Prof. Dr. Roderich Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Wintersemester 2021/2022
15.12.2021

Analysis 1: Übungsblatt 9

Aufgabe 33: Die Exponentialreihe (20 Punkte)
Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$.

a) Zeigen Sie: $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Zeigen Sie: $\sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} \frac{x^k}{n^k} \leq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$.

c) Folgern Sie, dass $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Tipp: Binomischer Lehrsatz.

Aufgabe 34: Limes superior und limes inferior (20 Punkte)
Sei (x_n) eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ und es sei

$$x^* := \limsup_{n\to\infty} x_n$$

wie in der Vorlesung als der größte Häufungspunkt definiert. Zeigen Sie:

$$x^* = \lim_{n\to\infty} \sup\{x_k \mid k \geq n\}.$$

Tipp: Zeigen Sie zunächst, dass die Folge $(\sup\{x_k \mid k \geq n\})_{n\in\mathbb{N}}$ tatsächlich konvergiert. Prüfen Sie dann, dass der Grenzwert sowohl $\leq$ als auch $\geq$ der linken Seite ist.

Aufgabe 35: Konvergenzradien (20 Punkte)

Bestimmen Sie für die folgenden Potenzreihen jeweils mit Begündung den Konvergenzradius.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^n}} z^n$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^n$ für $a \in \mathbb{C}$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$

Aufgabe 36: Doppelreihen (20 Punkte)

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Umordnungssatzes für Doppelreihen, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{(k^2 + \ell^2)}$$

divergiert, jedoch

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{(k^3 + \ell^3)}$$

konvergiert.

b) Sei $|z| < 1$. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes über das Cauchy-Produkt von Reihen, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n = \frac{1}{(1-z)^2} .$$

Tipp: $\frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-z)^2}$

Aufgabe 37: Summe von Kehrwerten (20 Punkte)

a) Es sei $M \subset \mathbb{N}$ die Menge aller natürlichen Zahlen, die durch keine Primzahl außer 2 und 7 teilbar sind. Zeigen Sie $\sum_{n \in M} \frac{1}{n} = \frac{7}{3}$. (Hinweis: Primfaktorzerlegung!)

b) Es sei $L \subset \mathbb{N}$ die Menge aller natürlichen Zahlen, in deren Dezimaldarstellung die Ziffer 4 nicht vorkommt. Zeigen Sie, dass $\sum_{n \in L} \frac{1}{n}$ konvergiert. (Hinweis: Man kann wie bei Cauchy-Verdichtung argumentieren, nur mit anderen Gruppierungen statt 2^k.)

Abgabe: bis Freitag, 14.1.2022, um 20 Uhr