Forster

Heuser

Deitmar

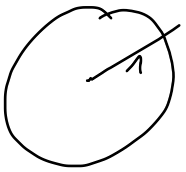
Fischer und Kaul

urm.math.uni-tuebingen.de

Englische Ü-gruppe Do 16-18 Präsenz

Kapitel 0

Die Kreiszahl π

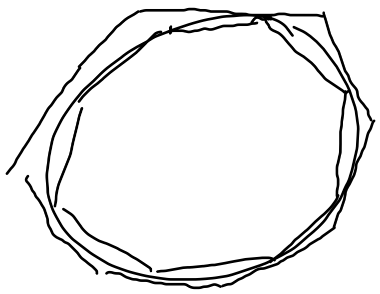


Umfang $U = 2\pi$

Flächeninhalt $= \pi$

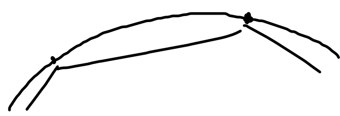
$\pi = ?$

Archimedes: Approx. Kreis durch regelmäßige n-Ecke

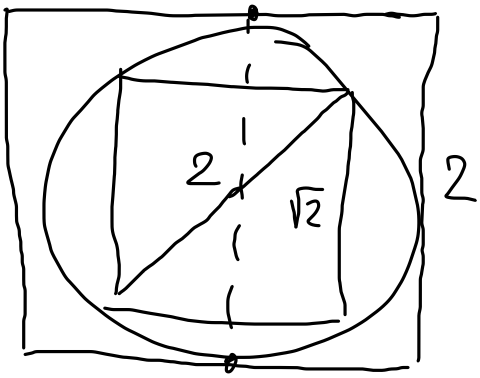


$u_n < 2\pi < U_n$

$f_n < \pi \le F_n$



Für $n=4$



$u_4 = 4\sqrt{2} \approx 5{,}7$

$U_4 = 8$

$\Longrightarrow 2{,}8 \leq \pi \leq 4$

Archimedes: $n = 96$

$$\left.\begin{aligned} u_{96}/2 &= 3\tfrac{10}{71} \\ U_{96}/2 &= 3\tfrac{1}{7} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow 3{,}1408 \leq \pi \leq 3{,}1428$$

Fragen: $U_n - u_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$?

gibt es genau eine Zahl π mit

$$\begin{aligned} u_n &\xrightarrow{n\to\infty} 2\pi \\ U_n &\longrightarrow 2\pi \end{aligned}$$?

Entsprechend für $\sqrt{2}$: die pos. Lösung von $x^2 = 2$.

$\sqrt{2} = ?$

Erste Approx. $x_0 = \frac{3}{2}$ hat $x_0^2 = \frac{9}{4} = 2{,}25$

zu groß $\Rightarrow$ x_0 zu groß, $x_0 > \sqrt{2}$

$\Rightarrow \sqrt{2}\, x_0 > 2 \Rightarrow \sqrt{2} > \frac{2}{x_0}$

$\Rightarrow \frac{2}{x_0} < \sqrt{2}$, also

$$\frac{2}{x_0} < \sqrt{2} < x_0$$

arithmetisches Mittel von a, b : $\frac{a+b}{2}$

geometrisches Mittel von a, b : $\sqrt{ab}$

$$\sqrt{\frac{2}{x_0} \cdot x_0} = \sqrt{2}, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x_0} + x_0\right) =: x_1$$

$\frac{2}{x_0} < x_1 < x_0$ ist besser Approx. an $\sqrt{2}$:

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3} + \frac{3}{2}\right) = \frac{17}{12}$$

$$x_1^2 = \frac{289}{144} \approx 2{,}0069$$

Iteration: $x_2 := \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x_1} + x_1\right) = \frac{577}{408}$

$$x_2^2 \approx 2{,}000006$$

allg.: $x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x_n} + x_n\right)$ "Babylonischer Algorithmus"

<u>Fragen</u>:
- $x_n \xrightarrow{n \to \infty} \sqrt{2}$? (Ja)
- Jedes $x_n \in \mathbb{Q}$. Ist $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$? (Nein)

Beh $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Beweis durch Widerspruch.

Angenommen, $\sqrt{2}$ wäre ein Bruch.

$$\sqrt{2} = \frac{q}{p}, \quad q, p \in \mathbb{N}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sind p, q teilerfremd. Dann

$$\frac{q^2}{p^2} = 2 \implies q^2 = 2p^2 \implies q^2 \text{ ist gerade}$$

$$\implies q \text{ ist gerade} \implies q = 2m$$

$$\implies 4m^2 = 2p^2 \implies 2m^2 = p^2 \implies p^2 \text{ ist gerade}$$

$\Rightarrow$ p ist gerade

$\Rightarrow$ p, q sind beide durch 2 teilbar

↯ zur Ann., dass p, q teilerfremd sind.

$\square$

Mi. 8-10 Frühstück
16-17 Beratung

Do 19:30 Kneipentour

29. Okt Spieleabend

Anmeldung! events.fachschaft
@math.uni-tuebingen.de
mit <u>3G Nachweis</u>

→ Website mathefachschaft.de
Insta @mathefachschaft