

ANALYSIS 1: ÜBUNGSBLATT 2

Aufgabe 5: Konsequenzen der Körperaxiome (30 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen ausgehend von den Körperaxiomen und ihren in der Vorlesung bereits bewiesenen Konsequenzen.

- Die Gleichung $a + x = b$ wird durch $x = b - a$ gelöst, und diese Lösung ist eindeutig.
- Das neutrale Element der Multiplikation ist eindeutig bestimmt.
- Hat ein Körper mindestens zwei Elemente (was bei uns Teil der Definition eines Körpers ist), so gilt $1 \neq 0$.
- In einem angeordneten Körper folgt aus $a \neq 0$, dass $a^2 > 0$.
- In einem angeordneten Körper gilt stets $1 > 0$.

Aufgabe 6: Vollständige Induktion (32 Punkte)

Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

- $3^{3n} - 8^n$ ist ein Vielfaches von 19 für alle $n \in \mathbb{N}$.
- $n! > 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$.
- Für die Folge der Fibonacci-Zahlen, die definiert ist durch $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ und $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, gilt

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

- $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 7: Binomische Formel (20 Punkte)

Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$.

Bitte wenden!

Aufgabe 8: Ein falscher Induktionsbeweis (18 Punkte)

Wo genau liegt der Fehler in folgendem “Induktionsbeweis”?

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $2 \cdot n = 0$.

Induktionsanfang: Für $n = 0$ ist $2 \cdot 0 = 0$.

Induktionsannahme: Die Behauptung gelte für alle $k \leq n$, also $2 \cdot k = 0$ für alle $k \leq n$.

Induktionsschritt: Für $k = n + 1$ gilt $k = a + b$ für zwei natürliche Zahlen $a, b \leq n$. Also ist $2 \cdot (n + 1) = 2 \cdot a + 2 \cdot b = 0 + 0 = 0$.

Englisch-Vokabeln (freiwillig): Assoziativgesetz = associative law, Kommutativgesetz = commutative law, Distributivgesetz = distributive law, Summe = sum, Differenz = difference, Produkt = product, Quotient oder Verhältnis = quotient oder ratio, Zähler (eines Bruchs) = numerator, Nenner = denominator, Kehrwert = reciprocal value oder inverse, Potenz = power, Exponent = exponent, Wurzel = root, plus = plus, minus = minus, minus eins = minus one oder negative one, mal = times, geteilt durch = divided by, hoch = to the, x-Quadrat = x squared.

Abgabe: bis Freitag, 5.11.2021 um 20 Uhr.