

## ANALYSIS 1: ÜBUNGSBLATT 6

### Aufgabe 22: Injektiv und surjektiv (22 Punkte)

a) Entscheiden Sie für jede der folgenden Funktionen, ob sie injektiv, surjektiv, oder sogar bijektiv ist:

(i)  $g_1 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto x^3,$

(iii)  $g_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3,$

(ii)  $g_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}, n \mapsto 1/n,$

(iv)  $g_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}, x \mapsto \min\{n \in \mathbb{N} \mid x < n\}$

b) Geben Sie eine Bijektion  $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  an und skizzieren Sie den Graphen! (Hinweis: Beginnen Sie mit dem Graphen. Schulwissen darf hier ohne Beweis benutzt werden.)

### Aufgabe 23: Komposition von Funktionen (38 Punkte)

a) Seien  $N, M, S$  Mengen und  $g : M \rightarrow N$  und  $f : N \rightarrow S$  Funktionen. Die Komposition von  $g$  und  $f$  ist definiert durch

$$f \circ g : M \rightarrow S, x \mapsto f \circ g(x) := f(g(x)).$$

Angenommen  $f \circ g$  ist bijektiv. Welche der folgenden Aussagen gelten dann notwendigerweise (mit Begründung)?

(i)  $f$  ist injektiv

(iii)  $g$  ist injektiv

(ii)  $f$  ist surjektiv

(iv)  $g$  ist surjektiv.

b) Sei nun  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^4 + 2x^2 + 1,$  und  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{|x|}.$  Geben Sie jeweils die Abbildungsvorschrift für  $f \circ g$  und  $g \circ f$  explizit an.

Bitte wenden!

**Aufgabe 24: Die Exponentialfunktion** (40 Punkte)

Sei  $e = \exp(1)$ . Zeigen Sie:

a) Für jede rationale Zahl  $x = \frac{q}{p} \in \mathbb{Q}$  gilt

$$\exp(x) = \sqrt[p]{e^q}.$$

b) Für jede natürliche Zahl  $n \geq 2$  gilt

$$e \left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < ne \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

*Tipp:* Multiplizieren Sie dazu jeweils die aus der Vorlesung bekannten Ungleichungen

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k &< e && \text{für } k = 1, \dots, n-1 \quad \text{bzw.} \\ e &< \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{-k} && \text{für } k = 2, \dots, n. \end{aligned}$$

**Englisch-Vokabeln** (freiwillig): injektiv = one-to-one oder injective, surjektiv = onto oder surjective, bijektiv = bijective, Umkehrabbildung = inverse mapping, abzählbar = countable, überabzählbar = uncountable, stetig = continuous, Zwischenwertsatz = intermediate value theorem, Verkettung  $f \circ g$  = chain oder composition, Logarithmus = logarithm, rechter Winkel = right angle, Rechenaufwand = computational cost, Näherung = approximation, Rauminhalt = volume, Flächeninhalt = area, Maßeinheit = unit of measurement, Würfel = cube, Zylinder = cylinder, Kegel = cone, Ellipse = ellipse, Parabel = parabola, Hyperbel = hyperbola.

**Abgabe:** bis Freitag, 3.12.2021, um 20 Uhr.