Prof. Dr. Roderich Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2021/2022
20.10.2021

Analysis 1: Übungsblatt 1

Aufgabe 1: Aufwärmübungen (28 Punkte)

a) Bestimmen Sie einen Bruch $\frac{q}{p}$ mit $q, p \in \mathbb{N}$, $p < 11.000$ und

$$\left| \left(\frac{q}{p}\right)^2 - 3 \right| \;<\; 10^{-8}.$$

Folgern Sie, dass dann auch $\left|\frac{q}{p} - \sqrt{3}\right| < 10^{-8}$ gilt.

b) Es seien $f(x) := \cos x + \mathrm{i}\sin x$ und $g(x) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$. Rechtfertigen Sie die Eulersche Formel

$$f(x) = g(x)\,,$$

indem Sie die Funktion $h(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$ mittels der Quotientenregel ableiten.
Sie dürfen verwenden, dass $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})' = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ und $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \neq 0$ gilt. Außerdem wissen Sie aus der Schule, dass $\sin(x)' = \cos(x)$ und $\cos(x)' = -\sin(x)$ ist.

Aufgabe 2: Die AGM-Ungleichung (24 Punkte)
Seien a und b positive reelle Zahlen, also $a, b > 0$.

a) Rechtfertigen Sie aus den binomischen Formeln, dass das geometrische Mittel durch das arithmetische Mittel beschränkt wird, also

$$\sqrt{ab} \;\leq\; \frac{a+b}{2}. \qquad \text{(AGM-Ungleichung)}$$

b) Begründen Sie unter Verwendung von a), dass das harmonische Mittel durch das geometrische Mittel beschränkt wird, also

$$\frac{2}{1/a + 1/b} \;\leq\; \sqrt{ab}.$$

c) Berechnen Sie das arithmetische, das geometrische und das harmonische Mittel der Zahlen 1 und 2.

Bitte wenden!

Aufgabe 3: Cartesisches Produkt (24 Punkte)

Als Cartesisches Produkt der Mengen M, N bezeichnet man die Menge

$$M \times N = \{(m, n) | m \in M, n \in N\}$$

aller geordneten Paare (m, n) von Elementen von M und N. Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ bezeichnet man die Menge $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$ als abgeschlossenes Intervall von a bis b. Weiterhin bezeichne $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$ die Menge aller ganzen Zahlen.

a) Zeichnen Sie jede der folgenden Mengen in die Koordinatenebene $\mathbb{R}^2$ ein:
$M_1 = ([1, 2] \cup [5, 6]) \times [3, 4], \quad M_2 = ([1, 2] \cup [5, 6]) \times \{3, 4\}, \quad M_3 = \mathbb{Z} \times \mathbb{R}.$

b) Wahr oder falsch? $(M_1 \times N_1) \cap (M_2 \times N_2) = (M_1 \cap M_2) \times (N_1 \cap N_2)$. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4: Zahlkörper? (24 Punkte)

Entscheiden Sie mit Begründung, ob die folgenden Mengen Körper sind.

a) $\mathbb{N}$ mit der üblichen Addition und Multiplikation,

b) $\mathbb{Z}$ mit der üblichen Addition und Multiplikation,

c) $\mathbb{F}_2 := \{0, 1\}$ mit den Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ gegeben durch die Verknüpfungstabellen

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}.$$

Englisch-Vokabeln (freiwillig): (Zahl-)Körper = (number) field, abelsche Gruppe = Abelian group, Mittelwert = mean (value), Algorithmus = algorithm, Beweis durch Widerspruch = proof by contradiction, Menge = set, Teilmenge = subset, gleich = equal, ist gleich = equals, größer als = greater than, kleiner als = less than, größer-gleich = greater or equal, kleiner-gleich = less or equal, Gleichung = equation, natürliche Zahl = natural number, ganze Zahl = integer, reelle Zahl = real number, komplexe Zahl = complex number, imaginäre Zahl = imaginary number, reellwertig = real-valued.

Abgabe: bis Freitag, 29.10.21 um 20 Uhr (je nach Übungsgruppe entweder online auf `urm.math.uni-tuebingen.de` oder in den Briefkasten Ihres Tutors im C-Gebäude, Ebene 3, im Postzimmer links vom Eingang).