

ANALYSIS 1: ÜBUNGSBLATT 12

Aufgabe 46: Hinreichendes Kriterium für lokale Extrema (20 Punkte)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f \in C^2(I)$. Zeigen Sie: Gilt bei $x_0 \in I$

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_0) < 0 \quad (\text{bzw. } f''(x_0) > 0),$$

so hat f bei x_0 ein striktes lokales Maximum (bzw. Minimum), d.h. es gibt ein offenes Intervall $J \subset I$ mit $x_0 \in J$ und $f(x) < f(x_0)$ (bzw. $f(x) > f(x_0)$) für alle $x \in J \setminus \{x_0\}$. (Tipp: Satz von Taylor)

Aufgabe 47: Regel von de l'Hospital (20 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 4^x}{\tan x},$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right),$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/\sqrt{x}},$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{1/x^2}}{1 - e^{1/x}}.$

Aufgabe 48: Integration mittels Treppenfunktionen (20 Punkte)

Berechnen Sie $\int_0^1 x \, dx$, indem Sie eine Folge von Treppenfunktionen φ_n konstruieren, die gleichmäßig gegen den Integranden konvergiert, und $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \varphi_n(x) \, dx$ auswerten.

Aufgabe 49: Integration (20 Punkte)

Zeichnen Sie die Region R , die durch $1 \leq x \leq 2$ und $0 \leq y \leq 1/x^3$ definiert ist. Bestimmen Sie (auf 3 Dezimalstellen) diejenige Zahl b , für die die Gerade $y = b$ die Region R in zwei Teile gleichen Flächeninhalts zerlegt.

Aufgabe 50: Integrale berechnen (20 Punkte)

Berechnen Sie:

a) $\int_0^4 \sqrt{x} \, dx,$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 e^x \sin(nx) \, dx,$

b) $\int_1^3 \frac{1}{1+x} \, dx,$

e) $\int_0^{\pi^2} \sin \sqrt{x} \, dx.$

c) $\int_0^2 \frac{x^3}{1+x^4} \, dx,$

Englisch-Vokabeln (freiwillig): Bedingung = condition, Kriterium = criterion [kraitírien], hinreichend = sufficient, notwendig = necessary, äquivalent = equivalent, wohldefiniert = well defined, gleichmäßig konvergent = uniformly convergent, Tangente = tangent, n mal stetig differenzierbar = n times continuously differentiable, Taylor-Entwicklung = Taylor expansion, Restglied = remainder term, Stammfunktion = anti-derivative, Integral = integral, partielle Integration = integration by parts, erster/zweiter Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung = first/second fundamental theorem of calculus, Regelfunktion = regulated function, Treppenfunktion = step function, Supremumsnorm = sup [buup] norm, Teilintervall = subinterval, Maschenweite = mesh width, uneigentliches Integral = improper integral, Partialbruchzerlegung = decomposition into partial fractions.

Abgabe: bis Freitag, 4.2.2022 um 20 Uhr