}$). Zeigen Sie:

$$\tau_{n-1} = n\omega_n.$$

Aufgabe 53. (a) Sei

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 - y^2 - z^2 = 1\}$$

das 2-schalige Hyperboloid. Zeigen Sie, dass M eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass der Kegel

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$$

keine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist. (Hinweis: Überlegen Sie, warum eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ lokal wegzusammenhängend ist.)

Aufgabe 54. (a) Wir betrachten für jedes $n \in \mathbb{N}$ *die orthogonale Gruppe*

$$\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathrm{Mat}_n\mathbb{R} : \; A^T A = \mathbf{1}_n\} \subseteq \mathrm{Mat}_n\mathbb{R} = \mathbb{R}^{n^2}.$$

(a) Sei $F\colon \mathrm{Mat}_n\mathbb{R} \to \mathrm{Sym}_n\mathbb{R}$, $A \mapsto A^T A - \mathbf{1}$, wo $\mathrm{Sym}_n\mathbb{R}$ den Unterraum aller symmetrischen Matrizen in $\mathrm{Mat}_n\mathbb{R}$ bezeichnet. Begründen Sie, warum F stetig differenzierbar ist und zeigen Sie dann, dass das Differential $DF_A\colon \mathrm{Mat}_n\mathbb{R} \to \mathrm{Sym}_n\mathbb{R}$ von F in $A \in \mathrm{Mat}_n\mathbb{R}$ gegeben ist durch

$$DF_A(B) = A^T B + B^T A.$$

(b) Zeigen Sie nun, dass DF_A für jedes $A \in \mathrm{O}(n)$ surjektiv ist und schließen Sie daraus, dass $\mathrm{O}(n)$ eine $\frac{1}{2}n(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathrm{Mat}_n\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 55. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}_+$. Zeigen Sie, dass *das Ellipsoid*

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$$

ein Kompaktum mit glattem Rand in $\mathbb{R}^3$ ist und berechnen Sie das äußere Einheitsnormalenfeld $\nu\colon \partial E \to \mathbb{R}^3$ von E.

Aufgabe 56. Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand in $\mathbb{R}^n$ und $\nu\colon \partial K \to \mathbb{R}^n$ ihr äußeres Einheitsnormalenfeld. Für eine stetig differenzierbare Funktion $f\colon K \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^1(K)$, definiert man *die Normalenableitung von f in $x \in \partial K$* durch

$$D_\nu f(x) := \langle \mathrm{grad}(f)(x), \nu(x) \rangle.$$

Zeigen Sie:
(a) (1. Greensche Formel) Ist $f \in \mathcal{C}^1(K)$ und $g \in \mathcal{C}^2(K)$, so gilt:

$$\int_K (\langle \mathrm{grad}(f), \mathrm{grad}(g) \rangle + f \triangle g)\, d\lambda = \int_{\partial K} f D_\nu g \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

(b) (2. Greensche Formel) Sind $f, g \in \mathcal{C}^2(K)$, so gilt:

$$\int_K (f \triangle g - g \triangle f)\, d\lambda = \int_{\partial K} (f D_\nu g - g D_\nu f)\, d\mathcal{H}^{n-1}$$

Aufgabe 57. **(a)** Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) ein Kompaktum mit glattem Rand und $\nu\colon \partial K \to \mathbb{R}^n$ ihr äußeres Einheitsnormalenfeld. Zeigen Sie:

$$\lambda^n(K) = \frac{1}{n} \int_{\partial K} \langle x, \nu(x) \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}(x).$$

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von (a) erneut (vgl. Aufgabe 52.b) für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\tau_{n-1} = n\omega_n.$$

Aufgabe 58. **(a)** Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet ($n \in \mathbb{N}$) und $X\colon G \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Für jedes $x \in G$ und $\delta > 0$ betrachten wir den Ball $B_\delta(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \leq \delta\}$, so fern er in G liegt, und sein äußeres Einheitsnomalenfeld $\nu\colon \partial B_\delta(x) \to \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass für alle $x \in G$ gilt:

$$\mathrm{div}(X)(x) = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\omega_n \delta^n} \int_{\partial B_\delta(x)} \langle X, \nu \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

(b) In der *Elektrostatik* wird die in einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^3$ vorhandene *Ladung* Q durch eine *Ladungsdichte* $\rho\colon G \to \mathbb{R}$ beschrieben, d.h.: In jedem Kompaktum $K \subseteq G$ befindet sich die Ladung $Q(K) := \int_K \rho \, d\lambda$. *Das* 1. *Maxwellsche Gesetz* (in seiner integrierten Form) besagt nun, dass sich aufgrund der Ladung Q *ein elektrisches Feld* $E\colon G \to \mathbb{R}^3$ einstellt, so dass für jedes Kompaktum mit glattem Rand $K \subseteq G$ gilt: *Der Fluss von* E *aus* K *heraus*, d.i. *das Flussintegral* $\int_{\partial K} \langle E, \nu \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}$, ist gleich der Ladung in K,

$$Q(K) = \int_{\partial K} \langle E, \nu \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

(*Ladung als Quelle des elektrischen Feldes*). Zeigen Sie, dass dann (bei stetigem ρ und stetig differenzierbarem E) gilt:

$$\operatorname{div}(E) = \rho$$

(so genannte differentielle Form des 1. Maxwell-Gesetzes) und umgekehrt, dass aus der differentiellen Form auch das 1. Maxwell-Gesetz in seiner integrierten Form folgt.