Prof. Dr. Roderich Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2021/2022
19.1.2022

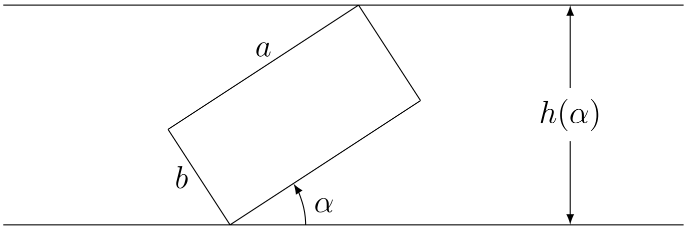
Analysis 1: Übungsblatt 11

Aufgabe 42: Optimierungsproblem (25 Punkte)

Welche Breite D muss ein Streifen $\mathbb{R} \times [0, D]$ mindestens haben, damit man ein Rechteck mit Seitenlängen $a, b > 0$ darin um 360° drehen kann, ohne dass es über den Rand des Streifens ragt? Gehen Sie dazu so vor:

a) Bestimmen Sie die Höhe $h(\alpha)$ des Rechtecks, wenn es um den Winkel α gedreht ist wie in der Zeichnung. Da sich die Werte nach $\pi/2$ wiederholen, genügt es, $\alpha \in [0, \pi/2]$ zu betrachten.

b) Zeigen Sie, dass h auf $[0, \pi/2]$ ein Maximum annimmt und bestimmen Sie dessen Wert.



Aufgabe 43: Mittelwertsatz (25 Punkte)

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie:

(a) Ist $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$, dann ist f konstant.

(b) Falls $L := \sup_{\xi \in (a,b)} |f'(\xi)| < \infty$, so gilt für alle $x, y \in (a, b)$ die sogenannte *Lipschitz-Bedingung*

$$\big|f(x) - f(y)\big| \leq L\, \big|x - y\big|.$$

Aufgabe 44: Taylorreihen (25 Punkte)

Bestimmen Sie die Taylorreihen von f, g, h um x_0 und den jeweiligen Konvergenzradius, wobei

a) $f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad x_0 = -1,$

b) $g(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x_0 = 0,$

c) $h(x) = \arctan x, \quad x_0 = 0.$

Tipp: Man kann a) und b) auch lösen, ohne die allgemeine Form für $f^{(n)}$ bzw. $g^{(n)}$ zu bestimmen. Für c) kann b) hilfreich sein!

Aufgabe 45: Exponentialreihe (25 Punkte)

Zeigen Sie, dass $e^z := e^x(\cos(y) + i \sin(y)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ für alle $z = x + iy \in \mathbb{C}$ gilt.

Tipp: Verwenden Sie die Taylorreihen von sin, cos und der reellen Exponentialfunktion sowie den Cauchy-Produktsatz!

Abgabe: bis Freitag, 28.1.2022 um 20 Uhr