

ANALYSIS 1: ÜBUNGSBLATT 3

Aufgabe 9: Maximum, Minimum, Supremum, Infimum (30 Punkte)

Stellen Sie fest, ob folgende Teilmengen von \mathbb{R} jeweils nach oben bzw. nach unten beschränkt sind, geben Sie gegebenenfalls das Supremum und das Infimum an und entscheiden Sie, ob es sich jeweils auch um ein Maximum bzw. Minimum handelt.

- (a) $M_1 := \mathbb{N}$ (d) $M_4 := \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x^2 \leq 2\}$
(b) $M_2 := \{\frac{n-1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$ (e) $M_5 := \{\frac{1}{n+m} - \frac{1}{n} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$
(c) $M_3 := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 1 \geq 0\}$ (f) $M_6 := \{\frac{1}{n} + (-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Aufgabe 10: Charakterisierung der natürlichen Zahlen (20 Punkte)

Eine Teilmenge M von \mathbb{R} heißt induktiv, wenn $1 \in M$ und $\forall x \in M : x+1 \in M$. Es ist anschaulich klar, dass die Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen die kleinste induktive Teilmenge von \mathbb{R} ist. Hier soll bewiesen werden, dass es eine kleinste induktive Teilmenge von \mathbb{R} gibt. Sei dazu \mathcal{J} die Menge aller induktiven Teilmengen $M \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

- (a) \mathcal{J} ist nicht leer.
(b) Die Schnittmenge aller induktiven Teilmengen $N := \bigcap_{M \in \mathcal{J}} M$ ist wieder induktiv.
(c) N ist eine kleinste induktive Teilmenge von \mathbb{R} , also $N \subset M$ für jedes $M \in \mathcal{J}$.
(d) Die kleinste induktive Teilmenge ist eindeutig bestimmt: falls N' induktiv ist und ebenfalls $N' \subset M$ für alle $M \in \mathcal{J}$ erfüllt, so gilt schon $N' = N$.

Aufgabe 11: Geometrische Summenformel (26 Punkte)

Für $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$ gilt

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Beweisen Sie diese Formel einmal mittels vollständiger Induktion und einmal, indem Sie die Gleichung mit $(1 - q)$ multiplizieren und die linke Seite als "Teleskopsumme" lesen.

Bitte wenden!

Aufgabe 12: Dichte Teilmengen (24 Punkte)

Entscheiden Sie mit Begründung: Welche der folgenden Teilmengen liegen dicht in \mathbb{R} ? (Eine Teilmenge liegt dicht, wenn ihr Schnitt mit jedem offenen Intervall nicht-leer ist.)

- a) $\{\pm\sqrt{r} \mid r \in \mathbb{Q}, r \geq 0\}$.
- b) $\{\frac{q}{10^p} \mid q \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N}\}$.
- c) {Dezimalzahlen, die keine Ziffer 4 enthalten}.

Englisch-Vokabeln (freiwillig): cartesisches Produkt = Cartesian product, Betrag = absolute value oder modulus, Polarkoordinaten = polar coordinates, cartesisches Koordinatensystem = Cartesian coordinate system, Ursprung (eines Koordinatensystems) = origin, Axiome = axioms, Abbildung = mapping, Funktion = function, Definitionsbereich (einer Funktion) = domain of definition oder domain, Koeffizient = coefficient [ko-effíschent], Paar = pair oder couple, Tripel = triple, n-Tupel = n-tuple, Polynom = polynomial, Ungleichung = inequality, Formel = formula (Plural formulae oder formulas), unendlich = infinite [ínfinit], endlich = finite [fáinait], Schnittmenge = intersection, Vereinigungsmenge = union.

Abgabe: bis Freitag, 12.11.2021 um 20 Uhr.