Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose
Jonathan Walz

WiSe 2020/21
09.04.2021

Wiederholungsklausur zur Integrations- und Maßtheorie

Name: Matrikelnummer:

Vorname: Studiengang:

Bitte beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt und beschriften dieses mit ihrem Namen und ihrer Matrikelnummer. Die Klausur besteht aus 6 Aufgaben und 12 Teilaufgaben. In jeder Teilaufgabe können bis zu 4 Punkte erreicht werden. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Aufgabe	1a	1b	2a	2b	3a	3b	4a	4b	5a	5b	6a	6b	**Summe**
Punkte													

Aufgabe 1. Sei λ das Borel-Lebesguesche Maß auf dem Einheitsintervall $I = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass für das Maß aller in I enthaltenen irrationalen Zahlen $B \subseteq I$ gilt: $\lambda(B) = 1$.

(b) Begründen Sie maßtheoretisch, dass zwischen zwei rationalen Zahlen in I stets eine irrationale Zahl liegen muss.

Aufgabe 2. Sei λ das Borel-Lebesguesche Maß auf $\mathbb{R}$ und $N \subseteq \mathbb{R}$ eine Borelsche Nullmenge. Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to [0,\infty]$, die auf N den Wert ∞ annimmt und sonst Null ist.

(a) Zeigen Sie, dass f messbar ist.

(b) Zeigen Sie: $\int f \, d\lambda = 0$.

Aufgabe 3. Sei $X = (0,\infty)$ und λ das Borel-Lebesguesche Maß auf X.

(a) Geben Sie Definition des Vektorraums $V = \mathcal{L}^1(X,\lambda)$ an und dann ein $f \in V$, welches nicht beschränkt ist. Begründen Sie.

(b) Definieren Sie auch den Vektorraum $W = \mathcal{L}^2(X,\lambda)$ und geben Sie begründet ein $f \in V \setminus W$ und ein $g \in W \setminus V$ an.

Aufgabe 4. Sei λ^2 bzw. λ^3 das Borel-Lebesguesche Maß auf $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$.

(a) Sei $E_{a,b} \subseteq \mathbb{R}^2$ die Standard-Ellipse (samt ihrem Inneren) mit Hauptachsenlängen $a, b \in \mathbb{R}_+$,

$$E_{a,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}.$$

Zeigen Sie, dass für den Flächeninhalt $F(a, b) = \lambda^2(E_{a,b})$ gilt: $F(a, b) = \pi ab$.

(b) Wir betrachten das *elliptische Paraboloid* der Höhe $h > 0$ (samt seinem Inneren),

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z \in [0, h], \ z \geq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\}$$

(fur $a, b \in \mathbb{R}_+$). Zeigen Sie, dass für das Volumen $V = \lambda^3(P)$ von P gilt: $V = \frac{1}{2}\pi abh^2$.

Aufgabe 5. Seien $\mathcal{H}^2$ bzw. λ^3 das 2-dimensionale Hausdorffmaß bzw. das Borel-Lebesguesche Maß auf $\mathbb{R}^3$.

(a) Sei $Z \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Zylinder mit Grundflächenradius $r > 0$ und Höhe $h > 0$ sowie $F = \mathcal{H}^2(\partial Z)$ sein Oberflächeninhalt einschließlich des Bodens und des Deckels. Zeigen Sie: $F = 2\pi r(r + h)$.

(b) Berechnen Sie auch das Volumen $V = \lambda^3(Z)$ des Zylinders. Für welches Verhältnis $q = \frac{r}{h}$ ist das *isoperimetrische Verhältnis* $Q = \frac{V^2}{F^3}(q)$ maximal? Begründen Sie.

Aufgabe 6. Wir betrachten die *Zylinderkoordinaten* $\Phi\colon (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,

$$\Phi(r, \vartheta, z) = (r \cos \vartheta, r \sin \vartheta, z).$$

(a) Berechnen Sie die Jacobische von Φ und bestimmen Sie das Bild von Φ.

(b) Wir betrachten die etwas aufgedickte Mantelfläche des Zylinders mit Radius $r > 0$ und Höhe $h > 0$,

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z \in [0, h], \ (r - \varepsilon)^2 \leq x^2 + y^2 \leq (r + \varepsilon)^2\}$$

(mit $0 < \varepsilon < r$). Zeigen Sie für das Volumen V von M: $V = 4\pi rh\varepsilon$.