Prof. Dr. Roderich Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2021/2022
10.11.2021

Analysis 1: Übungsblatt 4

Aufgabe 13: Folgenkonvergenz (30 Punkte)

Zeigen oder widerlegen Sie, dass die reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Bestimmen Sie im Falle der Konvergenz den Grenzwert.

a) $a_n = n$.

b) $a_n = \frac{n^2+3}{4n^2-1}$.

c) $a_1 = 0$, $a_{n+1} = 3(a_n - 4)$.

d) $a_n = \sqrt{n^2+1} - n$.

e) $a_n = \sqrt{n^2+n} - n$.

f) $a_n = \frac{n!}{2^n}$.

Aufgabe 14: Sandwich-Lemma oder Dreifolgensatz (20 Punkte)

Zeigen Sie: Gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ und $x_n \le y_n \le z_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist auch $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Aufgabe 15: Grenzwert von Mittelwerten (20 Punkte)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $a_n \to a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k = a.$$

Aufgabe 16: Die Babylonische Folge (30 Punkte)

Sei $a > 0$. Zeigen Sie mit Hilfe des Monotoniekriteriums, dass die rekursiv definierte Folge

$$x_{n+1} \;=\; \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

für jeden Startwert $x_0 > 0$ gegen $\sqrt{a}$ konvergiert.

Tipp: Zeigen Sie zunächst, dass der Grenzwert $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ existiert. Folgern Sie dann, dass $x^2 = a$ gelten muss!

Englisch-Vokabeln (freiwillig): Folge = sequence, konvergieren = to converge, divergieren = to diverge, Grenzwert = limit, nach oben (unten) beschränkt = bounded from above (below), obere (untere) Schranke = upper (lower) bound, a_n geht gegen a = a_n tends to a, vollständig = complete, Gaußklammer = Gauss bracket, dicht liegen = to be dense, ε-Umgebung = ε-neighborhood, wachsend = increasing, fallend = decreasing, monoton = monotone (Adverb monotonically), Intervallschachtelung = nested intervals, Dezimalbruchentwicklung = decimal expansion, Häufungspunkt = accumulation point, Satz = theorem, Definition = definition, n Fakultät = n factorial.

Abgabe: bis Freitag, 19.11.2021 um 20 Uhr