Prof. Dr. Roderich Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2021/2022
1.12.2021

# Analysis 1: Übungsblatt 7

**Aufgabe 25: Zwischenwertsatz** (24 Punkte)
Zeigen Sie die folgenden Aussagen unter Verwendung des Zwischenwertsatzes:

a) Seien $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(0) > g(0)$ und $f(1) < g(1)$. Dann gibt es ein $x_0 \in (0, 1)$ mit $f(x_0) = g(x_0)$.

b) Sei $f : [0, 1] \to [0, 1]$ stetig. Dann hat $f$ einen Fixpunkt, d.h. es existiert ein $x_0 \in [0, 1]$ mit $f(x_0) = x_0$.

**Aufgabe 26: Stetige Funktionen und Bolzano-Weierstraß** (25 Punkte)
Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt beschränkt, wenn die Menge der Funktionswerte

$$\operatorname{Bild} f := \{f(x) \,|\, x \in X\}$$

eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist. Zeigen Sie: Eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf einem beschränkten, abgeschlossenen Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ist beschränkt. (*Tipp:* Versuchen Sie einen Widerspruchsbeweis.) Gilt die entsprechende Aussage auch für stetige Funktionen auf offenen Intervallen? (Mit Beweis.)

**Aufgabe 27: Nochmal stetige Funktionen und Bolzano-Weierstraß** (25 Punkte)
Zeigen Sie: Eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf einem beschränkten, abgeschlossenen Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ nimmt ihr Supremum an, d.h. es gibt ein $x_{\max} \in [a, b]$ mit

$$f(x_{\max}) = \sup_{[a,b]} f := \sup\{f(x) \,|\, x \in [a, b]\}.$$

Gilt die entsprechende Aussage auch für stetige Funktionen auf offenen Intervallen? (Mit Beweis.)

Bemerkung: Dass eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen, beschränkten Intervall auch ihr Infimum annimmt, folgt natürlich mit einem analogen Beweis, muss aber nicht gezeigt werden. Man sagt auch, eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen, beschränkten Intervall hat ein Maximum und ein Minimum.

**Aufgabe 28: Polynomdivision** (26 Punkte)

a) Sei $p$ ein reelles Polynom. Zeigen Sie mit Hilfe von Satz 3.18, dass $\lambda \in \mathbb{R}$ genau dann Nullstelle von $p$ ist, wenn $x - \lambda$ ein Teiler von $p$ ist, in Symbolen

$$p(\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - \lambda) \mid p\,.$$

b) Kürzen Sie

$$\frac{x^5 - 11x^3 - 6x^2 + 28x + 24}{(x^2 - 1)(x^2 - 7x + 12)}$$

so weit wie möglich (unter Benutzung von Polynomdivision).

**Abgabe:** bis Freitag, 10.12.2021, um 20 Uhr.