Prof. Dr. Roderich Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2021/2022
8.12.2021

Analysis 1: Übungsblatt 8

Aufgabe 29: Komplexe Zahlen (15 Punkte)

a) Seien $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

(i) $|z|^2 \;=\; z \cdot \overline{z}$,

(ii) $\operatorname{Re} z \;=\; \dfrac{z+\overline{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z \;=\; \dfrac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}$,

(iii) $\overline{z_1 z_2} \;=\; \overline{z_1}\,\overline{z_2}$,

(iv) $|z_1 z_2| \;=\; |z_1| \cdot |z_2|$,

b) Berechnen Sie $\bar{z}, |z|, e^z, e^{\bar{z}}, |e^z|, e^{|z|}, \dfrac{1}{z}$ für $z = 1 + \dfrac{i\pi}{2}$.

Aufgabe 30: Mengen von komplexen Zahlen (20 Punkte)
Skizzieren Sie jeweils die Menge $M_j \subset \mathbb{C}$ in der komplexen Zahlenebene:

a) $M_1 = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |\arg(z)| < \pi/3\}$

b) $M_2 = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \,:\, 4/z = \bar{z}\}$

c) $M_3 = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |\bar{z} - i| \leq |z - 1|\}$

d) $M_4 = \{z \in \mathbb{C} \,:\, \arg(z^2) \leq \arg(z)\}$

Aufgabe 31: Folgen komplexer Zahlen (30 Punkte)
Eine Folge (z_n) in $\mathbb{C}$ heißt konvergent gegen $z \in \mathbb{C}$, falls

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \;\; \forall\, n \geq n_\varepsilon : \; |z_n - z| \,<\, \varepsilon.$$

a) Zeigen Sie: Eine Folge (z_n) in $\mathbb{C}$ ist genau dann konvergent gegen $z = x + \mathrm{i}y$, wenn die Folge $(x_n) = (\operatorname{Re} z_n)$ der Realteile gegen $x = \operatorname{Re} z$ und die Folge $(y_n) = (\operatorname{Im} z_n)$ der Imaginärteile gegen $y = \operatorname{Im} z$ konvergiert (im Sinne reeller Folgen).

Eine Folge (z_n) in $\mathbb{C}$ heißt Cauchyfolge, falls

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \;\; \forall\, n, m \geq n_\varepsilon : \; |z_n - z_m| \,<\, \varepsilon.$$

b) Zeigen Sie, dass jede Cauchyfolge (z_n) in $\mathbb{C}$ gegen ein $z \in \mathbb{C}$ konvergiert.

Tipp: Verwenden Sie den entsprechenden Satz aus dem Reellen!

Aufgabe 32: Konvergenz von Reihen (35 Punkte)

Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{C}$ und die Partialsummenfolge $s_m = \sum_{n=1}^{m} |a_n|$ der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ sei beschränkt.

Zeigen Sie:

a) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

b) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

c) Wenn (b_n) eine Folge in $\mathbb{C}$ mit $|b_n| \leq |a_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Tipp: Verwenden Sie für a) das Monotoniekriterium für Folgen und für b) das Cauchy-Kriterium für Folgen sowie a).

Abgabe: bis Freitag, 17.12.2021 um 20 Uhr. (Blatt 9 wird übrigens erst am 14.1.2022 abgegeben.)