

ANALYSIS 1: ÜBUNGSBLATT 5

Aufgabe 17: Monotoniekriterium (25 Punkte)

Sei $c \in \mathbb{R}$ mit $c > 0$ gegeben. Die Folge (x_n) sei folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned}x_1 &= \sqrt{c} \\x_2 &= \sqrt{c + \sqrt{c}} \\&\vdots \\x_n &= \underbrace{\sqrt{c + \sqrt{c + \cdots + \sqrt{c}}}}_{n \text{ Wurzeln}}.\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass (x_n) konvergiert, und berechnen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 18: Cauchy-Folge (20 Punkte)

Sei (a_n) eine reelle Folge mit $|a_n - a_{n+1}| \leq 2^{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass (a_n) eine Cauchy-Folge ist.

Aufgabe 19: Kriterium für Häufungspunkte (20 Punkte)

Sei (x_n) eine reelle Folge. Zeigen Sie: $a \in \mathbb{R}$ ist genau dann ein Häufungspunkt von (x_n) , wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ unendlich viele Folgenglieder x_j mit der Eigenschaft $|x_j - a| < \varepsilon$ gibt.

Aufgabe 20: Beispiele Häufungspunkte (15 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils mit Begründung alle Häufungspunkte der Folge (a_n) :

- $a_n = (-1)^n \cdot (2 - \frac{1}{n})$.
- $a_n = (\frac{n}{2} - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \frac{1}{n}) \cdot (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.
- $a_n =$ die Anzahl der verschiedenen Primteiler von n .

Aufgabe 21: Häufungspunkt als Grenzwert (20 Punkte)

Es sei (a_n) eine beschränkte reelle Folge und $a \in \mathbb{R}$ ihr *einzig*er Häufungspunkt. Zeigen Sie, dass (a_n) gegen a konvergiert. Kann man dies auch für unbeschränkte Folgen zeigen?

Englisch-Vokabeln (freiwillig): Korollar = corollary, nach x auflösen = solve for x , Größe = quantity, Lösung = solution, Teilfolge = subsequence, streng wachsend = strictly increasing, fallend = decreasing, eindeutig = unique [junék], Ebene = plane, Gerade = (straight) line, Achse = axis, Vorzeichen = sign, folgern = infer oder deduce, Rechteck = rectangle, Dreieck = triangle, Kreis = circle, Kreisscheibe = disk, Kugel(fläche) = sphere, Kugel(inneres) = ball.

Abgabe: bis Freitag, 26.11.2021 um 20 Uhr